저커버그(2004)의 얼굴과 오일러(Euler, 1783)의 두 눈(眼)

이문호 (전북대학교)

요 약

우리 몸에서 가장 중요한 것은 얼굴과 두 눈이고, 아름다움도 얼굴에서 나온다.

세상에서 가장 아름다운 여인으로 서양에서는 클레오파트라(Cleopatra)이고, 동양은 양귀비(楊貴妃, 719~756)를 대표적 예로 든다. 미국 캘리포니아 대학의 Zadeh 교수는 강의시 휴식시간에 '어느 교수의 부인이 아름다운가?' 라는 농담을 하면서 제일 예쁜 여자는 A그룹, 그 다음은 B 그룹 등으로 구분하는데 착안하여 Fuzzy 개념을 발견(1965)하였고, 그 후 연구계 및 산업체에서 이 이론을 확장해 퍼지세탁기, 퍼지냉장고 등이 가전 시장을 석권한 바 있다. 한편, 2004년 미국 하버드대 기숙사에서 친구와 함께 재미삼아 페이스북을 만든 마크 저커버그(28). 여자친구의 사생활을 여기에 올려 이별의 아픔을 맛보기도 했던 그가 8년 만에 세계적 282억 달러의 부호가 됐다. 세계 인터넷업계가 가슴을 졸이며 기다려온 페이스북의 기업공개(IPO · 주식상장)를 통해서다. 1783년 스위스 수학자인 오일러(Euler, 1707~1783) : 학문적으로 방대한 업적을 남긴 만큼 오일러의 인생도 파란만장했다. 그는 20대 초반의 젊은 나이에 병으로 한쪽 눈을 실명하는 불운을 겪기도 했다. 러시아로 돌아간 말년에는 수학문제를 풀기위해서 사를 밤낮을 꼬박 몰두하다 다른 쪽 시력마저 잃게 된다. 당시 파리아카데미에서는 수여하는 권위 있는 상을 수상하고자 저명한 수학자들도 몇 개월 붙잡는 어려운 문제를 단 사흘 만에 풀었는데 너무나 집중한 나머지 실명한 것이었다. 양쪽 눈을 모두 잃었지만 오일러는 비서에게 자신의 생각들을 받아 적게 하는 방식으로 계속해서 훌륭한 업적을 남겼다. 양 눈(眼) 사이 거리는 6.5cm, 이 시각차가 오늘 3D TV 시대를 열었다. 본고에서는 최근 관심이 고조된 저커버그의 페이스북과 오일러 e에 관해 요약했다.

Ⅰ. 마크 저커버그(Mark Zuckerberg)의 얼굴, 8억명이 만들어가는 신(新)경제권

세계가 주목한 페이스북의 파워는 경영 철학보다는 막강한 인터넷 경제권에 대한 장악력이다. 페이스북 이용자는 8억4500만명. 이보다 더욱 주목할 대목은 매일 페이스북을 쓰는 열성적인 이용자가 이 가운데 절반이 넘는 4억8300만명이란 점이다. 페이스북이 이를 통해 버는 돈은 37억1000만달러(2011년 매출 기준 · 약 4조1500억원)다. 순이익은 10억달러다. 4조원대 매출 기업이 100조원 이상의 기업 가치를 인정받는 것을 두고 IT 버블 논쟁이 붙기도 했다. 미국의 한 증권사는 한 술 더 떠 페이스북의 시가 총액이 2015년에 2340억달러(261조5000억원)에 달할 것이라고 예측했다. 구글의 시가총액인 2000억달러를 넘어 세계 최대 인터넷 기업이 될 것이란 전망이다. 이런 기대를 받는 이유는 페이스북이 스스로 새로운 경제권을 창출해내고 있기 때문이다. 페이스북은 인터넷을 이름없는 정보의 공간에서 인간과 인간이 대화하는 공간으로 바꿨다. 페이스북은 이를 '소셜디자인'이란 개념으로 설명한다. 페이스북의 겐 로즈 파트너십담당 부사장은 "기존 인터넷은 정보를 중심으로 움직였지만, 우린 소셜디자인의 개념에서 인간을 중심에 놓은 인터넷 세상을 그리고 있다"고 했다. 구글이 주도한 인터넷 세상은 사이트와 사이트, 정보와 정보 간 '링크'라는 형식의 웹(Web)으로 이뤄졌다. 유럽여행을 원하는 사람은 구글에서 특정 도시를 검색했고, 구글은 이와 관련한 좋은 기행문과 현지 사진들을 보여줬다. 여기에 항공사나 여행사의 광고 정보가 따라붙는다. 누가 검색하

〈그림 1〉 페이스북 회사 입구

든 결과는 같다.

