한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제2호 (2012년 5월), 71–95

수학적 모델링과 수학화 및 문제해결 비교 분석

Comparison and Analysis among Mathematical Modeling, Mathematization, and Problem Solving

김인경 In Kyung Kim

현재 수학교육에서 큰 흐름을 이루고 있는 수학적 모델링, 수학화, 문제해결을 살펴보았다. 먼저, 1990년대 이후 수학교육에서 활발히 연구되기 시작한 수학적 모델과 수학적 모델링을 살펴보았다. 그리고 1970년대 Freudenthal가 주장한 수학화를 분석하여 수학적 모델링과 비교분석하였다. 또한, 1980년대 이후 수학교육의 중심이 된 문제해결도 살펴보고, 이를 수학적 모델링과 비교분석하였다.

Nowadays, the big issues on mathematics education are mathematical modeling, mathematization, and problem solving. So, this paper looks about these issues. First, after 1990's, the researchers interested in mathematical model and mathematical modeling. So, this paper looks about mathematical model and mathematical modeling. Second, it looks about Freudenthal' mathematization after 1970's. And then, it compared with mathematical modeling. Also, it looks about that problem solving focused on mathematics education since 1980's. And it compared with mathematical modeling.

Keywords: 수학적 모델링(mathematical modeling), 수학화(mathematization), 문제해결(problem solving).

1 서론

1980년대 말, 미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics: N-CTM)[35]가 문제해결을 중요하게 다루기 시작하면서, 세계적으로 수학교육의 주 흐름은 문제해결을 중시하는 것이었다. 물론, 현재에도 문제해결은 수학교육에서 중요한 부분을 차지하고 있다. 이와 유사한 시기인 1970년대부터 Freudenthal[23]이 수학화 역시 현대를 살아가는 학생들에게 중요한 수학적 활동으로 다루어져야 한다고 주장했다. 또한, 비슷한 시기에 Swetz와 Hartzler[38]은 수학적 모델링 역시 학생들이 수학을 학습하는데 중요함을 주장한다. 수학적 모델링은 2000년대에 들어서면서 더욱 활발히 연

MSC: 97M10 ZDM: M10
제출일: 3월 30일 수정일: 5월 15일 게재확정일: 5월 22일

구되기 시작한다([20, 26, 30, 31, 32]). 이 수학화와 수학적 모델링의 비교분석 연구([10, 13, 15, 34])가 이루어지면서, 이 둘은 현대를 살아가는 학생들에게 중요하게 다루어져야 하는 부분이 되었다. 본고에서는 현재 수학교육에서 중요하게 다루어지고 있는 이 세 주제인 수학적 모델링, 수학화, 문제해결을 비교분석하였다.

2 수학적 모델링

2.1 수학적 모델

문제해결에서 문제해결을 다루기 전에 그 대상이 되는 문제에 대해 정의를 내려야 하는 것처럼, 수학적 모델링을 살펴보기 전에 수학적 모델에 대해서 살펴보아야 할 것이다. 수학적 모델에 대해 정의를 내려야 수학적 모델을 만드는 과정인 수학적 모델링에 관해 살펴볼 수 있기 때문이다.

Doerr와 English[20]은 '모델은 요소, 조작, 관계, 규칙의 체계로 몇몇 다른 유사한 체계의 활동을 묘사하고 설명하고 예견하는데 사용할 수 있다.' 고 정의한다. 즉, 수학적 모델은 어떤 현상의 특성들에 근접하는 수학적 구조이며, 그것을 고안하는 과정이 수학적 모델링이다[38]. 좀 더 세부적으로, 상황을 구조화하면서 자신의 비형식적인 상황모델을 개발한 후에, 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 수학적 모델을 개발하고, 그 후에 수학적 모델을 상황에 비춰 해석하여 수정하고 정교화 하여 일반화가 가능한 체계인 모델을 개발하는 과정을 모델링 활동으로 본다[10]. 만약 교수학적 환경 속에서 일어나는 일련의 교수학적 과정을 모델링이라 부른다면, 모델을 수치적, 공간적, 시각적, 확률적인 개념, 지식 및 실체를 동원해서 만들면 그 모델을 양적으로 공간적으로 조작하고 관리하기가 용이하므로, 모델은 대게 '수학적' 모델이라 정의[6]하기도 한다. 모델은 외적인 표기 체계를 사용함으로써 표현되고, 다른 체계의 움직임을 구성하고 기술하거나 설명하기 위해 사용되는 요소, 관계, 조작, 상호작용을 지배하는 규칙으로 구성된 개념적 체계이다[30]. 또는 간단히, 수학적 모델은 다양한 표현매체의 상호작용에 의하여 표현되는 개념체계이라고 말할 수 있다. 이 표현매체에는 기호나 언어, 다이어그램과 같은 전통적 매체를 비롯하여 컴퓨터 애니메이션, 시뮬레이션, 그래픽과 같은 전자매체도 포함된다. 또한, 수학적 모델은 수학적 모델링에 이용되는 기본적인 수학적 구조로도 생각할 수 있는데, 그래프, 식, 화살표, 표, 알고리즘 등이 대표적인 예이다[38]. 사실, 인지과학자는 간단히 '모델' 이라고 지칭하는 개념적 체계를 묘사하기 위해 전문적으로 엄밀하고도 정확해 보이는 용어로, '표현' 이나 '쉐마', '상황 인지 구조' 등을 사용하는 것을 더 좋아한다. 즉, 도식화에 대해서 여러 가지 도식들을 형식화된 수학내의 문제 해결 공식, 절차와 동일시하려는 경향이 있는데, 오늘날 '도식'

이라는 용어는 광범위한 의미에서 좀 더 일반적인 '모델' 이라는 용어로 대체되어 왔던 것처럼 보인다[24]. 다른 체계의 구성, 기술, 설명을 하기 위해서, 그리고 다른 사람과 의사소통하거나 나중에 다른 상황에서 자기 자신과 의사소통하기 위해서 사용하는 것이 모델의 일반적인 목적[25]이기 때문에, 수학적 모델이라는 용어로 현재 사용하고 있는 것이라고 볼 수 있다.

모델은 내적인 개념 체계와 외적인 인공물이나 표현으로 나눌 수 있다([29, 30, 31]). 다르게 말하면, 모델은 정신에, 또는 표현매체로 존재할 수 있다. 일반적으로 표현매체를 통해서 시각적으로 볼 수 있는 모델만을 생각하는데 정신적인, 내적인 개념체계로도 존재한다는 것이다. 왜냐하면, 첫째, 모델은 개념 체계이기 때문에 부분적으로 내적이고 인지 과학자가 인지구조 혹은 경험을 해석하기 위한 쉐마라고 부르는 개념체계와 유사하기 때문이다. 둘째, 수학교육과 과학교육에서 가장 강력하고도 유용한 개념 체계는 모델을 구어, 문자 기호, 구체물, 다이어그램이나 그림, 컴퓨터 프로그램, 경험에 기초한 은유, 다른 표현 매체를 사용해서 표현되지 않는 정교한 방법으로 나타낼 수 있기 때문이다[30]. 이와 달리 시각적인 측면에서의 분류로, 강옥기[1]는 수학적 모델의 개념에는 두 가지가 있다고 보았다. 하나는 구체적 모델이고, 다른 하나는 추상적 모델이다. 구체적 모델이란 어떤 실물의 특성을 이해하는데 도움을 주기 위해 그 실물을 축소 또는 확대하여 만든 조형물이다. 예를 들면, 어떤 자동차의 외형과 매우 유사하게 만든 장식용 자동차는 그 자동차의 구체적 모델이다. 추상적 모델이란 어떤 사물이나 현상의 특성을 추상적인 방법, 즉, 기호, 문자, 식, 그래프, 도표 등을 사용하여 나타낸 것이다. 예를 들면, 자유낙하 하는 물체가 떨어진 시간을 x, 떨어진 거리를 y라고 하고 x와 y의 관계를 이차함수 $y = gx^2$ (단, g는 중력가속도)라고 나타내었을 때, 이 이차함수는 자유낙하 하는 물체의 낙하한 시간과 낙하한 거리의 관계를 나타내는 추상적 모델이다. 이러한 수학적 모델과 실세계 현상과의 관계를 다음 그림 1과 같이 나타낼 수 있다. 이

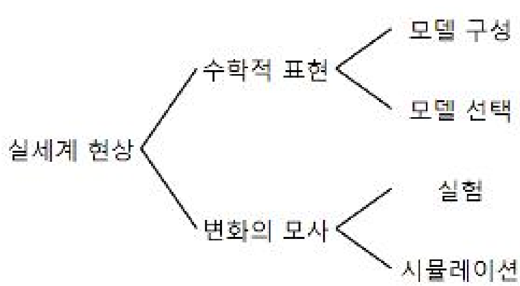

그림 1: 실세계 현상과 수학적 모델의 관계[1]

러한 수학적 모델을 형성하기 위해서 여러 가지 단계를 거친다. 또한, 형성된 수학적 모델은 계속 수정되게 된다. 이러한 주기를 그림 2에서 확인할 수 있다. 먼저, 문제 해결을

