韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2012. 02. 제 51권, 제 1호, 77-88.

J. KSME(Math. Edu) pISSN 1225-1380
February. 2012, Vol. 51 No. 1, 77-88.

상황모델에 기반한 학생들의 고유치와 고유벡터 개념발달

신 경 희 (아주대학교)†

I. 서 론

주어진 정방행렬 A에 대하여 행렬식 $\det(A-\lambda I)=0$은 왜 필요한가? 이 때 이 방정식의 근 λ의 의미는 무엇인가? 주어진 정방행렬에 대한 고유치를 구하고 그에 대한 고유벡터를 구하는 것은 대수적으로 어려운 일이 아니다. 하지만 많은 학생들은 자신이 구한 고유치와 고유벡터의 의미 및 그의 활용에 대하여 잘 이해하고 있지 못하다. 이는 수학의 절차적 지식을 강조하고 상대적으로 개념적 측면을 소홀히 한 결과이기도 하다. 원리를 이해하지 못하고 계산 방법에만 치우칠 때 학생들은 지식의 내면화에 이르지 못하게 된다.

학습자에게 수학적 개념 발생의 심리적 동기는 수학 내용만큼 중요하다. 구체적인 과정과 예시가 생략되고 정리가 응용에 선행되는 논리-연역적 전개 방법은 학습자에게 개념의 진정한 이해와 발생을 기대하기 어렵다. 필요에 따른 발생적 방법에 기반을 두고 정당한 추론과 직관적인 요소를 결합함으로써 자연스러운 절차를 유도해야 한다. 교사의 주요 임무 중의 하나는 학생들이 다루는 개념에 대하여 의미를 만들도록 돕는 것이다. Thom(1973)은 '수학에서의 의미는 구성적인 활동의 산물이다.'라고 표현하였고 Presmeg(2002)는 개념을 만드는 당사자는 교사가 아니라 학습자이다.'고 하면서 안과 밖에서 교감하는 경험을 통하여 의미를 구성하는 것은 그 개념을 학습하고자하는 학생이며 학생들의 활동을 지원할 교사의 의무를 강조하고 있다.

* 접수일(2012년 1월 12일), 수정일(2012년 2월 6일), 게재확정일(2012년 2월 20일)
* ZDM분류 : C35
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 고유치, 고유벡터, 상황모델, 모델도출, 소그룹 토론 학습
† 교신저자 : shinmat@ajou.ac.kr

Howson(2005)은 학교수학과 수학적 개념의 의미(meaning)를 연결하면서, 수학자들이 공통된 의미를 공유하지 않고 엄밀성만을 추구한다면 형식적 체계로서의 정의와 그의 응용만으로 충분할 수 있지만 수학적 개념이 갖고 있는 의미전달을 위해서는 수학적 문맥은 필수적이며 특히 학교수학에서 이러한 문맥상황의 수업전개를 지지하고 있다. 하지만 교사나 수학을 가르치는 교육자가 학생들에게 학습되어져야 하는 수학적 개념의 정확한 의미를 얼마나 알고, 개념을 의미 있게 표현하고 이 의미의 정확한 전달을 위한 문제 상황이 충분히 존재하는지는 또 다른 문제임을 지적하고 있다.

본 논문은 적절한 상황모델을 제시하여 모델도출 과정을 거치면서 학생들이 어떻게 고유치와 고유벡터의 개념을 형성시켜 나가는지에 대한 모델을 제시한 질적 연구이다. 향후 일정한 치즈 생산을 목표로 하는 치즈 가공회사의 어미 젖소의 수를 조절해야하는 상황을 제시하고 학생들은 모델을 탐구하는 토론 과정을 거치면서 모델에 적응하게 되고 고유치 고유벡터에 대한 유의미한 개념을 구성하게 될 것이다. 이를 위한 방법으로 학생들의 소규모 토론 학습을 제안하였으며 학생 상호 간의 토론이 각자 의견의 비교, 대조, 조정, 융화, 종합 등의 수렴 과정을 거치는 효과적인 의사소통의 수단이 되리라 (Zawojewski, et al., 2003) 가정하였다. 이는 향후 학생들이 겪어야할 비슷한 문맥 상황에서 통찰력을 갖게 되고 성공적인 문제해결의 실마리를 찾게 될 수 있을 것이다.

II. 이론적 배경

1. 고유치와 고유벡터 개념의 역사발생

일찍이 고유치와 고유벡터의 '고유'에 대하여 eigen, proper, latent, characteristic등 여러 가지 용어가 사용되

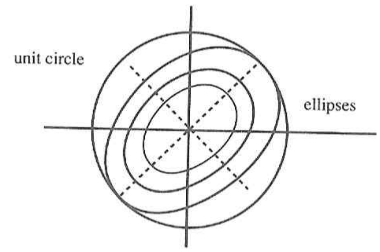
어 왔다(Poole, 2006 ; Uhlig, 2002). 그만큼 사용 용도도 다양하고 의미 또한 여러 가지로 해석할 수 있음을 뜻한다.

오랫동안 효과적인 선형대수 교수학습을 공동 연구해 온 Dorier et. al.(2000)등은 학생들이 선형대수 학습을 어려워하는 이유 중의 하나로 개념의 형식적 접근을 들고 있다. 의미전달을 무시한 채 대수적 알고리즘에 치우쳐 있고, 중등수학과의 연계성 찾기가 힘든 내용에 더불어 감당하기 어려운 새로운 정의와 정리 또한 그들의 상호의존적 관계 등도 진정한 의미를 이해하는데 부담으로 작용하고 있음을 지적하고 있다(Dorier, Robert & Robinet, 2000 ; Hillel, 2000). 이는 심도 있는 인식론적 탐구 없이는 어떤 개념과 논리적 구조도 완전한 것이 될 수 없고 자연스럽지 않음을 지적하고 있는 것이다. 수학적 개념의 본질과 의미는 그들의 논리적 상호관계에서 파악해야 한다.

수학적 개념의 동기부여와 관련해서는 그 개념이 만들어졌던 역사적 맥락을 생각하지 않을 수 없다. 학문적 수학에서 고유벡터와 고유치 개념의 등장은 18세기 연립 미분 방정식의 해를 구하는 과정에서 시작되었다. Jean d'Alembert, Joseph Louis, Lagrange, Laplace, Peano가 연립미분방정식의 해집합을 구하는 과정에서 고유벡터와 고유치 개념의 존재성을 인지하였고 Euler는 이차 곡면의 해석적 전개에서, 19세기에 와서 Cauchy와 Cayley, Sylvester는 이차 동차 다항식에서 그 개념을 파악하고 확립하기에 이르렀다(Katz, 1995).