페이스북은 다르다. 페이스북은 서로 얼굴을 보여주는 이용자들끼리 맺어진 친구 관계가 전 세계로 확장된 형태로 웹을 형성했다. 여행을 갈 때도 친구 관계를 맺은 다른 네티즌에게 물어본다. 신뢰하는 지인이 추천하는 정보라는 점에서 새로운 가치가 나온다. 자신과 비슷한 취향의 지인이 추천하는 맞춤형 정보다. 모르는 사람이 쓴 글이 주지 못하는 신뢰라는 새로운 가치가 있다. 소셜디자인에선 인간을 통해 정보가 흐른다. 페이스북 이용자들은 실제 세계와 유사하게 서로 구매 정보를 교환하고 영화를 추천하며 인간관계를 맺는 커뮤니티다. 단지 의사소통 통로가 인터넷일 뿐이다. 이를 통해 페이스북은 구글의 한계를 넘었다. 구글은 검색에 의존하기 때문에 주로 정보의 유통에 머물렀다. 페이스북은 이용자 간 정보 교류 방식에 기반을 두기 때문에 사진 · 게임 · 음악 · 영화와 같은 콘텐츠 유통은 물론이고 일반 제품의 판매처 역할까지 영역을 확장했다. 페이스북은 마치 국가가 자국 울타리 안의 기업과 국민에게 각종 세금을 거둬가는 것처럼 국적 없이 모여든 수억명의 이용자들에게 광고를 보여주거나 물건을 파는 업체에서 판매 수수료를 받는다.

페이스북은 "기존의 인터넷 배너 광고와 비교할 때 페이스북에서 친구가 추천해준 광고는 2배의 인지도와 4배의 구매율을 보인다"고 밝혔다. 페이스북은 네티즌 스스로 자신이 좋아하는 사람들과 친구 관계를 맺는다. 결국 같은 취향을 가진 네티즌끼리 네트워크가 만들어진다. 기업 입장에선 특정 제품에 딱 맞는 소수의 타깃 시장이 만들어진 것이다. 매력적인 대목은 이런 타깃층 소비자들이 먼저 알아서 상품 광고를 찾아온 다음 비슷한 소비자에게 이를 다시 퍼트려 준다는 점이다. 기업들은 페이스북에 자신의 페이지를 만든다. 해당 기업을 좋아하는 A씨가 페이스북 페이지를 찾아와 '좋아요' 버튼을 누르고 자신의 페이지와 연결한다. 이 순간 이 이용자와 친구 관계에 있는 수백~수만명의 네티즌에게 "당신이 아는 A씨가 이 기업을 좋아한다고 하네요"라는 통지문이 전달된다. A씨에 대한 신뢰가 해당 기업에도 이어진다. 기업이 특정 상품 광고를 올리면, A씨가 '좋아요' 버튼을 누른다. 역시 이 이용자의 친구 페이지에는 "A씨가 어느 기업의 상품이 좋다고 했다"고 뜬다. 소비재를 만드는 전 세계의 거의 모든 주요 기업들이 페이스북에 뛰어든 건 어쩌면 당연한 일이다. 이들에게 페이스북은 전 세계 8억명의 소비자를 보유한 거대한 유통점인 셈이다. 페이스북의 더 큰 잠재력 수익원은 수수료다. 전 세계 영화 · 음악 · 게임회사를 페이스북 안으로 끌어들여 이용자에게 콘텐츠를 팔게 하고 수수료를 받는다. 실제로 작년 페이스북의 수익 중 11%는 게임업체 징가에서 나왔다. 징가는 페이스북 이용자에게 게임을 제공해 돈을 벌고, 페이스북은 수수료를 받았다. 페이스북은 이용자가 본 영화나 음악을 실시간으로 친구들과 공유할 수 있도록 했다. 영화 · 음악 업체 입장에선 자사 콘텐츠의 홍보와 동시에 직접적인 매출 확대로 이어질 수 있다. 페이스북의 무기는 데스크톱 · 노트북과 같은 컴퓨터가 아닌 스마트폰이다. 컴퓨터는 주로 업무용이지만, 스마트폰은 소비자에게 가장 개인적인 기기다. 24시간 소비자와 항상 함께 있는 광고판이자, 콘텐츠 판매대인 셈이다. 페이스북은 작년 3월 이스라엘의 스마트폰 관련 기술 업체를 인수했다. 목표는 신흥국에 보급되는 저가 휴대폰에서도 고가의 스마트폰 수준으로 페이스북을 이용할 수 있게 하는 소프트웨어의 개발이다. 페이스북 이용자를 10억~20억명까지 늘리려면, 인도 · 중국과 같은 신흥국 소비자를 끌어들여야 하기 때문이다.