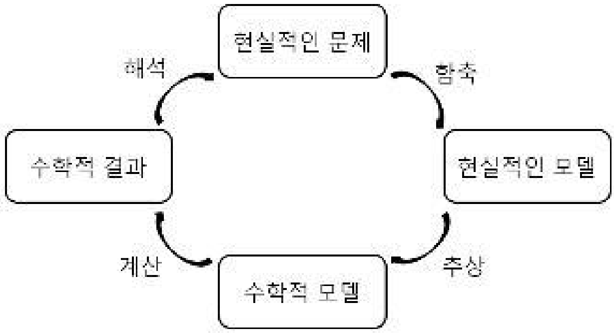

그림 2: 수학적 모델의 순환과정[33]

시작하려면, 문제와 직접적으로 관련되는 핵심적인 개념을 확인함으로써 복잡한 상황을 간단하게 한다. 이런 단순화(함축) 단계는 어떤 것을 무시할 것인지에 관해 결정을 하고 핵심적인 개념들을 어떻게 관련지을지에 대해 생각하는 것과 관련되며 원래 상황에 대한 현실적인 모델에 이르게 된다. 현실적인 모델은 원래 상황을 보다 쉽게 조사하고 조작하고 이해할 수 있다는 측면에서 모델임에 틀림없다. 다음으로 형식적인 수학적 개념과 기호를 도입하는 단계이다. 이 추상화 단계에서는 현실적인 모델의 핵심적인 특징을 표현하기 위해 수학적 개념을 선택한다. 흔히 추상화 단계는 주어진 표현의 의미를 이후의 계산단계에서 이용 가능하도록 한다는 생각을 바탕으로 진행된다. 수학적 기호로 표현된 원래의 상황과 문제에서의 표현은 상황과 문제에 대한 수학적 모델을 구성한다. 모델링의 세 번째 과정에서는 수학적 결론을 연역하기 위해 수학적 표현을 다루고 추론한다. 이 단계에서 문제 해결자가 가진 사실, 기능, 수학적 추론능력 등이 작용하게 된다. 마지막으로 수학적 추론의 결과를 해석하고 이를 문제의 원래 맥락에 적용한다. 흔히 이 결과는 모델 개발 단계가 시작될 때 예상치 못했던 것이 드러나게 된다. 그리하여, 수학적 모델을 만드는 순환과정을 자연스럽게 반복한다.

수학적 모델 개발을 위한 과정은 학자들마다 다양하게 제시하고 있다. 신은주와 이종희[9]는 Gravemeijer의 연구 결과를 바탕으로 모델링 과정에서 형성되는 모델을 상황모델, 수학 모델, 일반화 모델로 구분하였다. 여기서 모델링 과정을 네 단계로 설명하고 있다. 첫째, 경험을 기반으로 하여 실세계 맥락을 탐구하는 과정, 둘째, 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적인 상황모델을 개발하는 과정, 셋째, 상황모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학 모델을 개발하는 과정, 넷째, 수학 모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석하고 수정하고 정교화 하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 과정으로 설명하고 있다.

Lesh, Doerr, Carmona, Hjalmarson[31]은 모델 개발의 단계를 모델 도출, 모델 탐구, 모델 적용의 활동으로 구분하여 제안하였다(그림 3 참고). 먼저, 학생들은 초기에

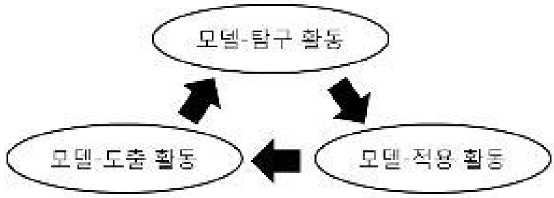

그림 3: 모델 개발 계열

주어진 체계의 활동을 묘사하고, 설명하고, 예견하기 위한 모델을 발달시키는데 필요한 것을 직면한 문제에서 제시한다(모델-도출 활동). 수학과 과학을 학습하기 위해서 모델링 방법에서 중점적인 활동인 모델을 재사용하고, 일반화시키고, 그 다음에 모델-도출 활동에서 발달시킨 구조를 확장시키고, 탐구하고, 세련되도록 할 수 있는 관련된 문제를 푼다(모델-탐구 활동과 모델-적용 활동)[22]. 이 세 단계가 계속 반복되면서 모델을 발달시킨다. 이러한 수학적 모델이 형성되는 주기들의 공통되는 특징은 실세계 상황에서 수학적 모델을 도출하여 다시 현실에 적용해 봄으로써 계속적으로 수학적 모델을 정교화시키는 것이다.

2.2 수학적 모델링

앞에서 언급한 것처럼 수학적 모델링은 수학적 모델을 개발하는 일련의 과정으로 볼 수 있다. 즉, 수학적 모델링은 실제 상황의 모델을 구성하여 실제 상황 문제를 해결하는 전체 과정이다. 그것은 단지 존재하는 현상 전체의 단순화된 상을 찾는 것이라기보다는 현상의 일부분을 조작할 수 있는 상을 찾는 것이다([2, 16]). 즉, 현실세계 문제 상황으로부터 수학적 모델로 이끄는 전 과정을 수학적 모델링이라 한다. 이는 먼저 현실세계의 문제 상황을 관찰하여 중요한 요인들을 선택하고 문제의 특징을 나타내는 변수 사이의 관계를 설정함으로써 수학적인 문제를 만든다. 다음에는 알고 있는 수학적 모델을 이용하여 수학적인 해결을 한다. 마지막으로 수학적인 해를 현실세계로 번역하여 해를 해석하는 것이다[15]. 이를 그림 1과 비교하여 살펴보면, 유사함을 알 수 있다.

학자들마다 제시하는 수학적 모델링의 특징 중 일반적인 것은 수학적 모델링의 정의처럼 수학적 모델을 만들어낸다는 것과 주기를 형성하는 것으로 볼 수 있다. Lesh, Cramer, Doerr, Post, Zawojewski[27]는 다음과 같이 수학적 모델링의 특징을 제시한다. 첫째, 수학적 모델링은 일반적인 모델기반추론의 기원과 관련이 있다. 둘째, 표현의 사상은 중요하고 인상적이지만 항상 모델링과 관련되는 것은 아니다. 모델이란 '정신적 모델'이나 '개인적 표현'이기보다는 학문적 관행의 지원을 위해 공동체내에서 구안하고 채택한 표현을 의미하기 때문이다. 셋째, 하나의 체계를 나타내기 위해 다른 체계를 이

용하는 것은 모델링의 중요한 요소임에 틀림없다는 것이다. 넷째, 몇 가지 모델의 실세계와 상대적 적합도를 비교하는 것은 특히 중요한 준거가 된다. 모델링의 필요조건으로 대안적 모델을 강조하는 것은 모델링의 결과가 모델의 효과에 기인한 것인지 또는 단순한 오류에 의한 것인지를 생각할 수 있는 인식의 토대를 제공해주기 때문이다. 다섯째, 모델링에서의 수학화의 역할을 강조한다. 모든 모델이 수학적이어야 한다고 말하려는 것은 아니다. 다만 경험이 수학화될수록 모델링은 더 유동적이며 확장이 가능해져서 모델에 가까워진다. 여기서 유동성이란 모델링 과정이 하나인 경우와 과정에서 다른 것으로 쉽게 전이 가능하다는 것을 의미하며, 확장 가능하다는 것은 모델링에서 관계가 모델계에서도 의미 있을 뿐만 아니라 실세계에 비춰서 검사할 수도 있음을 의미한다. 황혜정[17]이 제시한 수학적 모델링의 특징은 다음과 같다. 첫째, 문제 상황의 적절한 단순화 및 이에 부합하는 수학 모델의 개발을 할 수 있다. 둘째, 구체와 추상의 연결을 할 수 있다. 셋째, 시행착오를 통한 수학적 모델링 과정의 획득을 할 수 있다. 이러한 수학적 모델링 과정에서 가장 중요하다고도 볼 수 있는 부분이 현상 내지 실세계 상황 본래의 것을 단순화하여 수학적 문제로 환원시키는 과정이다. 손홍찬과 류희찬[7]이 주장하는 수학적 모델링의 특징은 다음과 같다. 첫째, 수학 외적인 실세계 상황에서 시작하여 다시 실세계 상황을 설명하고 예측하는 것으로 귀결된다. 둘째, 실세계 상황에 영향을 미치는 변인과 변인들 사이의 관계를 파악하고 이들로부터 모델을 도출했을 때, 모델의 채택 및 기각을 한 번으로 결정하지 않고 실세계 상황을 보다 잘 설명할 수 있는 모델을 얻을 때까지 반성 및 수정을 거쳐 정교화 하는 과정이 반복될 수 있다는 것이다.

수학적 모델링 과정 역시 많은 학자들이 다양한 단계로 제시하거나 반복되는 단계인 주기로 제시하고 있다. 주로 Lesh와 Doerr([28, 30])가 제시한 그림 4 모델링 주기를 사용하고 있다. Lesh와 Doerr는 광범위한 문제해결 상황에 기초적인 해결책으로 보이는 포괄적인 4단계 모델링 주기를 설명하였다. 첫째, 실제 또는 가상의 세계로부터 모델의 세계로 표현을 형성하는 묘사. 둘째, 원래의 문제해결 상황과 관련된 예상이나 행동을 일으키기 위한 모델의 조작. 셋째, 관련된 결과를 실제 혹은 가상의 상황에 되돌리기 위한 예견(해석, 변환). 넷째, 행동과 예상의 유용함과 관련된 검증이다.