그 중에서 고유치와 고유벡터에 관한 19세기 Cauchy의 아이디어가 가장 학생들의 수학적 개념 발생을 자연스럽게 유도해 낼 수 있게 한다. 그가 고유치를 생각할 수 있었던 수학적 맥락은 이차동차식이었고, 주어진 동차식을 제곱의 합으로 표현할 수 있는 변수변환을 시도하였다. 이것은 원추곡선이나 2차 곡면의 새로운 수직축의 발견을 의미한다.

아래 <그림 1>에서와 같이 단위원 $x^2+y^2=1$이라는 조건에서 이차동차식 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$의 최대, 최솟값을 구하는 경우 2차 곡선은 단위원과 만나는 점에서 극값을 가질 것이고 원점에서 그 점까지를 연결한 직선은 새로운 축이 되어 새로운 변수에 대한 제곱의 합으로 변환할 수 있다(Katz, 1995, 198쪽).



<그림 1> 이차식은 단위원과의 교점에서 극값이 같다

위 두 식을 미분하여 Lagrange 승수원리를 적용하면 $\dfrac{f_x}{2x}$와 $\dfrac{f_y}{2y}$의 값이 같을 때 극값을 갖는다. 각 값을 λ라고 하면

$$\frac{ax+by}{x}=\lambda, \qquad \frac{bx+cy}{y}=\lambda$$

이고, x와 y에 관하여 정리하면 두 연립방정식

$$(a-\lambda)x+by=0$$
$$bx+(c-\lambda)y=0$$

을 얻을 수 있다. 위 식의 행렬표현

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

에서 0이 아닌 극점을 찾기 위해서 $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}=0$ 이어야 한다(Katz, 1995).

이는 우리가 보통 형식적으로 도입하고 있는 행렬식 $\det(A-\lambda I)=0$의 전개와 같다.

위와 같이 Cauchy는 동차식의 극값을 구하는 문제를 해결하는 과정에서 미분을 이용하였고 연립방정식과 행렬을 도구로 고유치와 고유벡터 개념을 유도하고 있다. 선형대수 수업에서 상황으로부터 모델도출을 유도하는 본 논문에서는 미분이나 Lagrange 승수를 이용하지 않는 모델을 사용하지만 결과적으로 학생들은 후반부 모델 적용 과정을 거치면서 고유치와 고유벡터가 위에서 언급한 변환 축의 개념과 연결되어 있음을 인지할 수 있을 것이다.

2. 대수적 접근으로의 고유치와 고유벡터

대부분의 선형대수 교과서에서 고유치와 고유벡터의

도입은 주어진 정방행렬에서 시작된다. 행렬에 의한 일차변환에서 방향이 변하지 않는 벡터의 예를 한두 개 보여주고, 이어서 $A\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$ 을 만족하는 λ를 행렬 A의 고유치, 벡터 x 를 λ에 대응되는 고유벡터라 정의하고 있다. 행렬이 주어지면 정의한 식을 변형하여 행렬식 $\det(A-\lambda I)=0$에서 방정식을 풀어 고유치를 구하고 각 고유치에 대한 고유벡터를 구한다. 이 고유치와 앞에서 학습한 이론들과의 관계를 공부하고 다양한 행렬에서 고유치가 대수적으로 이용되는 이론들을 학습하게 된다. 실제로 일반적인 대수적 접근의 수업을 받은 학생들에게 행렬을 주고 고유치와 대응되는 고유벡터를 구하라는 문제에서 대부분의 학생들이 정확한 답을 제시한 반면에, 여기서 고유치란 무엇인가? 실제 어느 상황에 사용할 수 있는가? 우리 주변에 적용할 수 있는 것인가? 만약 고유치가 2일 때 그 값은 무슨 의미인가? 에 대한 질문에는 '행렬식'이나 'λ' 혹은 수업시간에 배웠던 '정의'에 국한된 답을 제시하거나 대부분의 학생들은 답을 적지 못한다. 물론 일차변환의 결과로 나타나는 벡터방향의 변화에 유의하면서 좌표상의 그래프가 고유벡터의 성질을 이해하는데 시각적으로 도움을 주기도 하지만 학생들은 이 값이 어떤 상황에서 필요한지 어떤 의미인지는 여전히 모호한 상황이다. 대수적 접근만으로 고유치와 고유벡터를 교수 학습하는 것은 실제 고유치와 고유벡터 개념이 잠재적으로 녹아있는 실제 상황에서 학생들의 개념 적용의 가능성을 기대하기 어렵다. 학생들을 위한 유의미한 개념 학습 상황이 필요한 이유이다.

한편, 일차변환의 관점에서 고유치와 고유벡터 지도를 주장한 심광주(1986)는 일차변환에 의해 방향이 변하지 않는 벡터를 고유벡터, 일차변환에 의한 고유벡터들의 확대율 축소율을 고유치로 가르칠 것을 제안하였다. 중등학교에서 다루는 회전이동, 대칭이동, 닮음 등의 변환을 행렬의 고유치 고유벡터와 연결하면 중등수학에서도 개념은 가르칠 수 있다는 것이다. 실제로, 닮음변환에서의 확대율과 축소율은 닮음변환에 대응되는 행렬의 고유치이며 회전변환에 대응되는 행렬의 고유벡터는 회전 후의 신좌표축에 놓여있다. 본 논문에서는 좌표축의 변환과 고유벡터와의 관련성을 수업 후반부에 한 예로 다룰 것이다. 이는 학생들에게 익숙한 수학적 사실이 고유벡터, 고유치와 연결되어있다는 사실을 인지하고, 수학의 한 내용에 대하여 다양한 해석을 할 수 있음을 경험하는 기회가 될 것이다.

3. 모델도출

수학적 모델은 수학자들이 상황을 수학적으로 해석하기 위해 사용하는 개념적 도구이다(Lesh & Doerr, 2003). 상황을 기술하고 설명하고 이해하는 일련의 과정은 전체 개요를 파악하고 조직하며 입체적인 관점을 가지며 도식화하는 일종의 수학화 과정을 포함한다. 그러므로 수학교육의 중요한 목적 중의 하나는 이러한 수학화 능력을 증진시키고 기본적이고 강력한 수학적 모델을 개발 발전시키는 것이어야 한다(Burghes, 1980 ; Doerr & English, 2003 ; Lesh & Doerr, 2003 ; Lesh & Lehrer, 2003 ; Swetz, 1989 ; Swetz, 1991).