작년 P&G와 같은 미국 대형 소비재 업체들이 앞다퉈 페이스북 안에 상점을 열었다. 오프라인 업체들이 인터넷 시대에 온라인 판매에 나섰듯이 이번엔 페이스북 페이지를 통한 판매를 시작한 것이다. 대표적인 성공 사례는 꽃배달업체인 '1-800플라워즈'다. 이 회사는 2009년 페이스북에 상점을 차리고 결제 기능을 넣었다. 페이스북에는 친구의 생일을 알려주는 기능이 있다. 생일에 친구에게 축하의 메시지를 보내는 건 페이스북의 문화로 자리 잡았다. '1-800플라워즈'는 페이스북에서 꽃다발을 선택하고 신용카드로 결제해 친구에게 곧바로 생일 선물을 보낼 수 있게 했다. 영국의 명품 의류 업체인 버버리도 페이스북을 통해 시장을 확장했다. 2009년 '아트 오브 더 트렌치(Art of the Trench)'라는 페이스북 사이트를 만들었다. 버버리의 모토는 '트렌치코트를 입은 사람들은 각각 스토리가 있다'는 것. 세계 각국의 고객들이 직접 트렌치코트를 입은 사진을 올려 공유하도록 했다. 3살짜리 금발 아기부터 중년 여성까지 200여개 국가의 고객들이 자신의 옷맵시를 자랑하는 사진을 올렸다. 이는 페이스북 이용자들의 '좋아요' 버튼을 통해 퍼져나갔다. 1420만 페이지뷰를 기록했고 버버리는 2009년에 매출이 7% 늘었다.

'악마의 시'를 쓴 영국 작가 살만 루시디는 작년 11월 페이스북 계정이 중지됐다. 실명을 안 썼기 때문이다. 살만 루시디는 필명이며, 실명은 아마드 루시디다. 그는 페이스북 측에 여권 사진을 보내 본인임을 확인한 뒤 다시 자신의 페이지를

되찾았다. 계정의 이름은 '아마드 루시디'로 바꿔야 했다. 맬러리 루시치 페이스북 대변인은 "온라인에서도 실제 세상에서 하는 것처럼 의사소통하는 것이 좋다는 게 우리의 정책"이라고 말했다. 페이스북은 8년 전 출범했을 때부터 지금까지 줄곧 실명 사용 정책을 펴왔다. 가짜 이름을 담당하는 팀까지 두고 자동 시스템을 통해 스팸메일 업자나 신분을 속이는 이들을 감시한다. 인터넷을 통한 인간관계의 가장 큰 문제는 상대방이 '진짜'인지를 알 수 없다는 점. 페이스북은 실명을 쓰도록 해, 이용자들이 더욱 책임을 지고 글을 쓰도록 한다. 콘텐츠의 신뢰성을 높이는 것은 물론이고 이용자들이 익명의 해외 이용자를 만날 때도 신뢰할 수 있도록 하는 것이다. 가상의 공간에서도 실제 생활과 똑같은 공간으로 만들려는 것이다.