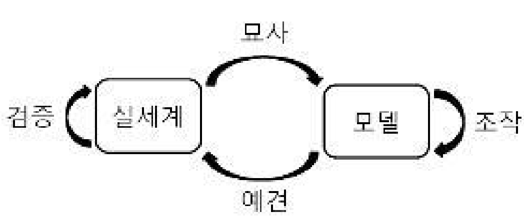

그림 4: 모델링 주기

NCTM[35]은 수학적 모델링 과정을 실세계 문제 상황을 단순화하여 문제를 구성하고, 이 문제를 예, 방정식, 그래프 등으로 이용하여 수학화 함으로써 수학적 모델을 구축하고, 수학적 모델을 이용하여 모델 내에서의 해를 구하며, 이러한 해를 단순화시켜 수학 문제에 부합하도록 해석함으로서 실세계 문제 상황에 타당하도록 한다고 제시하였다. 이를 나타내면, 그림 5와 같다.

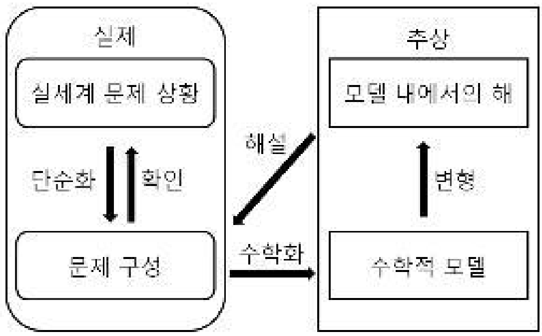

그림 5: 수학적 모델링[1]

이후에 이를 수정하여, 수학적 모델링을 '현상을 관찰하여 그 현상 속에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고 문제에 영향을 미치는 중요한 요인들을 찾고, 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축하고, 적절한 수학적 분석을 그 모델에 적용하며, 결과를 얻고 현상에 맞도록 그 결과를 재해석하여 결론을 도출한다.'[38]고 정의하고 있다. 여기서 처음 정의와의 차이점은 문제 상황보다 현상을 우선시하여 현상에서 문제 상황을 이끌어내도록 하였다는 것과 수학적 요인들을 찾아 관계를 살펴보는 과정이 추가되었다고 볼 수 있다.

류성림[5]은 수학적 모델링 과정은 보통 6단계 또는 4단계 과정을 거치게 된다고 주장하였다. 6단계 과정을 살펴보면 다음과 같다. 1단계, 문제 이해 단계로서 구하고자 하는 것과 주어진 것들을 확인한다. 2단계, 문제의 이상화 단계로 실세계 상황 문제에서 중요한 특성을 찾는다. 3단계, 수학적 모델 형성 단계로서 실제 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계이다. 수학적 형식화(수학화)라 하며, 형성된 실제 모델에서 일상용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾼다. 4단계, 수학적 추론 단계로 수학적 방법을 이용하여 수학적 결과와 결론을 도출한다. 5단계, 재해석 단계로서 앞 단계에서 추론된 결과를 원래 문제 상황과 연관시켜서, 그 상황의 결과와 결론으로 해석한다. 6단계, 실제와의 비교로 앞 단계에서 만약 수학적 결론이 상황에 적합하지 않다면, 모델 자체를 수정한다. 즉, 1-5단계를 되풀이하는 것을 말한다.

4단계 과정은 1단계, 실세계의 문제 상황 파악(단순화/형식화)으로서, 실세계의 어떤

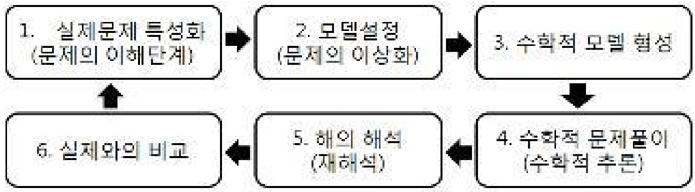

그림 6: 수학적 모델링 6단계

현상을 관찰하여 그 현상에서 나타나는 문제 상황을 파악하고, 그 문제에 영향을 주는 중요한 요인들을 이해한다. 2단계, 수학적 모델 설정(수학화)으로서, 요인들의 관계를 추측하고, 그 관계들을 수학적으로 해석하여 그 현상에 대한 수학적 모델을 세운다. 3단계, 수학적 결과 또는 모델내에서의 해(변환/분석)를 찾는 것으로, 그 모델 내에서 수학적으로 문제를 분석하여 결과를 얻는다. 4단계, 결론 예측 및 판단(타당화/적용)으로, 본 현상의 상황에 비추어 수학적 결과를 재해석함으로써 최종 결론을 얻는다.

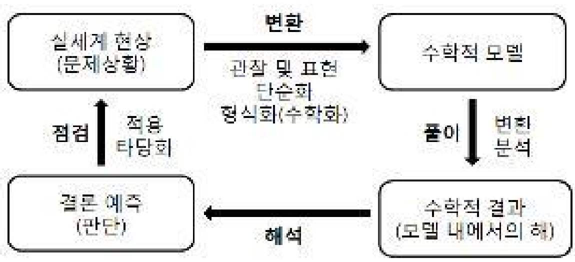

그림 7: 수학적 모델링 4단계

이 두 과정은 단계로 표현하였지만, 사실 6단계에서는 모델을 수정하는 단계, 4단계에서는 재해석하는 단계를 통해 계속 반복하는 형태를 띠고 있다. 그리하여, 결론적으로는 수학적 모델링의 단계를 주기로 제시한 것이라고 볼 수 있다.

Dossey, McCrone, Goirdano, Weir[21]가 제시한 모델링 과정의 단계를 다음과 같다. 첫째, 관찰을 통해 실세계 문제와 관련된 주요 요인을 확인한다. 둘째, 요인들 사이의 관계를 추측한다. 셋째, 수학적 분석을 통해 모델을 구성한다. 넷째, 실세계 상황에서 수학적 결론을 해석한다. 류희찬[6]은 수학적 모델링 과정을 실세계 자료(상황)를 모델로 나타내는 모델 형성 단계, 모델을 분석하고 결론에 이르는 단계, 모델을 통해 수학적 결론에 이른 결과를 해석하고 예측하고 설명하는 단계, 결론이 주어진 실세계 상황에 맞는지 여부를 검증해 보는 단계로 구분한다.

사실, 앞에서 언급한 여러 모델링 과정을 통해서 알 수 있지만, 2001년 이후의 우리나라 모든 연구에서 수학적 모델링 과정을 주로 '실세계 탐구→상황 모델 개발→수학 모델 개발→모델 적용'의 네 단계로 나누어 정의하고 있다. 이를 좀 더 구체적으로 나타내면,

첫째, 경험을 기반으로 하여 실세계 맥락을 탐구하는 과정, 둘째, 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적인 상황 모델을 개발하는 과정, 셋째, 상황모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학 모델을 개발하는 과정, 넷째, 수학 모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석, 수정, 정교화 하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 과정[15]이라고 볼 수 있다. Kaiser와 Sriraman은 '모델링에 대한 동질의 이해와 그의 인식론적인 배경은 국제적인 공동체내에 존재하지 않는다. 그렇지만 수학적 모델링의 교수와 학습에 관한 세계적인 공통성을 찾을 수 있다' 고 말한다([34], 재인용). 무엇보다, 수학적 모델링 활동이 수학교육에서 중요한 측면을 차지하며, 학생들이 수학적 과제에 어떻게 접근하는지와 그들의 아이디어를 어떻게 발달시키는지 이해하는 길을 제공하기 때문에 중요한 것이다.

2.3 수학적 모델링 문제

앞에서 언급한 수학적 모델링을 하기 위해서는 현실을 반영한 문제를 필요로 한다. 수학적 모델링을 할 수 있는 문제를 예로 들면 다음과 같다.

목공 문제[40]

- John은 지하실에 방을 새로 만들고 있다. 먼저 벽을 만들고 마룻바닥을 놓은 후, 벽을 따라 걸레받이를 만들기로 했다. 방의 크기는 가로 21피트, 세로 28피트였다. 걸레받이는 10피트짜리와 16피트짜리가 있다. 각각의 걸레받이를 얼 만큼 사야 하는가?
- 이음매를 가능한 한 적게 하려면, 걸레받이를 각각 몇 개나 사야할까?
- 자투리를 가능한 한 적게 하려면, 걸레받이를 각각 몇 개나 사야할까?
- 16피트짜리는 1푸트당 1.25이고, 10피트짜리는1푸트당1.10 일 때, 돈을 가능한 한 적게 들이려면, 걸레받이를 각각 몇 개나 사야할까?
- 16피트짜리가 현재 세일 판매되어 1푸트당 0.85$인데 비하여 10피트짜리는 여전히 1.10$라고 하자. 돈을 가능한 한 적게 들이려면, 걸레받이를 각각 몇 개나 사야할까?

이 문제를 제시한 Zawojewski와 Lesh는 중학교 1학년 학생 3명을 대상으로 소그룹 활동을 통하여 해결하도록 하였다. 그들이 제시한 의도는 비록 학생들로 하여금 모델이나 마지막 결과로서 다른 개념적 도구를 도출하도록 요구하지 않았지만 문제해결을 시도하는 과정에서 학생들이 분명한 사고 방법을 찾으면서 모델을 도출하는 경향이 나타나도록 하였다. 또한, 비록 문제가 정확한 답을 요구하는 방식으로 진술되었지만, 그렇게 답을 찾는 것만 탐구하도록 한 것은 아니었다. 대신, 답을 구하는 많은 과정을 검토하고 평가하기 위하여 문제 상황을 이해하는 것을 탐구하도록 하는 것이다.