Dienes의 다양한 구체물의 원리를 확장시킨 Lesh & Doerr(2003) 등은 학생들 주변의 경험에 기반한 문맥에서 구체적인 자료 등을 포함한 활동을 탐구함으로써 문제해결 가능성을 제안하고 그 과정으로 모델도출, 모델탐구, 모델적응의 모델링 단계를 제안하였다. 전통적인 문제 학습은 수학적 기호를 포함한 상황에서 그 의미를 찾아가는 것이었다면 모델도출은 의미를 품고 있는 실제 상황을 수학적 기호로 나타내는 역의 행동 단계를 의미한다. 성공적인 모델도출이 이루어지려면 먼저 수학적 내용과 수준을 정하고 최소한의 필요조건은 무엇인지 학생들의 경험확장이 가능한지를 염두에 두어야 학생들의 바람직한 개념발달이 가능하다. 모델탐구에서는 컴퓨터나 도형 등의 도구사용을 권장하고 수직선 모델이나 또 다른 수학적 언어로 경험확장과 새로운 의사소통의 수단을 제공해야함을 강조하고 있다. 모델적용단계는 앞에서 다듬어진 개념적 도구를 사용하는 단계로 개념을 변형하고 수정하여 확장할 수 있는 단계로 새로운 개념틀을 기존의 개념적 쉐마에 적응하는 단계를 말한다(Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski, 2003). .

Lesh & Lehrer(2000)등은 성공적인 모델도출 활동을 위한 사회적 조건으로 다음 네 가지를 들고 있다. 첫 째로 학생들에게 주어지는 과제는 확산된 사고를 조장할 수 있으면서 다양한 해석이 가능해야 하고, 둘째로는 사

회적인 상호작용 즉 대화를 통하여 자연스럽게 다듬어지고 수정되고 또는 받아들여지지 않을 수도 있어야 함을 지적하면서 이러한 과정이 겉으로는 비생산적으로 보일지라도 궁극적으로 학생들의 확산된 사고력을 키우는데 긍정적으로 작용할 수 있고 또한 문제를 세련되게 정리하는데 일조할 수 있음을 주장하고 있다. 세 번째 조건은 모델링 과정을 거치면서 생산적인 사고가 확산되고 종합적으로 수렴할 수 있어야 하고 마지막으로 소그룹을 이용한 모델도출 활동은 시간이 지나도 생산적인 사고가 보존 되므로 효과적인 모델링 활동을 위해서는 소그룹 토론 학습을 강조하고 있음을 알 수 있다.

4. 소그룹 토론학습

Zawojewski, Lesh & English(2003) 등은 소그룹 토론을 통한 모델도출에 필요한 과제설계 시 학생들의 인지발달에 유념해야 함을 지적하고 있다. 학생들이 과제를 통한 문제해결 및 탐구과정 중에 나타나는 활동과 대화를 통하여 모델발달이 일어날 수 있게 하고 또한 초기단계에서 나타나는 불안정적인 상황에서 학생들 간의 토론과 상호교류를 통하여 좀 더 안정적인 수학적 모델을 도출할 수 있는 잠재성을 염두에 두어야 함을 주장하였다. 모델도출 경험이 가져다 줄 수 있는 사회적 기능을 중시한 소그룹 토론 학습은 학생들끼리 의견을 나누고 상호작용 속에 얻어진 결과는 그 의미를 공유할 수 있다. 형식적 수학문제를 풀어 수학적 답을 얻을 때와는 비교가 되지 않을 엄청난 효과와 잠재성이 강조된다. 서로의 의견을 듣고 수정하고 확산하며 조정하는 과정은 개인 각자의 능력을 상승시키는 효과를 가져 올 수 있다.

본 논문은 위 여러 단계의 모델링 과정 중 상황에서 모델을 찾아내는 모델도출 과정을 집중하여 살펴보고자 한다. 또한 효과적인 모델도출을 위하여 소그룹 토론 학습을 계획하였고 이는 학생들에게 고유치와 고유벡터의 유의미한 개념 발생이 어떻게 가능한지를 추적하는 중요한 요소로 작용할 것이다.

III. 상황모델 설계

Brousseau(1977)는 상황문제를 구체적인 상황을 수학화하는 것이 궁극적 목적인 모델화 문제로 정의하였다. 이는 수학학습을 위한 출발점이 상황문제임을 주장하는 것으로 Brousseau의 최대 관심중의 하나는 가르치고자 하는 수학적 개념이 학습되기에 적합한 상황문제를 만드는 것이었다.

앞에서 지적하였듯이 모델도출은 수학적 개념을 갖고 있는 상황에 학생들을 참여시켜 탐구과정을 거쳐 의도한 개념을 효과적으로 학습하게 함을 목표로 한다. 그러기 위해서는 학생들에게 제시될 과제에 대한 치밀한 설계가 우선되어야 한다. Zawojewsk Lesh & Englishi, (2003) 등은 효과적인 모델도출을 위한 상황모델 설계[1]에 대하여 모델 구성의 원리(model construction principle)와 모델의 일반화 가능성(model generalizability principle) 원리를 제안하였다. 모델도출 활동을 함으로써 상황의 정확한 파악과 설명, 그것에 대한 표현, 예측, 평가를 할 수 있고 혹은 그것을 일반화 할 수 있는 근거와 그에 따른 앞으로의 계획 등 모델도출 경험이 가져다 줄 수 있는 효과를 극대화하기 위하여 상황모델 설계는 어느 것 보다 중요하다. 앞에서도 언급하였듯이 Lesh & Lehrer(2000)등은 모델도출 활동을 위한 과제는 확산된 사고를 조장할 수 있으면서 다양한 해석이 가능해야한다고 하였다.