Ⅱ. 오일러(Euler, 1707-1783, 스위스) 생애

스위스 바젤 출신의 수학자로 주로 러시아에서 활동했다. 오일러의 아버지는 목사였는데 수학에 남다른 재능이 있었다. 그는 오일러가 교회에 들어오기를 바랐지만 오일러는 수학에 대한 열정을 버리지 못하고 바젤대학에 입학, 신학을 전공한다. 그곳에서 오일러는 스위스 수학자 베르누이의 관심을 끌기에 충분히 출중한 학생이었다. 베르누이는 오일러의 아버지를 설득해, 오일러의 전공을 신학에서 수학으로 바꾸는데 기여했다.

오일러는 1724년 열일곱의 나이로 수학 석사학위를 받았다. 바젤대학에서 학위를 받은 지 얼마 지나지 않아 오일러는 1727년 러시아 황제로부터 초청을 받고 러시아로 가게 된다. 1730년 성 페테르부르 (레닌그라드의 옛 지명) 고학아카데미에서 물리학 교수로 재직하게 되는데 1733년에는 수학교수로 자리를 굳혔다. 이후 러시아 황제 안나 이바노바가 1740년 숨질 때까지 오일러는 러시아에서 줄곧 연구 활동을 했다.

베를린으로 자리를 옮긴 오일러는 1741년 베를린 과학아카데미의 수학교수자리에 오르기도 했지만 1766년 캐서린 여제의 부름을 받고 다시 성 페테르부르크로 돌아간다. 러시아에서 여생을 보냈을 정도로 고향인 스위스보다는 러시아에서 주로 활동했다. 러시아가 스위스보다 훨씬 학문탐구에 좋은 조건을 갖췄기 때문이었다.

오일러는 수학과 물리학의 천재적 거두(巨頭)였다. 그는 열거하기 어려울 정도로 숱한 업적을 남겼다. 수학에 있어 대수와 확률론의 기초를 다지는데 공헌했고 미적분학과 정수론, 기하학 등 방대한 분야에 걸쳐 손길을 뻗쳤다.

특히 기하분야에 여러 가지 논제를 제기했다. 예를 들어 그리스의 '완성체' (Perfect Bodies)라는 개념에 숨은 수학에 대해 탐구했다. 고대 그리스인들은 완성체가 정다면체 형태로 만들어지다고 믿었다. 정다면체에는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십면체, 정이십면체 등 다섯 개만이 존재한다. 이 개념들은 르네상스 때까지 잊혀졌다가 레오나르도 다빈치와 파치올리에 의해 다시 연구됐다. 케플러는 완성체를 행성궤도와 연결 지으려는 시도까지 했다.

현대 해석기하의 많은 내용들이 오일러에서 기인하고 있다고 해도 과언이 아닐 정도로 그의 업적들은 중요한 위치를 차지하고 있다. 무한수열에 관한 이론도 전개했고 삼각함수론의 기반도 제공했다. 일생동안 5백여 권의 책과 논문들을 출판했는데도 사후에도 4백여 권의 책이 출판됐다. 그 중 '무한소해석입문' (Introductio in Analysin Infinitorum, 1748)은 순수해석학의 기본서로 평가받고 있다.

여기에 1755년 출판된 '미분학 (Institutiones Calculi Differentialis)으로 이어진 해석학 시리즈는 '적분학' (Institutiones Calculi Integralis, 1768~1770) 세 권의 출판으로 완결됐다. 감마함수나 베타함수는 오일러가 만들어낸 유명한 함수로 그 내용이 해석학 시리즈에 담겨있다. 스승인 베르누이가 제기했던 측지선에 관한 오일러의 대략적인 아이디어는 '곡선의 최대 최소정리' (Curvarum Maximi Minimive Proprietate, 1744)에 실렸다. 1770년에는 대수분야 책인 '대수입문' (Anleitung zur Algebra)을 출판했다. 이 책에는 디오판토스 대수에 관한 내용이 실려 있다. '페르마의 마지막 정리'중 일부에 대한 해답도 실려 있다.

대부분의 업적이 순수수학과 관련됐음에도 불구하고 오일러는 천문학이나 물리학 등 다른 분야에 지대한 공헌을 했다. 역학의 기초를 다지기도 한 그는 '운동원리'개념을 소개하고 강체운동을 처음으로 설명해냈다. 행성과 혜성의 운동도 분석했다. 한편 광학에도 흥미를 가졌던 오일러는 1770년에서 1771년사이 '굴절광학' (Dioptrica)이라는 제목의 세권의 시리즈를 출판한다. 게다가 물리학의 기반업적과 수학 철학의 기본원리에 대해서도 집필했다.

