대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.14, No.1 1-28. Mar. 2012

문제 해결 과정에서 나타나는 수학적 시각화의 구성 요소 및 활용에 관한 분석[1)]

주 홍 연[*] · 권 혁 진[**]

본 연구는 30명의 고등학교 2학년 학생들을 통해서 수학적 시각화의 구성 요소를 알아보고, 시각화 구성 요소들이 수학 문제 해결 과정에서 어떻게 활용되는지를 알아보는 것이다. 특히, 30명의 학생들 중 시각성 평가가 높은 5명의 학생들에 대해서 질적 사례 연구를 실시하였다. 분석 결과를 보면, 시각화의 구성 요소는 크게 정신적 이미지, 외적 표상, 이미지의 변형 및 조작, 공간 시각화 능력으로 범주화(Gutiérrez, 1996) 되었고, 각 요소마다 더 세분화되어져 나타났다. 또한, 수학 문제 해결 과정에서 시각화 요소들은 외적 표상을 생성하기 전에 기본적으로 정신적 이미지를 생성하고 있었고, 정형화된 정신적 이미지의 경우 문제 해결에 대한 학생들의 풍부한 사고를 억제하고 문제에 대한 부적절한 풀이 결과를 이끌어낼 수 있는 부정적인 영향을 주었다. 차원 변화에 의해서 이루어지는 이미지 변형 및 조작을 어려워하는 학생들이 있었으나, 문제 해결 과정에서 답을 추론하기 위한 이미지 탐색 활동과 도출된 답의 정당화를 위해서 이미지 조작 활동을 활용하고 있었다.

Ⅰ. 서론

1. 연구 필요성 및 목적

수세기 동안 수학은 고도의 추상성을 바탕으로 논리적 엄밀성을 강조해 왔고, 형식주의적인 입장에서 견지해 볼 때 수학을 학습하는 학생들에게는 어렵고 딱딱한 과목으로 인식될 수 있다. 이런 수학의 성격은 시각적인 표현이나 정신적 이미지가 수학이 아니라는 통념을 갖게 하기에 충분하다(장경윤, 1992). Eisenber와 Dreyfus (1991)는 수학 교육에서 시각화(visualization)가 거부되는 이유에 대해 "시각적인 것은 수학적인 것이 아니다"라는 생각이 뿌리 깊게 박혀 있다고 지적하였다. 그러나 학생, 교사뿐 아니라 심지어 수학자들도 그들의 수학적 사고 과정에서 시각적인 요소를 자연스럽게 사용해왔고, 다양한 수학 문제를 해결하기 위해서 시각적 접근 방법을 이용하였다.

최근 수학교육에서의 시각화에 대한 강조는 미국수학교사협의회(NCTM, 2000)의 '학교 수학을 위한 교육 과정과 평가 기준(Principles and Standards for School Mathematics)'에서 잘 나타나 있다. 특히, 기하 영역의 학습에서 문제를 해결하기 위해 시각화와 공간 시각적 추론의 기회를 줄 것을 권유하고 있다. 뿐 만 아니라 수와 연산, 대수, 추론과 증명 등의 다양한 영역에서도 교수·학습 방법으로 시각화와 시각적 추론을 제시하고 있다. 우리나라의 수학과 개정 교육과정에서도 "수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여

* 용동중학교(almighter@hanmail.net, 제1저자)
** 고려대학교(kwean@korea.ac.kr)
1) 이 글은 주홍연(2011)의 석사학위논문을 요약/수정한 것임.

다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 하며, 수학을 표현하고 토론하는 것을 통해 자신의 사고를 명확히 하고 반성"하도록 강조하고 있다(교육과학기술부, 2007). 따라서 추상화된 내용을 기호로 나타내고 형식적으로 전개해 나가기보다는 수학을 배우는 과정에서 시각적 이미지를 가지고 직관적인 전개를 통해 이해를 돕고 점진적인 형식화를 이루도록 지도하는 것이 필요하다(문광호 · 우정호, 1999).