본 논문에 적용할 상황모델이 갖춰야하는 필수조건으로 위 선행연구에서 언급한 두 개의 원리를 기본으로 하였다. 어려운 수식으로 채워져 있는 수학을 상황이 있는 만화로 엮어 학생들로 하여금 재미있는 학습이 되도록 한 조재경(2003)의 책(106쪽) 내용을 수정하여 본 학습에 적용하였다. 연령별 어미소들의 증가와 감소 패턴이 주어진 농장에서 치즈를 일정하게 생산하기 위하여 어미소의 수를 어떻게 유지해야 할 것인가에 대한 문제를 우리 자신이 해결해야 하는 문맥으로 바꾸었다. 다양한 해석이 가능하도록 되도록 힌트를 최소화 했으며 연구자가

---

1) Zawojewski, Lesh & English(2003) 등은 이를 과제설계(task design)라 하였는데 논문 진술의 통일을 위하여 상황모델 설계 혹은 상황문제 설계로 표기하였다.

의도한 소그룹 토론을 통하여 서로 의견을 나누고 표현하며 탐구하도록 상황모델을 설계하였다. 학생들은 상황의 정확한 파악과 구해야할 것이 무엇인지 우선 알아야 할 것이다. 이 과정에서 필요한 조건은 무엇이고 버려도 좋은 것은 무엇인지를 판단하게 될 것이다. 학생들의 개념 발달 순서에 적합하도록 문제를 몇 개의 문항으로 나누었고 수업시간에 순서대로 과제가 주어질 것이다. 이렇게 설계된 상황모델로부터 연구자가 의도한 학습자의 모델도출이 효과적으로 유도될 수 있을 것이다.

Ⅳ. 연구 및 분석

1. 연구대상 및 과정

고유치와 고유벡터의 유의미한 개념 발달을 위해 설계한 자료에 대한 연구대상으로, 사범대학에 재학 중인 수학교육과 학생 38명과 수학교육을 부전공으로 하는 7명, 총 45명을 선택하였다. 이 중 1학년은 31명이었고 2학년은 4명, 3학년 이상은 10명으로 부전공인 경우에 1학년에 수강하는 경우가 쉽지 않아 학년이 상대적으로 높은 학생이 많았다. 이 중 4명은 재수강 학생으로 이전에 고유치와 고유벡터를 대수적 접근을 통하여 한 번은 학습한 상태였다.

교과과정상 선형대수는 1학년 2학기에 개설되었고 대부분의 학생들은 선행학습으로 집합론은 1학기에, 미분적분학은 두 학기에 걸쳐 배우고 있는 상황이었다. 선형대수 과목에서 고유벡터와 고유치에 대한 내용은 교과과정상 비교적 후반부에 속하고 벡터의 연산과 벡터공간, 방정식과 행렬에 관한 기본적인 연산, 일차변환의 개념 등은 학습한 상태였다.

평상시에는 일반적인 강의식 수업이었으나 이번 모델링 실험을 위한 총 3차시는 5명씩 아홉 개의 조로 나누어 소그룹 토론 수업으로 진행되었다. 조별 토론이 주를 이루었으나 토론 사이에 서너 번의 전체 발표로 전체 수업의 흐름을 이어갔고 학생들은 이러한 과정을 통하여 개념발달에 도움을 갖게끔 유도하였다. 출석부 순으로 조를 나누었고 의도하지는 않았지만 재수강 학생과 부전공 학생들은 3개의 조에 걸쳐 나누어 배치되었다. 자유로운 토론 분위기를 유도하기 위하여 조를 개별적으로 바꿀 수 있게 하였고 가능한 모든 학생들이 토론에 참여할 수 있도록 유도하였다. 수업 자료를 나누어주고 그 내용에 대하여 토론하고 한 두 개의 조별 발표와 함께 정리를 하였고 다시 그 다음 내용을 토론하는 과정을 반복하였다.

모델링 과정에서는 교사뿐만 아니라 학생의 관점에서도 사고의 이동이나 전환이 요구된다. 이 때 교사의 역할은 학생들로 하여금 모델을 가다듬고 표현하며 검증할 수 있는 기회를 제공하는 것이다(Zawojewski et al., 2003). 이러한 관점에서 연구자는 대부분의 학생이 혼란스러워하는 부분이 아니면 학생들의 질문에 방향을 제시해주는 답변은 피하였다. 이는 그룹 내에서 학생들끼리 좀 더 다양한 관점에서 깊이 생각하고 생각의 확산을 조장할 것이라는 가정 때문이었다.

연구 과정과 결과의 분석을 위하여 조별로 토론 과정이 녹음되었고 연구자는 토론과정을 지켜보며 특징들을 체크하였다.

2. 연구 및 분석

고유치와 고유벡터의 유의미한 개념발달을 위해 설계한 상황모델은 첫 시간에 학생들에게 과제지 형태로 주어졌고, 치즈주식회사에 대한 설명과 함께 앞으로 세 번에 걸친 수업의 방법과 주의할 점을 일러주었다.

젖소(어미소)의 문제가 학생들에게는 낯설 수 있고 주변 문제가 아닐 수 있지만 치즈공장에서 수학자에게 해결 방안을 의뢰했다면 수학을 전공하고 선형대수를 공부하고 있는 우리들은 해결책을 줄 수 있다는 자신감을 갖게 하였다. 전혀 관련이 없을 것 같은 상황이 우리의 문제, 수학의 문제일 수 있다는 것을 알도록 하는 의도도 있었다. 이 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 미래의 성장 패턴을 예측하는 수학의 강력한 힘을 경험할 수 있는 계기가 될 것이다.

<<우유 & 치즈. com>>
하림네는 젖소농장을 하면서 치즈공장에 우유를 납품하고 있다. 하지만 우유를 짤 수 있는 어미 소의 숫자가 매년 들쑥날쑥하여 주문량을 맞추기가 어려운 문제를 안고 있다. 전문가인 우리는 어떤 해결책을 줄 수 있을까?

우리에게 주어진 젖소농장 상황에 대한 정보는 다음과 같다.

2살 이하의 젖소는 새끼를 낳지 못하고 7살이 된 소는 도살하게 된다.
처음 암컷의 수는 1-2살짜리가 500마리, 3-4살짜리가 300마리, 5-6살짜리가 200마리였고
2년 후 현재의 암컷 수는 1-2살짜리가 770마리, 3-4살짜리가 300마리, 5-6살짜리가 90마리이다. 2년 동안 낳은 새끼 수는 3-4살짜리가 690마리, 5-6살짜리가 80마리였다.
같은 비율로 암소의 숫자가 변화한다고 가정한다.

(1) 암소 숫자가 늘어나는 경향을 나타내는 표이다. 다음 빈 부분을 채우시오.