여러 분야에 업적을 남긴 오일러는 과학 분야뿐만 아니라 철학에도 관심을 기울였다. 베를린 시절 철학적 논쟁에 곧잘 관여했던 그는 특히 볼테르와의 논쟁을 즐겼다. 불행하게도 철학적 능력의 한계로 가끔씩 오류를 범해 좌중의 웃음거리가 되기도 했다고 한다. 하지만 러시아로 돌아간 그는 복수의 기회를 갖게 됐다. 캐서린 여제의 궁에 유명한 프랑스 철학자 디드로가 초대됐다. 자신의 통치령을 무신론으로 개종하려했던 캐서린에 반(反) 디드로의 논쟁에 염증을 느낀 여제가 오일러에게 디드로의 입을 막아버리도록 명했다.

수학적 지식이 희박했던 이 프랑스 철학자에게 하루는 신의 존재를 수학적으로 증명해보라고 누군가가 제의를 했다.

복수의 기회를 놓칠 리 없는 오일러. 그에게 다가가 " $\frac{(a+bn)}{n}=x$ 이므로 신은 존재합니다. 맞습니까?"라고 말했다. 디드로는 오일러의 말을 도저히 이해할 수 없어 대답을 하지 못하고 쩔쩔맸다. 여기저기서 터져 나온 폭소에 당황한 디드로는 프랑스로 돌아가버렸다고 한다.

1771년에는 집에 불이 나 많은 원고들이 불에 타버렸고 부인과 하인이 가까스로 오일러를 구한적도 있었다. 오일러는 뇌졸중으로 숨을 거뒀는데 수학자답게 짧게 단 한마디의 유언 "나는 죽는다" (I die)를 남겼다고 한다. 오일러는 역사상 가장 다재다능한 과학자로 여겨지고 있다. 많은 역사가들이 그를 아르키메데스나 뉴턴 또는 가우스[3]라 칭하기를 주저하지 않는다.

Ⅲ. 오일러의 학문적 공헌

1. 0의 역사

흥미롭게도 우리가 흔히 사용하는 '0' (zero)은 1,2,3,…… 이런 자연수들보다도 훨씬 뒤에 생긴 수이다. 약 1천5백여 년간 부정확한 계산이 이어져오다 B.C.300년경 바빌로니아인들에 의해 0의 개념이 생겨났다. 0의 발견은 수학사에 있어서 획기적인 발견이었다. 하지만 이 시기 0은 정확한 개념이 아니었고 계산에 있어 부가적인 도구였을 뿐이었다. 0은 '음수'의 개념이 정의되고 발전함에 따라 그 개념이 확실시 됐다. 음수와 0이 발견됐을 당시 혁명적인 개념이었음에 틀림없다. 18세기 수학자 오일러는 무한의 개념보다도 음수와 0의 개념이 수학에 있어 훨씬 더 중요한 자리를 차지한다고 역설했다. 18세기에는 음의 해가 버려졌던 것이 상례였으나 오일러는 수학사를 꿰뚫어 보는 혜안을 가졌던 것이다.

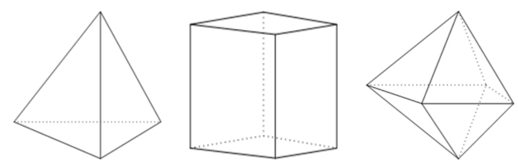
2. 오일러 공식

도형(평면도형이나 입체도형)의 면의 수 F, 꼭지점의 수 V, 변의 수 E 사이의 관계식이 오일러공식이다. 오일러공식은 다음과 같다.

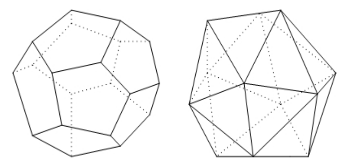
$$F+V=E+2 \quad \text{또는} \quad F+V-E=2$$

예를 들어 오일러가 관심을 가졌던 완성체에 응용해보면 〈그림 2〉와 같다.