O’ Hare 문제[40]

구두 형태로 제기: 여기서(시카고의 북쪽 지방) O’ Hare Airport로 가는 최선의 방법은 무엇인가? 주의 : 목표가 문제 공식, 정보 해석, 일상적인 해결 평가가 포함된 과정을 학생들이 조사하도록 하는 것이기 때문에, 이 문제에서 “최선”이라는 용어는 정의되지 않았다. 지도를 사용할 수 있지만 “최선”이 가장 짧은 것, 빠른 것, 안전한 것, 간단한 것, 혼란이 적을 수 있는 것, 가장 편리한 것, 비용이 적게 드는 것 아니면 그 외 다른 가능성에 대한 것인지 의미하는 것을 알아낼 수 있는 다른 제안은 없다. 또한 자동차가 유용한지 버스, 택시, 리무진, 기차가 필요한 것인지에 대한 제안도 없다. 그러나 이러한 종류의 정보는 학생들이 그것을 요구하는 바에 달려 있다.

이 문제 역시 Zawojewski와 Lesh가 제시한 문항으로 중학교 1학년 학생 3명을 대상으로 소그룹 활동을 통하여 해결하도록 하였다. 이 문항을 제시한 의도는 소그룹이 수학적 모델을 만들어서 이 모델의 모든 세밀한 부분과 관계들에 대해 지속적으로 고려하도록 하는 것이다. 수학적 모델이 개념적인 재구조화와 단순화에 도달하면, 실제 모델의 불일치나 모델과의 내부적 불일치가 찾아지면, 수학적 모델은 개선하게 된다. 그리하여, 이 문제의 목적에 부합하는 모델을 찾을 때까지 계속하게 된다. 즉 이 수학적 모델링 문제는 수학적 모델을 만들고, 이 수학적 모델을 정교화 시키는데 목적이 있다.

3 수학화

이 장에서는 Freudenthal의 수학화에 대해서 살펴보고, 앞에서 살펴본 수학적 모델링과 수학화를 비교하여 살펴본다.

3.1 수학화

Freudenthal[23]은 수학을 인간의 정신적 활동이라고 할 때, 수학적 활동의 본질적인 특징을 수학화 활동이라고 보았다. 수학화는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며 수학화 과정은 이러한 현상과 본질이 교대로 작용에 의해 수준상승이 이루어지는 불연속적인 과정이다. 이 때 현상이란 수학이 현실을 매체로 확장되어 간다고 할 때, 현실적인 경험일 수도 있고 수학적인 경험일 수도 있다. 수학화란 수학자들이 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 경험을 체계화시켜 나가는 것을 의미한다. 또한, 수학화는 수학자의 필요와 선호도에 따라 실제적인 것이 정돈되는 가정을 설명하는 것이다. 수학화는 다양한 영향을 받으며 현실을 변화시키고, 확장하고, 심층적으로 되는 한에서 계속되는 과정이다[24].

수학화 과정은 현실을 수학화하는 것을 출발점으로 해서 수학 자체의 수학화로 이어지며, 처음에는 국소적으로 나중에는 전반적으로 진행된다. 따라서 수학화 활동은 수학적 내용과 표현이든, 일상용어로 표현된 소박하고 직관적인 현실적 체험이든 간에 모든 수학적인 조직화 활동을 의미한다. 자신의 경험과 행동을 하나의 패러다임으로 만들고 추상화를 통해 법칙으로 일반화하고, 현실에 적합한 도식을 창조해 내는 것이 인간의 오래된 습성이며, 이런 도식화 과정은 수학화의 일반적인 모습이다. 기본적인 수학화 활동으로 규칙과 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화, 단축화와 점진적 도식화, 공리화, 형식화, 알고리즘화, 국소적 조직화 등이 있다[14]. Treffers[39]는 수학화를 수평적 수학화와 수직적 수학화가 서로 교대로 일어나는 과정으로 보았다. 수평적 수학화는 현실 내의 문제 장면을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 것을 의미하고, 수직적 수학화는 정교화된 좀 더 높은 수준의 수학적 처리가 가능하도록 하는 것을 의미한다. Freudenthal[24]은 이에 대해 전자는 현실적인 것으로 체험된 세계에서 좀 더 추상화된 기호의 세계로 이행되는 것, 후자는 추상화된 기호의 세계에서 기호들이 계속 형성되고 이해되고 반성되는 것으로 구분한다.

Freudenthal[24]은 수학 학습-지도 원리로 안내된 재발명의 원리, 교수학적 현상학, 학습 수준 이론, 풍부한 맥락을 제시한다. 이에 관한 설명은 다른 연구([14, 18])에서도 많이 언급되고 있으므로 여기서는 생략하기로 하고, 모델링과 많이 연결되는 맥락을 중심으로 살펴보고자 한다. 맥락이란 어떤 구체적인 수업 과정에서 학생들에게 열려 있는 수학화가 되어야 하는 현실의 영역을 의미한다. 풍부한 맥락이라고 말하는 것은 문맥이 교수학적으로도 그리고 학생들에게도 의미가 풍부해야 한다는 것을 강조하는 것이다. 이는 수학이 여러 맥락 내에서 지도되어야 하며 아무리 추상적인 수학이라 하더라도 현실적이고 구체적인 문맥에서 시작되어야 함을 의미한다. 이 때, ‘현실적’ 또는 ‘구체적’이라는 용어는 ‘아동들이 그 상황을 상상하고, 자신의 아이디어, 경험, 환상을 구현할 수 있다’는 의미이다[14]. 맥락은 학습자가 수학화할 현실의 영역으로서 효과가 있는 것이어야 하는 것이다. 현실과 관련된 맥락을 제공하는 대표적인 방법으로 그림동산, 이야기, 프로젝트, 테마, 이야기 모음 등을 들 수 있다[24]. 이 풍부한 맥락 문제들은 특별한 형태, 내용, 기능을 갖는다. 첫 번째, 수업 과정의 초기 단계에서 학생들에게 수학에 대한 자연스러운 동기를 부여함으로써 의미 있는 개념 형성을 가능하게 한다. 두 번째, 사고를 위한 중요한 뒷받침을 할 수 있는 여러 가지 자료나 시각적인 모델과 더불어 형식적 연산, 기호법, 규칙 등을 학습하기 위한 확고한 기반을 제공함으로써 모델 형성 기능을 갖는다. 세 번째, 문맥 문제는 현실이 수학의 근원이자 응용 영역의 원천임을 드러낸다. 네 번째, 응용 상황에서 특수한 산술 능력을 연습할 기회를 제공한다[39]. Treffers[39]는 이러한 맥락문제가 문장제처럼 계산 위주의 산술 문제로 표현될 수도 있고 게임, 희

곡, 모델, 그래프 및 그러한 정보들의 결합으로 제시될 수도 있다고 말한다. 이렇게 맥락이 풍부하게 들어 있는 문제가 수학화를 할 때, 많은 수학적 경험을 가능하게 할 수 있다고 보는 것이다.

맥락은 수업 초기 단계에서도 중요하지만 전반적인 수업 과정에서 다루어져야 하며, 그 단계는 다음과 같다(그림 8참조). 첫 번째 단계는 현실 세계의 맥락 문제를 수학화하려는 관점을 가지고 직관적으로 탐구하는 단계이다. 이것은 문제의 수학적 측면들을 알아내고, 규칙성 등을 발견하는 것을 의미한다. 강한 직관적 특성을 갖는 초기의 탐구는 수학적 개념의 발견 또는 재발명으로 인도되어야 한다. 두 번째 단계는 학생들 간의 상호 작용, 학생들과 교사의 상호작용 그리고 학생들의 형식화, 추상화 능력과 같은 요인들에 의존해서, 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 단계이다. 여기서 수학화 과정에 대한 반성이 필수적이다. 세 번째 단계는 형식화와 추상화의 단계로서, 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다. 네 번째 단계는 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 단계이다[19]. 이와 같은 단계를 거쳐 해결된 문제는 현실주의 수학교육의 맥락에서 수학화가 이루어지는 것이므로, 현실 세계에 대한 학생들의 관점에 영향을 미치게 된다.