	1-2살짜리로부터	3-4살짜리로부터	5-6살짜리로부터
1-2살짜리가 생기는 비율			
3-4살짜리가 생기는 비율			
5-6살짜리가 생기는 비율			

(2) 앞으로 2년 후의 연령별 암소의 숫자를 구하시오.

먼저 세 문항이 들어있는 과제지 한 장씩을 학생들에게 나누어 주고 조별로 소리 내어 자유롭게 토론하도록 하였다. 이러한 수업에 익숙하지 않은 학생들은 처음에는 조용히 문제를 읽어가다가 옆 사람과 소곤소곤 대화하기 시작하였고 큰 소리로 얘기하며 토론하라는 지시에 마침내 강의실은 각 조별로 문제를 해결하기 위한 토론장으로 바뀌었다.

먼저 표를 채우는 첫 문항부터 상황을 해석하는 방법을 두고 많은 의견이 오갔다. 수컷은 왜 없는지, 왜 마리수가 줄어들었는지, 어떻게 그럴 수 있는지에 대하여 초기에 매우 분주하였다.

학생1 이 표가 무슨 말인지 모르겠어.
학생2 아, 근데 왜 두 살짜리는 없어져? 1-2살짜리를 합쳐서 이 만큼 있다는 거야? 1-2살짜리가 690마리를 낳았다고?
(중략)
학생3 그게 아니라 얘네는 세는 게 아닌 거 같아. 새끼들만 세는 거 같아.
학생1 그러면 낳은 새끼 수는? 이라고 했으니까 이거랑 애랑 더해야 되는 거 아냐?
학생2 근데 왜 1-2짜리가 줄었냐?
학생1 아, 근데 말이 안되는 게 왜 3-4살짜리가 300마리가 될까? 200마리 없어졌나?
학생2 이상하다. 하하~ ①<u>다시 읽어보자. 같은 비율로 변화한다고 했으니까 죽는 것도 변화과정으로 치는 것이 아닐까?</u> ②<u>그렇지? 여기 5-6살 200마리는 다 죽은 거지?</u>
학생3 응, 그러면서 5-6살짜리 90마리가 300마리에서 90마리로 또 죽은 거야. 근데 죽은 건 알 수 없지 않나?
학생2 근데 죽은 것 밖에는 다른 변수가 없잖아. 새끼 낳아서 3-4살이 될 수 없는 거니까.
학생4 ③<u>그래, 죽은 거네. 맞지?</u>
학생2 응. 3-4살이 500에서 300으로 가면서 200마리 죽고, 3-4살짜리 300마리가 5-6살이 되면서 210마리가 죽은 거지.
학생4 ④<u>그래 죽었다고 생각하자. 다른 수가 없어.</u>

Man-Keung Siu(1995)는 문맥을 이용한 수업에서 문맥 속의 여러 조건 중 어떠한 요소를 사용할 것인지도 중요하지만 어떤 요소를 버릴 것인지를 선택하는 일은 더욱 중요하다고 하였다. 이는 필요 없는 부분을 버림으로써 간결한 사고를 할 수 있고 문제해결 전략을 짜는데 도움을 줄 수 있다. 처음 어미 소가 몇 마리에서 시작을 하였는지, 왜 암컷만 생각을 하는지, 왜 소의 마리수가 줄었는지에 대한 생각은 문제해결에 불필요한 요소임을 조별 토론과정을 통해 정리하게 되었고 익숙하지 않은 상황에서 보다 이해할 수 있는 상황을 만들기 위한 상호작용이 이어졌다. 위 대화에서와 같이 처음에 어미 소의 마릿수에 집중하다가 상황이 혼란스러워지자 학생2는 다시 문제로 돌아가 구해야 하는 것이 변화하는 비율임을

찾아내었다(①). 이어 동료의 동의를 구하면서(②) 문제를 정리하는 모습도 보였다. 학생4도 자신의 의견도 같음을 인정하면서(③) 잠재적 합의를 보여주고 있다(④). 각 과제지에 자신이 생각했던 숫자로 칸을 채운 학생들은 비율이라는 단어를 확인하고 다시 자신이 쓴 수 아래에 전체 어미 소의 수를 적음으로써 분수 표현인 비율로 나타내었다.

두 번째 문항에서 대부분의 학생이 별 어려움 없이 앞에서 구한 표를 아주 자연스럽게 행렬 표상에 적용하였다. 과제지 어디에도 행렬이란 단어를 사용하지 않았음에도 학생들은 행렬표현으로 나타내어 수를 채우고 계산하였다. '그냥 계산해도 돼', '하지만 행렬이 편하잖아'의 대화를 하면서 자신들의 행렬과 그들의 곱 개념에 대한 깊은 이해를 나타내었다. 학생들은 이 낯선 환경에서 이미 알고 있는 행렬의 곱이 필요한 상황을 인지하고 내심 반가운 눈치였다. 자신이 완성한 표를 행렬이라는 수학적 표상으로 나타내고 그 개념을 완벽하게 인지하여 문제에서 요구하는 결과를 유창하게 완수하였다.

일단 세 번째 문항의 소그룹 토론에 들어가기 전에 자발적인 두 그룹의 첫 번째 문항과 두 번째 문항의 토론 결과에 대한 전체 발표시간을 가졌다. 이는 학생들이 처음 경험하는 토론수업에 일부는 자신들이 풀어놓은 과정이 옳은 것인지 맞는 방향으로 가고 있는지에 대한 점검이 필요했고 세 번째 문항은 다른 방향에서 시작하기 때문에 이전에 의견을 종합하고 정리하는 시간이 필요하였다. 이미 각자의 그룹에서 동료끼리 합의를 거친 후이기 때문에 발표는 순조롭게 진행되었고 모두 수긍하는 분위기였다.

실제로 이 과제가 의도한 가장 큰 목적은 세 번째 문항 (3)이었다. 앞의 문항 (1)과 문항 (2)는 문항(3)에서 학습자의 고유치와 고유벡터 모델도출을 위한 준비단계라고 할 수 있다.

(3) 매년 일정량의 치즈 생산량을 맞추기 위해서는 어미 소 숫자의 비율이 일정해야 한다. 연령별 어미 소의 비율을 세월이 지나도 일정하게 하려면 처음에 연령별로 몇 마리씩의 젖소가 있어야 하는가?