	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
F	4	6	8	20	12
V	4	8	6	12	20
E	6	12	12	30	30



(a) 정사면체 (b) 정육면체 (c) 정팔면체



(d) 정십이면체 (e) 정이십면체

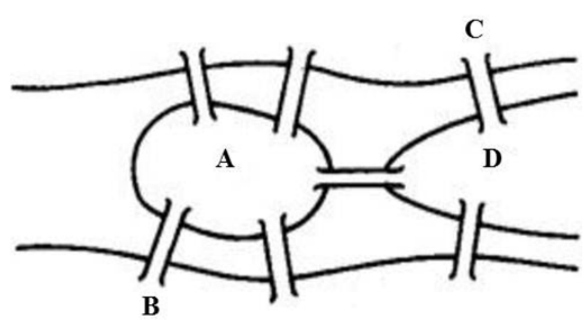
〈그림 2〉 각종 면체

3. 7다리 문제

18세기 초 프러시아의 옛도사 쾨니히베르크의 중심을 흐르는 프레겔강에 7개의 다리가 놓여있었다. 당시 시민들 사이에 다음과 같은 문제가 제기됐다.

> 같은 다리를 두 번 이상 지나지 않고 이들 7개의 다리를 꼭 한번씩 모두 건널 수 있을까?

오일러는 같은 다리를 두 번 이상 지나야만 한다는 사실을 그림으로 증명해냈다. 오일러는 다리의 수가 홀수이기 때문에 불가능하다고 밝혔다. 오일러의 해법은 오늘날 '그래프이론' (Graph theory)으로 알려진 수학분야를 여는 역할을 했다. 이 7다리 문제는 실생활에서 얼마나 많은 수학을 찾을 수 있는지를 보여주는 문제다. (〈그림 3〉)



〈그림 3〉 오일러의 다리

4. 오일러는 현대수학의 많은 기호들을 표준화하는 데도 큰 역할을 했다.

파이(π): 많은 수학자들이 원주율을 계산해내는데 열중했고 이 원주율은 일반대중에게 3.14159…로 잘 알려져 있다. 하지만 이 원주율을 기호화하는 것은 18세기에 들어서야 시작됐다. 오일러는 1736년 쓴 논문집에서 원주율을 p로 나타냈다. 함수를 $f(x)$로 표기하거나 삼각형의 세변의 길이를 소문자 a, b, c로 표현하고 삼각형의 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R로 표현한 것도 오일러다.

5. 세상에서 가장 아름다운 공식 : $e^{\pi i} + 1 = 0$

자연로그 e, 허수를 표현하는 i와 감마함수도 오일러의 작품이다. 게다가 삼각값을 분수로 나타낸 것도 오일러이다.[1)]

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = 2.71828 \quad (1)$$

그러면,

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2.5$$
$$\frac{1}{3!}=0.1666666\cdots$$
$$\frac{1}{4!}=0.0416666\cdots$$
$$\frac{1}{5!}=0.0083333\cdots$$
$$\frac{1}{6!}=0.0013888\cdots$$
$$\frac{1}{7!}=0.0001984\cdots$$
$$\frac{1}{8!}=0.0000248\cdots$$
$$\frac{1}{9!}=0.0000027\cdots$$
$$\frac{1}{10!}=0.0000002\cdots$$
$$\frac{1}{11!}=0.0000000\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e=2.718281$$

1) e의 값이 2.7182은 금융복리문제에서 찾아볼 수 있다. 즉, 원리의 합계 S는 $S=P(1+\frac{r}{n})^n$에서 복리 $\frac{1}{n}$년, 이율 r=1, 원금 P=$1, n=10,000,000일 때, S=2.71828이다.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad (2)$$

증명 : 만일 $n\le x\le n+1$ (n is integer)

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}. \quad (3)$$

그렇다면,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \quad (4)$$

조건

(i) If $x\to\infty$ and $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.1=e \quad (5)$$

한편,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e \quad (6)$$

식 (4)로부터

$$e\ge\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge e, \text{ and } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \quad (7)$$