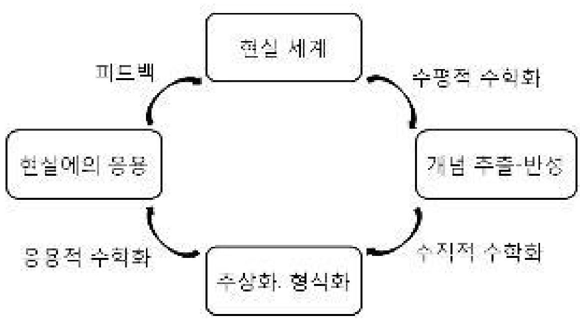

그림 8: 수학화 과정[18]

3.2 수학화과 수학적 모델링 비교

Freudenthal의 수학화는 수학적 모델링 과정과 밀접한 관련이 있다[15]. 신은주와 권오남[8]은 수학적 모델링을 수학화와 동일시한 Freudenthal의 관점을 수용하여, '수학화는 인간의 창조적 활동의 하나로서 간주할 수 있는 것으로 실제적인 상황에서 직관 모델을 만들고, 직관모델의 탐구에서 수학적 모델을 만들어 내고, 추상화와 형식화를 통해서 수학적 해를 구하고, 구해진 해를 원래 상황에서 반성해보는 피드백 과정을 거치는 수학적 모델링 학습을 의미한다.' 고 주장한다. 뿐만 아니라 해석, 분석, 종합과 같은 고차적인 인지 활동을 이용하는 체계적인 과정이라는 점이 문제 해결 활동과의 유사성을

뒷받침한다. 다만 수학적 모델링은 반드시 그 출발을 실세계의 일상적인 현상과 같이 문맥상 수학적이지 않은 듯해 보이는 현상에서 시작한다는 특성을 띤다. 이러한 의미에서는 수학적 모델링을 Freudenthal의 수평적 수학화 및 풍부한 맥락에서의 출발이라는 수학 학습 원리와 관련지어 생각할 수 있다[13]. Mousoulides, Sriraman, Christou[34]는 '비록 모델링 문제가 자연을 맥락화하고, 진정한 문제는 맥락 속에서 자연을 명확히 하는 것임에도 불구하고, 사용된 맥락의 근원과 역할을 명료하게 언급하는 것이 중요하다는 것이다. 모델링이 문제를 형성하고, 수학을 발달시키는데 맥락을 요구하기 때문에, 맥락의 역할은 수학적 모델링에서 매우 중요하다.' 고 주장한다. 이들이 모델링 입장에서 맥락을 말하는 것이라면 Freudenthal은 다음과 같이 모델과 모델링을 말한다[24].

> 나는 단지 구체성을 위해서만 '모델' 이라는 용어를 언급했는데, 이것은 우리가 출발했던 그 용어와는 실제로는 반대이다. 사실 지금의 맥락에서 우리는 기초적인 연구에서 낭비스럽게 사용되는 공리적 체계의 모델에 관심이 있는 것이 아니라 이상화라는 의미에서의 모델링에 더 관심이 있다.

Freudenthal은 수학화 학습지도 원리의 한 측면인 맥락에서 모델링을 생각했다.

> 나는 모델링을 이상화와 단순화로 다소 모호하게 정의했는데, 그것의 핵심은 다음과 같다. 모델링은 내가 이전에 풍부한 맥락이라고 불렀던 것에서 그리고 일이 진행됨에 따라 더욱 풍부한 맥락 내에서 정적인 혹은 동적인 상황의 본질을 이해하고 모델링에 초점을 맞추는 것이다[24].

이러한 두 관점은 수학적 모델링에서 수학화의 맥락을 보느냐, 수학화의 맥락에서 수학적 모델링을 보느냐의 차이를 말하지만, 결론적으로는 수학적 모델링과 수학화 중 어느 하나를 하더라고 나머지 다른 부분과 연결되어 있고 서로 필요한 부분이라는 것을 말하는 것이라고 할 수 있다.

3.3 수학화 문제

Freudenthal이 제시한 다음의 수학화 문제들을 살펴보고, 앞의 수학적 모델링 문제와 비교하여 보았다.

수직선의 중점

- 수직선에서 16과 72의 중점을 찾아라[24].

이 문제는 Freudenthal이 $\frac{a+b}{2}$의 공식을 모르는 초등학생을 대상으로 만든 것이다. 그리하여 문제의 의도는 주어진 문제에서 $\frac{a+b}{2}$의 공식을 이끌어내도록 하는 것이다. 그

는 그 두수를 옮기는 과정이 중점을 그대로 유지시킨다는 암시를 주었다. 그래서 아동은 수직선에서 작은 수를 0에 옮기고 큰 수는 $a+b$에 옮기는 것으로 중점에 대한 일반적인 표현을 얻어냈다. 그리하여 점진적인 도식화를 거쳐 점차 발전시킨다. 그래서 주어진 두 수를 더한 후에 2로 나눈다는 표현이 주어진 두 수의 합의 반이라는 대수적 관용구를 거쳐 재형성되고 마침내 $\frac{a+b}{2}$라는 대수적인 식을 만들게 된다.

시계바늘

- 언제 시계의 두 바늘이 서로 겹치는가?[24]

이 문제는 Freudenthal이 고학년을 대상으로 만든 것이다. 그는 무한급수, 기초 대수, 선형 그래프 등을 이용하여 답을 구하여 끝내는 것이 아니라, 답을 구하여 구조 자체를 만들어낼 수 있다고 보았다. Freudenthal이 제시한 해답은 짧은 바늘이 한 바퀴 완전히 도는 동안에 긴 바늘은 12번 돌고, 따라서 12시간 내에 같은 간격으로 짧은 바늘을 11번 추월한다는 내용으로, 이 문제는 몇 개의 천문학적 현상을 설명하기 위해 다른 것보다 응용되는 범위가 넓은 구조라고 설명하고 있다.

이 두 문항을 수학적 모델링과 비교해 보았을 때, 수학화의 문제는 수학적 모델링 문제에 비해 상황이 제시되어 있지 않다. 물론 수학화도 현실에서 출발하는 수평적 수학화가 존재하여 풍부한 맥락을 강조하지만, Freudenthal이 제시한 문제들은 주로 한 문장내지 두 문장 정도로 간단하게 구성되어 있다.

4 문제해결

이 장에서는 Polya의 문제해결 과정에 대해서 살펴보고 앞에서 살펴본 수학적 모델링과 비교하여 살펴본다. 먼저, 문제해결에 대해서 살펴보자.

4.1 문제와 문제해결

문제해결에 대해 살펴보기 전에 그 대상이 되는 문제에 대해 살펴보았다. 일반적으로 수학문제는 단순한 단답형을 생각하기 쉬우나, 여기서 말하는 문제는 해결 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 것보다 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제해결을 위해서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 것을 말한다[18]. 또한 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않는 것을 말한다. Polya[36]는 분명하게 인식된, 즉각적으로 얻을 수 없는 목표를 얻는데 필요한 어떤 행동을 의식적으로 조사할 때 문제를 가졌다고 보았다.

Polya는 유클리드 원론에서 명제를 두 가지 유형으로 구별하였다. 첫 번째 유형은

라틴어로 Problema인데 그 목적은 도형을 작도하는 것이고, 두 번째 유형은 라틴어로 theorema인데 목적은 정리를 증명하는 것이다. 이 구분을 확장해서 두 가지 유형의 문제 즉, 답을 구하는 문제와 증명하는 문제를 고려해야한다. 답을 구하는 문제의 목적은 문제에서 알려지지 않은 어떤 대상을 찾기 위해 작도하거나 구하거나 얻거나 확인하는 것이다. 증명하는 문제의 목적은 어떤 주장이 참인지 거짓인지를 결정하는 것, 곧 증명하거나 반증하는 것이다[12]. 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽[18]은 다른 기준으로 문제를 구분하였는데 수학 외적 소재를 수반하는 문제와 수학 내적 소재를 수반하는 문제이다. 수학 내적 소재라 함은 주로 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 것을 말하며, 일상생활 및 타 교과와 연계되어 있다고 하더라도 수학 교과에서 주로 접할 수 있거나 수학학습에 초점을 두어 판단된 경우로 간주할 수 있다. 외적 소재라 함은 '일상생활과 밀접한 관련이 있는 소재' 또는 타 교과와 관련성의 파악이 요구되는 통합교과적인 소재를 사용한 것을 말한다. 결국 실생활에서 해결하여야 하는 문제나 문제해결에 필요한 지식이 단지 수학 교과에만 국한된 것이 아니라 다른 교과의 지식을 필요로 하는 경우가 이에 해당한다. 여기서 외적 문제 상황을 광의에 의미로 해석한다면, 수학적 모델링 문제의 범주는 오히려 문제해결의 외적 문제의 것에 포함된다.

Polya는 문제의 특징은 다음과 같이 제시한다. 첫째, 모든 문제에는 미지의 것이 있어야 한다. 둘째, 모든 문제에는 알려진 것이나 주어진 것이 있어야 한다. 셋째, 모든 문제에는 미지의 것이 자료에 어떻게 연결되는지 정해주는 조건이 있어야 한다[12]. 문제의 중요한 특징의 하나는 그 문제가 허용하는 해답의 개수이다. Polya가 가장 재미있어하는 문제는 단 하나의 해답을 허용하는 문제이다. Polya는 유일하게 결정된 해답을 갖고 있는 문제를 유일한 합리적인 문제라고 생각하기 때문이다[11].

이제 문제해결에 대해 살펴보자. 문제해결은 광의의 의미로 하나 이상의 답을 구하고 좀 더 일반적인 해법을 찾기 위해 문제를 확장하거나 분해하는 것과 같이 열린 방식으로 문제를 탐구하는 것이다[4]. Polya는 문제해결을 위한 네 단계를 제시한다[11]. 첫째, 문제에 대한 이해, 둘째, 계획의 작성, 셋째, 계획의 실행, 넷째, 반성이다. 여러 학자들은 Polya의 문제해결 과정을 수정, 보완하여 제시하고 있다. 예를 들어, Schoenfeld는 Polya의 문제해결 네 단계에 탐구의 단계를 추가하여 분석 및 이해→계획→어려운 문제에 대한 탐구→실행→검증이라는 문제해결 모델을 제시하였다. 한편, Burton은 도입(문제를 이해하라)→공략(문제를 푼다)→검토(풀이를 검토한다)→확장(문제를 일반화한다)이라는 문제해결 과정을 제시하였는데, 이는 Polya의 문제해결 네 단계 중 반성의 단계를 중시한 것이라고 할 수 있다[18]. 이 외에도 많은 학자들이 문제해결의 여러 단계를 제시하였지만, 주로 Polya가 반성을 강조한 것처럼 반성 단계에 초점을 두었다.