이 문항에 고유벡터와 고유치 개념이 들어있고 문제해결과정을 통하여 학생들로 하여금 고유치와 고유벡터 개념이 자연스럽게 발생되도록 설계되었다. 문제를 읽은 학생들은 처음부터 내용을 정확히 이해하지 못하였고 (1)번 문항으로 되돌아가서 주어진 정보를 재점검하였다. '어미 소 숫자의 비율인데 왜 1-2살짜리는 엄마가 못 되죠?라든가 '일정한 비가 뭐냐 이렇게 물어보는 거랑 일정한 비로 조정할 수 있을까라고 물어보는 거랑 다르잖아.' 등 주어진 문항에서 단어 하나하나가 의미하는 것이 문제해결에 열쇠를 줄 수도 있을 거라는 기대를 갖고 있었다. '문제에서 연령별 암소의 수라고 했잖아요.'라는 지적에'그럼 암소만 봐야 된다는 거네.'라고 나름 대상을 좁히는 과정을 읽을 수 있었다. 또한 '세월이 지나도---'를 '2년 후가 반복 된다는 건가?'로 해석하기도 하였다. 이전 문제로 돌아가고 다시 토론하고 지식을 재구성하고 토론, 또 다시 문제로 돌아가고를 반복하면서 학생들의 사고는 정제되고 다듬어지고 조정, 융합되었다.

학생7: ⑤치즈 양이 같으려면 현재의 수랑 2년 후의 수랑 같아야 하잖아. 그럼 다 더한 거끼리 같다고?
학생8: 아니 그게 아니고, 비율이 일정해야 한다고. 연령별 암소의 숫자의 비가.
학생7: ⑥그래, 이거 합친 거랑 이거 합친 거랑 다르지. ⑦비가 같은 거지.
학생9: ⑧비가 같다고? 그럼 비례식으로 하는 건가?
학생7: ⑨그래 그거야, 우리 한 번 해보자.

처음 학생7은 어미 소의 수의 합끼리 같다고 했다가(⑤) '일정한 비율'이 의미하는 것을 문항(1)에서 구한 행렬이 갖는 변환의 성질로 이해하면서 한 단계 성숙되는 과정을 보여주었다(⑥). 학생9는 동료들의 의견을 묵묵히 듣고 있다가 학생7의 말에(⑦) '비례식'을 생각해내고(⑧) 과제지의 여백을 빠르게 써내려갔다. 처음 연령별 어미 소의 수를 (a, b, c)라 하고 행렬을 곱해서 얻어진 $(\frac{23}{10}b+\frac{4}{10}c,\ \ \frac{6}{10}a,\ \frac{3}{10}b)$는 같은 비율이어야 하니까

$$a:b:c = \frac{23}{10}b + \frac{4}{10}c : \frac{6}{10}a : \frac{3}{10}b$$

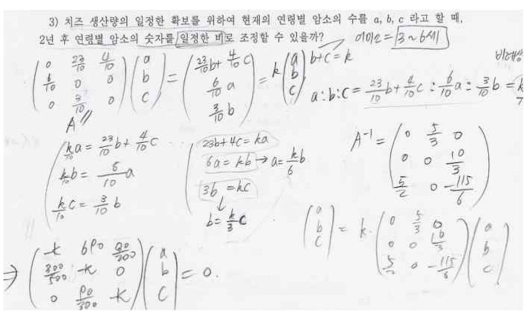
위 비례식에서 두 대칭식으로 놓고 문제로 다시 돌아가 구하는 것이 어미소의 비율이므로 가장 간단한 c를 1로 놓고 구하는 재치를 보여주었다(⑩).

학생7: 식이 두개인데 어떡하지, 안 풀리잖아.
학생8: ⑩음-- 이게 비를 구하라 그랬으니까 비만 구하면 되잖아. 아무거나 1로 하자.

학생들은 $c=1$로 계산하여 $b=4$, $a=8$를 차례로 구하였다.

토론 과정에서 학생들은 서로 틀린 것을 수정해주고 도와주며 생각을 정리하였고 서로 격려하였다(⑨).

전체 조별 발표를 하면서 각자는 정리 시간을 가졌다. $a:b:c=8:4:1$의 의미에 대하여 의견을 나누었고 그것이 연령별 800마리, 400마리, 100마리 혹은 8만 마리, 4만 마리, 1만 마리일 수 있고 회사 사정에 따라 달라질 수 있지만 '비율은 일정함'을 강조하였다.



<그림 2> 비에서 유도한 고유벡터

사실 이것은 고유벡터로 연구자가 상황문제로부터 개념발달을 의도한 바로 그 개념이다. 대부분의 교과서에 진술되는 대수적인 고유벡터는 주어진 행렬의 고유치를 먼저 구하고 그 고유치로 고유벡터를 구할 수 있지만 학생들은 고유치와 상관없이 고유벡터를 찾아내었다.

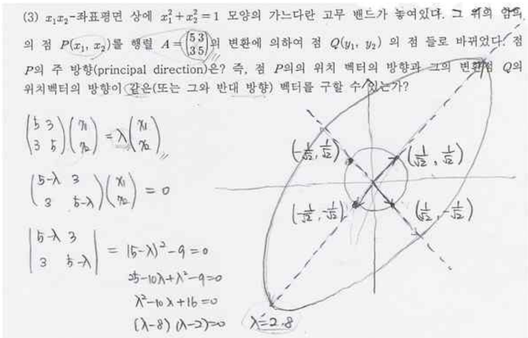
'다음은 그 비율을 구할 수 있을까?'라는 질문에 앞에서 구한 비례식에 비율 1.2를 쉽게 구하였다. 이게 바로 고유치이다. $a:b:c=8:4:1$과 1.2의 관계를 설명하면서 용어와 함께 교과서에 있는 대수적이고 연역적 상황도 같이 설명하였고 일반적인 풀이법도 소개하였다. Markov 연쇄와 인구성장 등 사회 변화의 패턴과 행렬과의 관계 또 그 행렬이 담고 있는 고유치와 고유벡터의 의미와 중요성을 자료를 보여주면서 학생들의 확산된 사고를 유도하였다. 다시 문제의 시작으로 돌아가게 한 다음 '학생 여러분이 치즈회사에 어떤 조언을 줄 수 있을까?'에 대한 대답을 들을 수 있었다. 학생들은 신이 나서 '컨설팅'하였고 수학에 대한 자신감을 내비쳤다. 재수강했던 한 학생은 '이거야? 이게 고유벡터란 말이야? 바로 그거?'라며 고유치 고유벡터의 진정한 의미의 깨달음을 보여주었다.