(ii) $x\to-\infty$, and $x=-y$ $(y>0)$, 그렇다면

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y$$
$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right). \quad (8)$$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e \quad (9)$$

e(exponential 지수)에 관한 요긴한 함수

◆ e와 관련된 특이한 수

e^{-e} = 0.065988036 ⋯

$e^{-\pi/2}$ = 0.207879576 ⋯

$\frac{1}{e}$ = 0.367879441 ⋯

$e^{1/e}$ = 1.444667861 ⋯

$\frac{878}{323}$ = 2.71826625 ⋯

e = 2.718281828 ⋯

1737, Euler, 무리수임을 증명
1873, Hermite, 초월수임을 증명

$e+\pi$ = 5.859874482 ⋯

$e\cdot\pi$ = 8.539734223 ⋯

e^e = 15.15426224 ⋯

π^e = 22.45915772 ⋯

e^π = 23.14069263 ⋯

1934, Gelfond, 초월수임을 증명

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
= 0.577215664 ⋯

Euler의 상수, 무리수인지, 초월수인지 아직 모름

$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\cdots$ = 0.693147181 ⋯

◆ e와 관련된 흥미로운 공식들

$\cdot e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$

$\cdot e^{\pi i}+1=0$ (Euler의 공식)

$$\cdot e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots}}}}}$$

$$\cdot\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cdots}}}}$$

$$\cdot 2=\frac{e^1}{e^{1/2}}\cdot\frac{e^{1/3}}{e^{1/4}}\cdot\frac{e^{1/5}}{e^{1/6}}\cdot\cdots$$

◆ 지수함수 $y=b^x$의 도함수

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{b^x(b^h-1)}{h}=b^x\lim_{h\to0}\frac{b^h-1}{h}$$

∴ 지수함수의 도함수는 자기자신에 비례한다.

$\lim_{h\to0}\frac{b^h-1}{h}=1$이 되도록 하는 수 b

$$\Rightarrow b=\lim_{h\to0}(1+h)^{1/h}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$\therefore\frac{dy}{dx}=ay\Rightarrow y=Ce^{ax}$ (C는~ 임의상수)

◆ 지수함수 $y=e^x$와 관련된 유용한 적분

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\mathrm{Ei}(x)=\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt$ (지수적분)

$L[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ (라플라스 변환)

◆ Gamma Function

$$\Gamma(z)\equiv\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\ z\neq0,-1,-2,\cdots$$

$\cdot\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+\Omega(z+n),$

in a neighborhood of the pole z = −n.

$\cdot\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$

$\cdot\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$

$\cdot 2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$

$\cdot\Gamma(n+1)=n!,$ for all integer n

$\cdot\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad\Gamma(1)=1$

◆ Logarithmic Derivative, Beta Function

$$\Psi(z)\equiv\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$\cdot\Psi(z+1)= \dfrac{1}{z}+\Psi(z)$

$\cdot\Psi(1-z)-\Psi(z)= \pi\cot\pi z$

$\cdot\Psi(z)+\Psi(z+\dfrac{1}{2})+2\ln 2= 2\Psi(2z)$

$\cdot\Psi(1)= \Gamma'(1)= -\gamma$

$$B(x,y)\equiv\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

◆ Probability Integral

$$\Phi(z)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

$\cdot\Phi(0)=0$ increases rapidly to $\Phi(\infty)=1$

$\cdot 1-\Phi(z)= \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^\infty e^{-t^2}dt$

$\cdot\mathrm{Erf}(z)= \displaystyle\int_0^z e^{-t^2}dt= \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(z)$

$\cdot\mathrm{Erfc}(z)= \displaystyle\int_z^\infty e^{-t^2}dt= \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}[1-\Phi(z)]$

$\cdot\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{e^{-zt^2}}{1+t^2}dt= e^z[1-\Phi(\sqrt{z})]$.

Ⅳ. 저커버그와 오일러 비교

저커버그와 오일러의 비교는 〈표 1〉과 같다. 저커버그는 배신한 애인의 얼굴을 인터넷에 올리는 치기 어린 행동으로 Facebook을 만들어 젊은 나이에 세계 재벌이 됐다면, 오일러는 학문적 자세로 오일러 *e*(자기 이름의 이니셜이 *e*라는 말도 있으나, exponential(지수)이 *e*)를 두 눈이 멀 정도로 연구했다.