Polya의 문제해결에 관한 연구([1, 11, 12, 19])가 많이 이루어져 있으므로 본 연구에서는 문제해결과 수학적 모델링을 비교하는데 초점을 두기로 한다.

4.2 문제해결과 수학적 모델링 비교

전통적으로, 수학 교육에서 문제해결은 경로가 명확하지 않을 때 주어진 것에서 목표를 찾아가는 것으로 정의되었다. 그러나 수학적 모델과 수학적 모델링(mathematical Models and mathematical Modeling: M&M) 관점에 따르면, 문제해결자가 상황ㅡ주어진 것, 목표, 가능한 해결 과정ㅡ에 대해 사고한 것을 좀 더 생산적인 방법으로 발달시키는 것이 필요할 때 목표에 도달하기 위한 직접적인 활동이 문제가 되는 것이다[32]. 신은주와 이종희[9]의 경우, 문제해결은 '문제에 제시된' 기호적으로 서술된 상황의 의미를 이해하여 문제의 해를 구하게 되는 반면, 모델링 과정에서는 '유의미한 상황에서' 기호적인 서술을 하게 되므로 강조되는 능력이 다르다고 하였다. 또, 문제해결은 주어진 과제에서 목표를 성취하기 위해 적절한 전략을 찾아서 하나의 고정된 해석과 절차를 사용하여 하나의 단정적인 답에 이르게 되는 것이 일반적인데 반해, 수학적 모델링은 단정적인 답이 아니라 상황을 이해하기 위한 모델을 만드는 것이 필요하게 되므로 다양한 모델을 만들고 수정하면서 조작하게 되고 조건과 목표에 대해 해석하고 조직해 나가는 시행착오 과정을 거치게 된다고 하였다.

Schoenfeld[37]는 수학 문제 해결에 관한 연구를 개관하면서, 문제 해결이라는 용어가 '수년 동안 다양하고도 때로는 모순되는 의미를 지녀왔다.'고 지적하였다. 문제의 정의는 오늘날 학교수학에서 받아들여지고 있는 정보처리 모델에 기초한 정의의 초기에는 부적절한 것에서 출발하여 점차 세련/변형/확장시키는 개념적 모델을 만든다는 Lesh의 정의까지 다양하다[28]. 이 두 관점의 차이는 다음과 같다. 첫 번째 관점은 잘 정의된 조건으로부터 잘 정의된 목표를 연결하는 강력한 절차를 찾는 반면에, Lesh의 모델-도출 관점은 주어진 것과 목표의 해석을 주된 과제로 보며, 절차를 선택하고 응용하는 것이 문제 해결의 해석적 측면으로 통합되는 주기적인 과정으로 이루어진다. 문제해결에서 해를 얻는 방법(그림 9 참고)은 주어진 것과 목표 사이의 하나의 간단하고 강력한 절차와 이 절차에서 어떤 어려운 점을 극복하기 위한 전략들을 찾는 것이라고 제안한다. 그 대신에, 모델링 방법(그림 10 참고)은 해를 찾기 위해서 주어진 것과 목표 사이의 수많은 시험적인 절차를 가리킨다. 이것은 무수한 재귀적인 주기를 포함한다. 학생들은 주어진 것과 목표 사이를 왔다 갔다 하고, 목표를 위해 가설을 시험하고, 결과를 개선하고, 해를 향상시키기 위해서 되돌아보거나 반복해서 활동한다([29, 30]).

하지만 많은 학자들의 연구([29, 30, 34])는 문제해결 활동으로서 수학적 모델링을 다룬다. 김선희와 김기연[3]도 전통적인 관점에서 문제해결이 주어진 조건으로부터 강력

그림9: 문제해결의 절차[40]

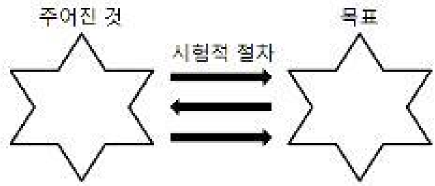

그림10: 수학적 모델링의 절차[40]

한 수단이 되는 해결전략을 가지고 목표에 도달하는 과정으로 인위적이고 비실제적인 방법으로 제한된 사실과 규칙을 이용하여 질문에 답하는 것이지만, 모델링 관점에서 문제해결은 조건, 목표, 가능한 해의 경로, 사물에 내재된 패턴과 규칙을 해석하는 유용한 방법을 발전시키는 것과 관련되며, 해를 구하기 위해 서술, 설명, 예측이 점차 세련화되고 정교해지는 여러 과정이 포함된다고 말한다. 이는 수학적 모델링과 문제해결의 차별화를 나타냄과 동시에 한편으로는 수학적 모델링을 문제해결에 귀속시키는 것으로도 보인다. 주미경[16]도 모델링이란 단지 존재하는 현상 전체의 단순화된 상을 찾는 것이라기보다는 현상의 일부분의 조작 가능한 상을 찾는 것이라고 하며, 수학적 모델링 역시 문제해결의 관점에서 재조명하여 문제 해결자의 지식, 의도, 그리고 흥미에 근거하여 현상의 단편을 구조화하고 창조하는 것이라고 하였다. 사실, 수학적 모델링을 통하여 학습자들이 취할 수 있는 가장 큰 특징이자 장점 중 하나는 수학적 문제해결력 향상에 있다고 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 본다면, 수학적 모델링은 중요한 문제해결로 간주될 수 있으며, 또한 수학적 모델링의 왕성한, 풍부한 활동 결과는 문제해결력 향상을 신장시키는 결과를 가져올 것으로 예측하여도 별 무리가 없어 보인다[17]. 즉, 수학적 구조를 고안하는 과정으로서의 수학적 모델링은 일종의 문제해결로 해석될 수 있는 것은 이 두 활동의 유사성 때문일 것이다. 그 유사성을 살펴보면 다음과 같다[13]. 첫째, 현상에 내재한 문제 상황의 규명 및 문제에 영향을 미치는 중요한 요인들 구별한다. 둘째, 현상에 대한 모델을 얻기 위해 그 관계들을 수학적으로 해석한다. 셋째, 모델에 적절한 수학적 분석 적용한다. 넷째, 결과를 얻고 연구 중인 현상의 맥락에서 그것을 재해석하며 결론 유도하는 것으로 볼 수 있다.

하지만, 수학적 모델링과 문제해결의 차이점도 있다. 이 차이점은 수학적 모델링에서 보다 근원적인 일상으로부터 착수되어 해결 가능한 적절한 문제 상황으로 단순화되어야 하며, 이 후 수학화 내지 형식화, 또는 수학적 모델이 개발된 후 일상의 문제해결에서 보다 더욱 더 신중하고, 깊이 있는 해석, 통찰, 판단력 등의 사고 과정이 요구한다는 것이다. Swetz와 Hartzler[38]는 수학적 모델링은 문제해결의 한 유형으로 수학적 모델링이 문제해결과 공통적 특징을 가지고 있지만, 분명한 차이점이 있으며 이는 수학적 모델링 상황에서는 수학적이지 않은 현상이 존재하여 이것이 반드시 모델화 되어야 한다는

점을 강조하고 있다.

수학적 모델링 과정과 문제해결 과정을 비교해서 살펴보면, 몇몇 학자들([29, 30])은 문제해결 활동으로서 수학적 모델링의 절차로 정의하였다. 이들은 문제해결의 4단계에 맞추어 비교할 수 있게 수학적 모델링 4단계를 제시하고 있다. 1단계는 문제를 이해하고 단순화하기로, 문장, 도형, 공식, 표의 정보를 이해하고 그것들에서 추정되는 것들을 그리는 것을 포함한다. 관련된 개념을 이해하고 학생들의 배경지식에서 주어진 정보를 이해하는 데까지 정보를 사용하는 것을 포함한다. 2단계는 문제를 조작하고 수학적 모델을 발달시키기로, 이 과정은 문제에서 변수와 그들의 관계를 확인하는 것을 포함한다. 변수 관련성에 대해 의사 결정하기, 가설 구성하기, 맥락적 정보를 검색하고 조직하고 고려하고 비평적으로 평가하기, 발달된 모델을 수학적으로 서술하기 위해서 전략과 발견술을 사용하기를 포함한다. 3단계는 문제의 해를 해석하기로, 의사 결정하기, 체계를 분석하거나 어떤 목표에 도달하기 위해 체계를 설계하기, 기능 부진을 분석하고 해를 제안하기를 포함한다. 4단계는 문제의 해를 증명하고, 타당화하고, 반성하기로, 이 단계는 문제의 해에 관한 표현의 다른 모드를 구성하고 적용하기, 해를 일반화하고 의사소통하기, 해를 재구성하기 위해 시도할 때 다른 관점에서 해를 평가하고 좀 더 사회적으로 기술적으로 적용할 수 있는지 시행하기, 일반적인 모델에 대한 질문과 해를 비판적으로 확인하고 반성하기를 포함한다.