수업이 진행됨에 따라 학생들은 개념들을 종합하려고 노력하였고 기본적 개념들에 대하여 더 깊은 이해를 하였다.

다음 마지막 문항(4)가 담긴 과제지를 나누어 주었다. 이는 앞에서 학습한 과정의 마무리 단계로 Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski(2003) 등이 지적한 모델적응 단계에 해당한다.

(4) ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ 모양의 고무 밴드의 임의의 점 $P(x_1, x_2)$를 행렬 의 변환에 의하여 점 $Q(y_1, y_2)$로 바뀌었다. 점 P의 주 방향(principal direction)은? 즉, 점 P의 위치벡터의 방향과 그의 변환점 Q의 위치벡터의 방향이 같은(또는 그와 반대 방향) 벡터를 구할 수 있는가?

이 문제는 고유치와 고유벡터의 활용문제로 고유치와 고유벡터 쓰임의 다양성을 알게 하는 목적과 함께 '고유'라는 단어와 문제 속의 주 방향'이 갖는 의미의 중요함을 일깨워 줄 수 있다고 판단되어 선택하였다. 또한 형식적인 수학학습에 익숙한 학생들에게 익히 알고 있는 수학문맥에도 고유치와 고유벡터가 중요한 위치를 차지하고 있다는 사실을 일깨워주고 싶은 의도도 있었다. 여기서 '주 방향'은 새로운 용어이므로 간단한 설명을 하였고 학생들이 실제로 값을 구하는 대수적 연산 과정은 일차변환의 사전 학습과 앞 문제의 해결 덕분에 어려움 없이 해내었다.



<그림 3> 새로운 축과 고유벡터와의 관계

수학문맥에 익숙한 학생들은 행렬이 일종의 변환일 수 있고 문제에서 주어진 '같은 방향'이라는 정보에 관련 대수방정식을 세우고 비례값 λ= 2와 8을 구하고 대응되는 고유벡터 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$을 쉽게 계산하였다. 구체적으로 그림을 그릴 수 있겠는가라는 추가 질문에 학생들은 직교좌표 위에 단위원을 먼저 그리고 단위원 위의 점 ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$)을 같은 방향으로 2배인 곳에 표를 하였다. 마찬가지로 점($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)도 같은 방향으로 8배인 곳에 변환된 점을 표시하였다. 두 벡터의 반대 방향인 두 점도 같은 방법으로 표시하고 나머지 점들은 이 두 벡터의 일차결합의 형태로 변환됨을 설명하였다. 학생들은 비로소 '주 방향'의 의미를 정확히 이해하였고 그것이 고유벡터임을 다시 한 번 확인하였다.

V. 결론 및 제언

대수적이고 연역적인 접근으로 교수 학습되고 있는 고유치와 고유벡터에 대한 학습자의 유의미한 모델도출을 위하여 상황모델을 설계하여 소그룹 토론학습을 제안하였다. 실제 학습에서는 모델링 전 과정이 진행되었으나 본 논문에는 학습자의 모델도출에 중점을 두어 분석하였다. 이는 그 과정을 진술한 질적 논문이다.

위 분석 결과 다음 면에서 유의미한 결론을 얻을 수 있었다.

첫 번째로 상황모델로부터 유의미한 모델도출을 들 수 있다. 모델링 학습에서 학생들의 수학적 개념 발달을 위한 상황모델은 중요한 요인이다. 고유치와 고유벡터의 의미를 담고 있는 문맥은 학생들의 처음 상호작용에서 표를 메꾸기 위한 시도들이었지만 문맥 상황에서 필요한 요인과 무시해도 좋은 요인들을 구별하고 사고를 정교하게 변화시키는 구실을 하였다. 연령별 어미소는 어떤 비율을 가지고 변화했으며 조건에 맞는 문제를 해결하기 위하여 이미 가지고 있는 수학적 지식과 연결하려는 학습자 개인의 의미부여를 중시하였다. 어떤 시도들은 불확실하고 심지어 잘못된 것도 있었지만 잠재적으로 풍부한 탐구과정을 이끌었다. 결과적으로 연구자가 의도한 상황모델은 학습자의 고유치 고유벡터의 의미를 발견해 내는 모델도출 과정을 성공적으로 이끄는데 기여하였다.

두 번째로는 소그룹 토론학습이 갖고 있는 잠재성을 확인할 수 있었다. 개인학습에서 얻기 쉽지 않은 상호작용으로서의 의사소통이 활발하였다. 단편적이고 모호한 내용과 개념들이 수업이 진전됨에 따라 분명해지고 좀 더 논리적이 되었다. 학생들은 이해하고 있는 것을 서로에게 설명하려고 시도하였고 절차적인 것 뿐 아니라 이론적인 것도 토론하였다. 직관적 설명이 때로는 동료에게 문제해결의 힌트가 될 수 있었고, 시간이 갈수록 간단하고 경제적인 설명을 할 수 있었다. 잘못된 것에 대한 이유 설명과 서로에 대한 격려와 자극은 전체적인 이해를 이끌었고 결과적으로 주어진 상황모델로부터 의미있는 모델을 끌어내는데 토론 학습은 필수요인임을 확인하였다.

마지막으로 교사의 역할이다. 토론 학습에 익숙하지 않은 학생들은 언젠가는 교사가 가르쳐 주겠지하는 의식을 갖고 있다. 상황에 대한 이유와 문제의 해석 등 생각하기 전에 질문하였고 답을 요구하였다. 참이 아닌 방향으로 전개되는 상황에도 잘못된 상황을 발견하고 학생 스스로 되돌아 올 때 까지 기다리고 들어주며 격려하였다. 모델도출 과정 내내 이러한 교사의 자세는 모델을 객관화하는 효과를 가져왔고 학생들은 자신들이 해결해

야만 하는 나의 문제로 인식하고 자신의 생각을 반성하고 동료들 의견을 경청하고 종합하는 태도를 보였다. 이는 결과적으로 스스로 해냈다는 자신감과 그렇게 얻어낸 고유치 고유벡터의 중요한 의미를 되새기는 계기가 되었다.