〈표 1〉

		
이름	마크 저커버그(2004)의 얼굴	오일러(1783)의 눈
동기	2004년 하바드 기숙사에서 페이스북을 만들어 헤어진 여자친구의 사생활을 올림.	눈이 실명할 정도로 문제풀기에 매달림.
결과	1. 페이스북을 설립하여 SNS의 선풍적 원조가 되다. 2. 28세(2012)에 282억 달러의 돈을 벌어 세계갑부. 3. "개인 정보 얼굴을 돈"으로 연결.	1. 세상에서 가장 아름다운 공식을 만들다. ① eπi+1=0 (유리수,무리수,허수,자연수,연산자,더하기 등을 포함) ② $F+V-E=2$(Fi 면의 수, Vi 꼭지점의 수, Ei변의 수) 도형을 가장 간단히 수식으로 나타냄 ③ 죽을 때 "나는 죽는다(I Die)" 라는 유언을 남겼다.

V. 결 론

나이가 60이 넘으면 얼굴에 책임을 진다. 얼굴과 두 눈, 60대가 넘은 얼굴은 주름이 연륜을 말한다. 흰머리의 얼굴엔 40년 교수냄새가 난다. 사업하는 사람 얼굴엔 사업냄새가 난다. 배신한 여자 친구 얼굴을 인터넷에 치기 어리게 올려 세상의 부자가 된 페이스북 창시자 저커버그(2004), 두 눈이 멀 정도로 문제 풀기에 매달린 오일러. 세상에서 가장 아름다운 것은 샤논, 푸리에, 가우스[6-8] 등의 공식도 아름답고, 꽃과 여자도 아름답지만 오일러 공식이 가장 아름답다[2-5]. 즉 $e^{\pi i}+1=0$, 이 간단한 식에 무리수 *e*와 π, 허수 *i*, 자연수 1과 0은 덧셈이 항등원, 1은 곱셈이 항등원, 그리고 + 더하기 × 곱하기 ÷ 나누기 = 은 연산자 등을 모두 포함하기 때문이다. 얼마나 명쾌한 수식인가. 나아가 0과 1은 산술을, *i*는 대수학을, π는 기하학을, *e*는 해석학을 나타내기도 한다. 돈이 되는 얼굴과 사물을 보는 눈, 저커버그가 사물의 외형과 인터넷 관계(Relation)을 중시했다면, 오일러는 오직 사물의 내면(*e*)을 깊숙이 통찰한 결과이다.

감사의 말씀

본 연구는 한국 연구 재단(NRF)의 '세계 수준의 연구 중심 대학 (World Class University) 육성 사업 (R32-2012-000-20014-0)'과 '기초 연구 사업 (2010-0020942), 도약 MEST (2012-002521)'의 지원을 받아 수행되었음.

참고문헌

[1] 조선일보 2012년 2월 10일자 성호철 기자 Report.
[2] 엘리마오, 오일러가 사랑한 수 *e*, 경문사, 2000.
[3] 이문호, "가우스(1985)의 동전 한 닢", 전자공학회지, Vol.38, No.11, 2011년 11월호.
[4] 이문호, "Euler Jacket 행렬", unpublished, 2010.
[5] 이문호, "Euler Hadamard/DCT Polynomial Matrix", Applied Mathematics and Computation, Vol.217, No.23, April, 2011.
[6] 이문호, "샤논(1948)을 넘어", 한국통신학회지 정보와 통신, Vol.28, No.11, 2011년 11월호.
[7] 이문호, "구글:PageRank", 정보과학회지, Vol.29, No.11,

2011년 11월호.
[8] 이문호, "푸리에(1822) 그 후", 한국통신학회지 정보와 통신, Vol.28, No.10, 2011년 10월호.
[9] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik, Table of Intergrals, Series, and Products, Academic Press, 2007.

이 문 호

1984년 2월 전남대 전기공학과 (공학박사), 통신기술사.
1985년~1986년 미국 University of Minnesota (Post Doc.).
1990년 일본 동경대학 정보통신 (공학박사).
1970년~1980년 남양 MBC 송신소장.
1980년 10월~2010년 2월 전북대학교 전자정보공학부 교수.
2010년 2월~현재 전북대 WCU-II 연구책임 교수.
〈관심분야〉 정보통신의 원형, 뿌리찾는 연구