여기서 수학적 모델링에서 요구되는 과정은 수학적 지식을 활용하여 적절한 해결 방법을 찾고 주어진 문제에 합당한 해를 구하기 위하여 문제해결자의 통찰, 해석, 반성을 강조한다. 그러나, 문제해결에서도 적절한 해결 전략의 선택과 활용, 적절한 수학적 지식의 선택과 활용, 문제해결 과정을 강조하고, '반성' 단계에서 결과와 풀이 과정의 신중한 검토, 다양한 방법의 모색, 우아한 해법의 추구, 다른 문제에로의 일반화 등이 요구되고 있다. 수학적 모델링과 문제해결 과정을 비교 정리해 본 결과, 수학적 모델링에서 실세계 현상을 탐구하여 사전 모델 형성을 이루는 모델 도출 과정은 문제해결에서의 문제 이해 단계에 해당하고, 수학적 모델링에서 수학 모델 구축 및 이의 적용을 통한 수학적 결과의 획득은 문제해결에서 각각 계획 작성 및 실행 단계에 해당한다고 할 수 있다. 또한 수학적 모델링에서 수학적 결과로부터 적절한 해석을 통해 본래의 현상에 부합한 수학적 결론 및 새로운 현상으로의 적용은 문제해결에서 반성 단계에 해당하는 것으로 간주할 수 있을 것이다[17]. 그래서 한편으로 수학적 모델링과 문제해결이 동일한 것처럼 보인다. 하지만 다른 한편으로 문제해결을 잘하기 위한 강력한 선택사항이 수학적 모델링이라고 볼 수 있다. 이러한 접근법에 적합한 대안은 어떤 주어진 수학적 개념이나 절차에 대한 이해를 발달시키기 위해서 없어서는 안 될 문제해결로 다루어지는 것이다. 수학적 모델링이 그러한 방법이다. 또한, 모델링 문제는 복잡한 훈련을 하게하고, 그러

한 능력을 발달시키기 위해서 이상적인 길을 제공한다. 이러한 문제들은 최소한 계산하고, 절차를 실행하고, 연역적으로 추론하는 것을 포함하는 것뿐만 아니라 호소력 있고 진정한 문제해결 상황의 시뮬레이션을 포함하고, 상황을 만들고 해석하는 것을 포함하는 수학적 사고를 학생들이 하게 한다[22].

수학적 모델링의 의미와 가치를 강조하기 위하여, 기존의 문제해결의 의미와 중요성이 과소평가 되어서는 안 될 것이다. 수학적 모델링의 강조를 위해 문제해결과 차별화하기 보다 학교수학에서 다양한 해결 방법을 통한 열린 반응의 문제해결이 점차 강조되고 있음을 인식하며 이를 위한 최상의 대안이 수학적 모델링을 통한 것임을 인식하고, 이를 적극 반영하여 실천해야 할 것이다[17].

4.3 문제해결 문제

Polya가 제시한 다음의 문제들을 살펴보고, 앞의 수학적 모델링 문제, 수학화 문제와 비교하여 보았다. 먼저, Polya가 일반적으로 제시한 문제들은 중고등학교 이상의 예비적인 지식을 요구하지 않는다. 그렇다고 너무 쉽거나 단순히 기계적인 문제에 불과한 것도 아니며, 어떤 문제는 독창성과 재능을 요구한다. 그리고 각 문제마다 힌트와 풀이를 제시하고 있다.

곰의 색깔[11]

곰 한 마리가 P지점으로부터 출발하여 정남으로 1마일을 걸어갔다. 그러고 나서 방향을 바꾸어 정동으로 1마일을 걸어갔다. 그러고 나서 다시 왼쪽으로 돌아 정북으로 1마일을 걸어 그가 출발한 P지점에 정확히 도착하였다. 그 곰의 색깔은 무엇이었나?

그가 제시한 힌트는 발문이라고 볼 수 있다. 특히, 문제의 이해와 계획 수립단계에 해당하는 발문들이다. 다음은 Polya가 제시한 이 문제에 해당하는 힌트이다.

- ‘미지의 것은 무엇인가?’ — 곰의 색깔 : 그러나 어떻게 수학적 자료로부터 곰의 색깔을 찾아낼 수 있을까?
- ‘무엇이 주어져 있는가?’ — 기하학적 상황 : 그러나 그것은 모순된 것처럼 보인다. 어떻게 곰이 기술된 대로 3마일을 걸은 후 출발지점으로 돌아올 수 있을까?

그가 제시한 풀이는 다음과 같다.

여러분은 그 곰이 흰색이고, P지점이 북극이라는 생각을 하였는가? 여러분은 이것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가? 다소 이해가 되었으므로 문제를 이상화해 보자. 지구를 정

확한 구 모양으로, 곰을 움직이는 질점으로 생각해 보자. 이 점은 정남 혹은 정북으로 움직이면서 날줄의 호를 그리고, 정동으로 움직일 때에는 적도에 평행한 씨줄의 원호를 그린다. 여기서 다음 두 가지 경우를 구별하지 않으면 안 된다.

1) 만일 그 곰이 P지점을 떠날 때 따라간 날줄과 다른 날줄을 따라 P지점에 되돌아온다면 P는 필연적으로 북극이다. 실제로 두 날줄이 만나는 지구상의 또 다른 점은 남극뿐이다. 그러나 그 곰은 북극으로 움직여야만 이 극점을 떠날 수 있는 것이다.
2) 그 곰이 정동으로 1마일을 걸어서 씨줄의 원을 정확히 번(여기서 은 1, 2, 3, $\cdots$ 일 수 있다.) 그린다면 P지점을 떠날 때 따라간 그 날줄을 따라 P지점에 돌아올 수 있을 것이다. 이 경우에 P는 북극이 아니라 남극에 매우 가까운 씨줄 위의 한 점이다. 그 씨줄의 둘레는 마일로 나타내면 $\frac{2\pi+1}{n}$ 보다 약간 작다.

보브의 주머니[11]

보브는 주머니 10개와 은화 44달러를 가지고 있다. 그는 각 주머니마다 개수를 달리하여 은화를 나누어 넣기를 원한다. 그렇게 할 수 있는가?

그가 제시한 힌트는 보브가 돈을 아주 많이 가지고 있으면 자기 주머니를 각기 다르게 채우는데 어려움을 없을 것임이 분명하다고 제시한다. 그리하여, 다음의 발문을 제시한다.

- ‘문제를 달리 진술할 수 있을까?’ - 어느 두 주머니에도 같은 액수가 들어가지 않도록 주머니 10개를 채울 수 있는 금액은 최소 몇 달러인가?

그리하여 그는 다음과 같은 풀이를 제시한다.

주머니에 넣을 수 있는 은화의 수 가운데 가장 작은 것은 분명히 0이다. 그 다음 큰 수는 적어도 1이고 그 다음 큰 수는 적어도 2이며, $\cdots$, 그리고 마지막(10번째) 주머니에 넣을 수 는 적어도 9이다 따라서 필요한 은화의 수는 적어도

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

보브는 그렇게 할 수 없다. 그는 44달러만 가지고 있기 때문이다.

Polya는 이러한 문제 외에도 우리가 많이 알고 있는 다음과 같은 문제들이 있다.

◎ 다음 연립방정식을 만족하는 x, y, u, v를 구하여라.

$$x+7y+3v+5u=16$$

$$8x+4y+6v+2u=-16$$

$$
\begin{aligned}
2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\
5x + 3y + 7v + u &= -16
\end{aligned}
\tag{1}
$$

◎ 세 수는 산술급수를 이루고 있고 다른 세 수는 기하급수를 이루고 있다. 이 두 급수의 대응되는 항을 잇달아 더하여 85, 76, 84를 얻었다. 그리고 산술급수의 세 항을 더하여 126을 얻었다. 두 급수의 합을 구하여라.

◎ x에 관한 방정식 $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$이 산술급수를 이루는 4개의 실근을 갖도록 m을 결정하여라.

Polya의 문제는 일반적으로 우리가 교과서에서 볼 수 있는 문제는 물론이고 곰의 색깔 문제와 보브의 주머니와 같은 문제도 제시하고 있다. 곰의 색깔 문제는 상황이 제시되었다는 점에서 앞에서 설명한 수학적 모델링과 유사한 점이 있다. 하지만 수학적 모델을 만들어내지 않는다는 점에서는 차이가 있다. 보브의 주머니 문제 역시 현실을 수학화한다는 점에서 앞에서 제시한 수평적 수학화와 유사한 점이 있다.

5 논의

앞에서 수학적 모델링, 수학화, 문제해결에 대해 살펴보았다. 이 세 주제를 출발점과 도착점의 관점에서 논하고자 한다. 중간의 과정은 세 주제 모두 단계를 가지고 있고 비슷한 단계들을 가지고 있다는 점에서 유사하므로 이에 관해서는 논하지 않기로 한다.

먼저 출발점의 관점에서 살펴보면, 수학적 모델링은 항상 현실적인 상황에서 출발한다. 수학적 모델링은 4.3에서 제시한 문제처럼 간단히 x, y, u, v를 구하거나 두 급수의 합을 구하여라와 같은 문제는 제시하지 않는다. 즉, 수학적 모델링은 수학적이지 않은 상황 또는 수학적으로 보이지 않는 상황을 수학적인 것으로 바꾸는 것이라고 볼 수도 있다. 하지만, 수학화와 문제해결은 앞에서 살펴본 것처럼 현실적인 상황이나 수학적인 상황을 모두 다루고 있음을 알 수 있다.