Shternberg 와 Yerushalmy(2003)는 수학적 개념학습에서 물리적 실험을 통한 다양한 수준의 모델 학습은 보다 덜 수학적인 상황에서 수학적 개념을 찾아내는 모델링기술을 습득할 수 있고 그 과정에서 사용되는 수학적 기호의 진정한 필요와 의미를 인지할 수 있다고 하였다. 이러한 경험이 있는 학생들은 이후 부딪치는 비슷한 문제 상황에서 수학적 요소를 찾아 연결하고 적당한 수학적 기호를 이용하는 모델링을 통하여 문제해결의 방법을 효과적으로 찾아낼 수 있을 것으로 기대할 수 있다.

장차 사회인으로 현장의 실제 문제를 해결해야하는 지금의 학생들은 물론 특히 앞으로 학생들을 가르치게 될 예비교사에게 이러한 모델도출수업 경험은 필수적이다. 교사는 상황모델로부터 가르치고자하는 수학적 개념의 명료화 과정을 알고 있어야하고 수업 계획부터 과정내내 목표를 인지하고 있어야 한다. 수학적 개념의 도입에 있어서 문맥 상황에서의 교수설계 및 학습 과정 경험은 대수적 접근과의 차이를 분명히 알 수 있고 유의미한 학습의 관점에서 선택의 폭을 넓힐 수 있다. 장차 미래 교사로서 이러한 실제경험은 중요하다.

수학의 타 교과에 비교하여 선형대수 대부분의 내용들은 대수적 접근 이전에 의미를 염두에 둔 모델의 존재가 상대적으로 열려있다. 학생들의 효과적인 수학적 개념 개발을 위한 개념모델의 발견 내지 구성은 절실하다. 효과적인 교수디자인 연구와 더불어 활용 면에서도 극대화 방안연구가 필요하다.

참 고 문 헌

심광주 (1986). 행렬의 고유치와 고유벡터에 관한 지도방안, 충북대학교 교육대학원 석사논문

조재경 (2003). 공업수학이라면 만화로 공부하세요 제2권, 서울: 도서출판 교우사

Brousseau, G. (1977). *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Burghes, D. (1980). Mathematical modeling: a positive direction for the teaching of applications of mathematics at school, *Educational Studies in Mathematics* 11, 113-131.

Doerr H. & English L. (2003). A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning about Data, *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.

Dorier, Jean-Luc (2000). Epistemological analysis of the Genesis of the Theory of vector Spaces, *On the Teaching of Linear Algebra* edited by Dorier, 1-71

Dorier, Jean-Luc., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra, *On the Teaching of Linear Algebra* edited by Dorier, 85-124

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra, *On the Teaching of Linear Algebra* edited by Dorier, 91-204

Howson, G. (2005). "Meaning" and School Mathematics In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose(Eds.), *Meaning in Mathematics Education*(pp.17-38). Springer

Katz, Victor J. (1995). Historical Ideas in Teaching Linear Algebra, *Learn from the masters* edited by Frank Swetz et al. MAA, 189-206

Lesh, R., & Carmona, G. (2003). Piaget Conceptual Systems and Models for Mathematizing Everyday Experiences, *Beyond Constructivism*, edited by Lesh, Doerr, Lawrence Erlbaum Associates

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model Development sequence, *Beyond Constructivism*, edited by Lesh, Doerr, Lawrence Erlbaum Associates

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics

Teaching, Learning, and Problem Solving, *Beyond Constructivism*, edited by Lesh, Doerr, Lawrence Erlbaum Associates

Lesh R., & Lehrer R. (2000). Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. In A. Kelly & R. Lesh(Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh R., & Lehrer R. (2003). Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers, *Mathematical Thing and Learning* 5(2&3), 109-129.

Man-Keung Siu (1995). Mathematical Thing and History of Mathematics, *Learn from the Masters*, edited by Frank Swetz et al. MAA, 279-282

Poole, D. (2006). *Linear Algebra*, Brooks/Cole.

Presmeg, N. (2002). Shifts in Meaning during Transitions, *Transitions Between Contexts of Mathematical Practices*, edited by Guida de Abreu, Alan J. Bishop and Norma C. Presmeg, Kruwer Academic Publishers, 213-227.

Shternberg, B., & Yerushalmy, M. (2003). Models of Functions Models of Situations: On the Design of Modeling-Based Learning Environments, *Beyond Constructivism*, edited by Lesh, Doerr, Lawrence Erlbaum Associates

Swetz, F. (1989). When and how can we use modeling?. *Mathematics Teacher* December, 722-726.

Swetz, F. (1991). Incorporating mathematical modelling into the curriculum. *Mathematics Teacher* May, 358-364 .

Thom, R. (1973). Modern Mathematics: Does it exist?, *Developments in Mathematical Education* edited by Howson, A. G., Cambridge, 194-209

Uhlig, F. (2002). *Transform Linear Algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Zawojewski, J., Lesh, R., & English, L. (2003) A Modeling and Modeling Perspective on the Role of Small Group Leaning Activities, *Beyond Constructivism*, edited by Lesh, Doerr, Lawrence Erlbaum Associates

Students' conceptual development of eigenvalue and eigenvector based on the situation model

Shin Kyunghee
Ajou Univ, Woncheon-dong, Yeongtong-gu, Suwon-si, Gyeonggi-do, Korea
E-mail : shinmat@ajou.ac.kr

This qualitative research provides a situation model, which is designed for promoting learning of eigenvalue and eigenvector. This study also demonstrates the usefulness of the model through a small groups discussion. Particularly, participants of the discussion were asked to decide the numbers of milk cows in order to make constant amounts of cheese production. Through such discussions, subjects understood the notion of eigenvalue and eigenvector. This study has following implications.

First of all, the present research finds significance of situation model. A situation model is useful to promote learning of mathematical notions. Subjects learn the notion of eigenvalue and eigenvector through the situation model without difficulty.

In addition, this research demonstrates potentials of small groups discussion. Learners participate in discussion more actively under small group debates. Such active interaction is necessary for situation model.

Moreover, this study emphasizes the role of teachers by showing that patience and encouragement of teachers promote students' feeling of achievement. The role of teachers are also important in conveying a meaning of eigenvalue and eigenvector. Therefore, this study concludes that experience of learning the notion of eigenvalue and eigenvector thorough situation model is important for teachers in future.

* ZDM Calssification : C35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : eigenvalue, eigenvector, situation model, model-eliciting, small group learning.