도착점의 관점에서 보면, 수학적 모델링은 수학적 모델을 만들어 일반화 할뿐만 아니라, 이를 정교화, 세련화시키는 과정을 반복하고 있음을 알 수 있다. 수학화 과정은 주기로 표현되어있지만, 얻은 해를 정교화, 세련화시키는 측면보다는 일반화와 출발점에 대한 피드백의 의미가 강하다고 볼 수 있다. 문제해결에서는 해를 일반화시킨다는 측면에서 수학화와 유사하지만, 그 해가 주어진 문제의 답으로 적합한지 반성하는데 초점이 있다.

이 세 주제는 모두 유사해 보이지만, 약간의 차이점은 존재한다. 이를 명확히 따지는

것이 중요한 것이 아니라, 주어진 수학적 내용을 이해하는데 어떠한 방법을 사용하는 것이 가장 효과적인지 살피는 것이 중요할 것이다.

6 결론

지금까지 수학적 모델링, 수학화, 문제해결에 대해 각각 살펴보았다. 많은 학자들이 수학적 모델링과 수학화, 문제해결의 유사점과 차이점을 밝혀 두었다. 딱 한 가지로 명확하게 결론을 내리기는 힘들다는 것을 알 수 있을 것이다. 본 연구를 개괄적인 측면에서 보면, 문제해결과 수학화에 적용하여 사용할 수 있는 방법으로 수학적 모델링을 들 수 있을 것이다. 각각 살펴보면, 수학화는 수평적 수학화와 수직적 수학화, 응용적 수학화 등으로 구성되어 있는데, 여기서 수학적 모델링은 수평적 수학화와 유사한 관계가 있다. 그렇다고 수학적 모델링이 수평적 수학화와 완전히 동일한 것은 아니다. 이러한 관계를 정리하면 그림 11로 생각해볼 수 있다. 여기서 수학화와 수학적 모델링이 겹치는 부분은 수평적 수학화를 들 수 있지만 완전히 동일한 것은 아니다. 왜냐하면, 수평적 수학화와 수학적 모델링은 현실을 수학으로 옮긴다는 점에서는 같지만, 수학적 모델링은 실제적인 현실만을 생각하고, 수평적 수학화에서 실제적인 현실과 학습자가 상상할 수 있는 상황으로 현실적으로 불가능한 부분까지 포함하기 때문이다. 그리고, 문제해결에서 언급한 것처럼 수학적 모델링이 문제해결과 유사한 부분이 있으며, 수학적 모델링이 문제해결을 잘하는데 도움이 된다. 하지만, 논의에서 언급한 것처럼 수학적 모델링과 문제해결의 엄연한 차이도 존재한다. 그리하여 그림 12처럼 이 둘의 관계를 생각해 볼 수 있을 것이다.

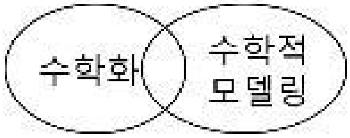

그림11: 수학화와 모델링의 관계

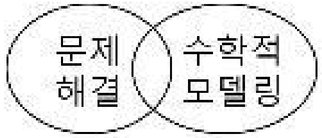

그림12: 문제해결과 수학적 모델링의 관계

본 연구에서는 수학적 모델링과 수학화, 수학적 모델링과 문제해결을 비교분석해보았다. 하지만 문제해결과 수학화의 관계를 살펴보지 못한 아쉬움이 있다. 이 둘을 살펴본 자료가 풍부히 없는 한계도 있었다. 수학교육에서 문제해결, 수학화, 수학적 모델링은 모두 중요하다. 또한, 이 세 이론의 관계를 정립하고 유기적으로 연결하여 학습자에게 수학학습을 하는데 도움이 되도록 하는 것이 중요하다. 앞으로도 이 세 이론의 관계에 관한 연구가 이루어진다면 학습자들이 수학을 학습하는데 많은 도움이 될 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 강옥기, 「수학적 모델링의 정교화 과정 연구, 수학교육학연구」, 수학교육학연구 20(2010), No.1, pp. 73–84.
2. 권기석, 박배훈, 「고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구」, 수학교육 36(1997), No.2, pp. 149–159.
3. 김선희, 김기연, 「수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석」, 학교수학 6(2004), No.3, pp. 283–299.
4. 김성준, 「학교 대수 도입과 관련된 논의」, 학교수학 4(2002), No.1, pp. 29–47.
5. 류성림, 「이산수학에서의 수학적 모델링」, 청람수학교육 11(2003), pp. 127–165.
6. 류희찬, 「수학교육에서 '모델링' 지도의 의미와 방안」, 청람수학교육 11(2003), pp. 1–19.
7. 손홍찬, 류희찬, 「수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할」, 학교수학 9(2007), No.4, pp. 467–486.
8. 신은주, 권오남, 「탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구」, 수학교육학연구 11(2001), No.1, pp. 157–177.
9. 신은주, 이종희, 「중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구」, 수학교육학연구 14(2004a), No.4, pp. 403–419.
10. 신은주, 이종희, 「모델 개발과정에서 도구를 조작하는 활동분석」, 학교수학 6(2004b), No.4, pp. 389–409.
11. 우정호 역, 『어떻게 문제를 풀 것인가?』 Polya 저, (주)천재교육, 1999.
12. 우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈 역, 『수학적 발견 I, II』, 서울: 교우사, 2005.
13. 장혜원, 「중등 수학의 대수와 함수 영역에서의 모델링」, 청람수학교육 11(2003), pp. 41–65.
14. 정영옥, 「Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구」, 서울대학교 대학원 박사학위논문, 1997.
15. 조완영, 「미적분 영역에서의 모델링」, 청람수학교육 11(2003), pp. 167–187.
16. 주미경, 「모델링 지도에 관한 고찰」, 대한수학교육학회논문집 1(1991), No.1, pp. 53–61.
17. 황혜정, 「수학적 모델링의 이해-국내 연구 결과 분석을 중심으로」, 학교수학 9(2007), No.1, pp. 65–97.
18. 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽, 『수학교육신론』, 서울: 문음사, 2007.
19. J. De Lange, & H. B. Verhage, Math A and achievement testing, in proceedings of *the 11th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (1987), Vol.3, pp. 243–248.
20. H. M. Doerr, & L. English, "A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data". *Journal of Research in Mathematics Education* 34(2003), No.2, pp. 110–136.
21. J. A. Dossey, S. McCrone, F. R. Goirdano, & M. D. Weir, *Mathematics methods and modeling for today's mathematics classroom*, CA: Brookscole, 2002.
22. L. English, & B. Sriraman, "Problem solving for the 21st century, in Sriraman, B. & English, L." (Eds.) *Theories of mathematics education*, NY: Springer, 2010, pp. 263–290.

23. H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1973.
24. H. Freudenthal, *Revisiting mathematics education*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1991.
25. T. Johnson, & R, Lesh, "A models and modeling perspective on technology-based representational media, In R. Lesh, & H. Doerr", *Beyond constructivism-models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. NJ., 2003, pp. 35–58.
26. G. Kaiser, & B. Sriraman, "A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(2006), No.2, pp. 281–292.
27. R. Lesh, K. Cramer, H. M. Doerr, T. Post, & J. S. Zawojewski, "Model development sequences, In R. Lesh, & H. Doerr", *Beyond constructivism-models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. NJ., 2003, pp. 35–58.
28. R. Lesh, & H. M. Doerr, "Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling, In P. Cobb & E. Yackel", (Eds.) *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.
29. R. Lesh, & H. M. Doerr, *Beyond constructivism-models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. NJ., 2003a.
30. R. Lesh, & H. M. Doerr, "In what ways does a models and modeling perspective move beyond constructivism? In R. Lesh, & H. Doerr", *Beyond constructivism-models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. NJ., 2003b, pp. 519–556.
31. R. Lesh, H. M. Doerr, G. Carmona, & M. Hjalmarson, "Beyond constructivism", *Mathematical thinking and learning* 5(2003), No.2, pp. 211–234.
32. R. Lesh, & L. English, "Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving", *ZDM 2005*, Vol. 37(6).
33. D. Maki, & M. Thompson, *Mathematical models and applications, with emphasis on the social, life, and management sciences*, (2nd ed.) Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973.
34. N. Mousoulides, B. Sriraman, & C. Christou, "From problem solving to modeling-the emergence of models and modeling perspectives", *Nordic Studies in Mathematics Education* 12(2007), No.1, pp. 23–47.
35. NCTM, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
36. G. Polya, *Mathematical Discovery*, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
37. A. Schoenfeld, "On mathematics as sense-making: an informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics, In J. Voss, D. Perkins, & J. Segal", (Eds.) *informal reasoning and education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum,

1991, pp. 311–343.

38. F. Swetz, & J. S. Hartzler, (Eds.) *Mathematical modeling in the secondary school curriculum*, NCTM., 1991.
39. A. Treffers, *Three dimension*, D. Reidel Publishing Company, 1987.
40. J. Zawojewski, & R. Lesh, “A models and modeling perspectives on problem solving. in R. Lesh, & H. Doerr”, *Beyond constructivism-models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2003, pp. 317–336.

김인경 청주대학교 수학교육학과
Department of Mathematics Education, Cheongju University
E-mail: inkyungkim@cju.ac.kr