시각화에 관한 연구는 1970년대 후반에 심리학을 기초로 시작되었고 현재에 이르기까지 활발하게 연구되어 오면서 수학교육에 관한 주요 연구 쟁점으로서 많은 수학교육 연구자들에게 각광을 받아왔다. 특히, 시각화 연구는 1986년 Presmeg(1986) 연구 이후 시각적 이미지, 시각화 과정, 시각적 추론과 증명, 공간 시각화 능력과 같이 여러 가지 연구 초점을 가지고 연구되었다. 최근에는 이런 다양한 초점에 대한 통합적인 이론적 틀을 마련하거나 기호학적 이론의 관점에서 시각화가 연구되고 있다. 본 연구는 시각화에 관한 연구 흐름 중에 하나인 시각화의 통합적인 이론적 틀을 마련하는 연구이면서 그 분석틀을 가지고 학생들이 시각화의 요소들을 수학 문제 해결에 어떻게 활용하는가를 분석하는데 연구의 초점을 두고 있다.

시각적인 것이 완전한 수학은 아니라는 사회의 부정적인 통념, 시각화가 주는 한계로 인한 오류 가능성, 제한적인 개념 이미지 형성과 같은 시각화에 대한 부정적 측면에도 불구하고 수학적 시각화에 관한 연구는 계속해서 주목을 받아왔고 그 연구의 필요성은 강조되고 있다. 따라서 수학적 시각화에 관한 연구를 통해 교수 학습의 향상을 이루려는 학자들의 노력은 '수학교육의 발달'이라는 큰 맥락에서 볼 때 매우 가치 있는 일이다. 또한 시각화에 대한 여러 초점(시각적 이미지, 시각화 과정, 공간 시각화 능력)의 연구들은 많이 있지만 시각화에 대한 통합적 이론 틀을 제시하고 질적으로 심도 있게 규명하고 있는 연구는 부족하다. IT기술의 발달로 21세기 수학 교육은 테크놀로지 활용에 대한 새로운 패러다임에 국면하고 있다. 또한, Zimmermann과 Cunningham(1991) 이외에 많은 학자들은 수학적 시각화를 활용하는데 테크놀로지의 역할을 강조해 왔다(Steen & Lynn, 1988). 따라서 수학적 시각화를 활용함에 있어 테크놀로지의 효과(유용한 교육용 소프트웨어의 특징, 수학교육에서의 IT기기의 영향 등)를 연구하고, 수학적 시각화를 활용한 효율적인 교육 콘텐츠를 개발하는데 있어 수학적 시각화에 대한 종합적이면서 분석적인 연구가 반드시 선행되어야 할 것이다. 그리고 기존의 연구보다 세분화된 구성요소와 그 활용 과정을 구체적으로 규명하기에 위해서는 충분한 추론 능력을 가지고 자신의 문제 해결 과정을 다양하고 명확하게 표현할 수 있는 높은 수준의 인지발달단계에 속한 학생들이 연구 참여자로서 적절할 것이다. 따라서 본 연구의 목적은 고등학교 2학년 학생들을 통하여 수학적 시각화의 구성 요소를 알아보고, 각각의 시각화 구성 요소가 수학 문제 해결 과정에서 어떻게 활용되는지를 알아보고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 위해 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

1. 고등학생들이 가지고 있는 수학적 시각화의 구성 요소는 무엇인가?
2. 고등학생들이 가지고 있는 수학적 시각화의 구성 요소를 수학 문제 해결 과정에서

어떻게 활용하는가?

Ⅱ. 문헌 고찰 및 이론적 배경

1. 문헌 고찰

20세기 중반 이후 수학교육의 시각화에 관한 연구를 개괄해 보면, 시각화에 관한 연구는 1970년대 후반과 1980년대 초에 심리학을 기초로 시작되어 현재에 이르기까지 지속적으로 연구가 이루어지면서 발전해왔다. 1980년대에 이르러서 양적연구와는 다른 질적 연구가 인간의 시각화된 수학적 사고에 대해 효과적인 통찰력을 제공하였기 때문에 시각화에 대한 다양한 질적 연구가 수행되었다. 특히 이 시기의 연구들(Bishop, 1989; Lean & Clements, 1981; Presmeg, 1986)을 통해서 시각화와 관련된 다양한 개념들이 정리되고 규명되어졌다. 시각화가 수학교육의 중요한 연구 분야로서 인식되었던 시기는 1990년대 이르러서이며, 특히, Presmeg (1986)의 연구가 이후 수학교육의 시각화에 관한 연구에 커다란 분기점이 되었다(Presmeg, 2006). 1990년대 이후, 수학교육의 연구에서 시각화는 연구 쟁점으로서 많은 연구자들에게 주목을 받아왔다. 그 시기의 시각화에 관한 연구들은 크게 4가지로 분류할 수 있다. 첫째는 시각화 개념에 기초한 연구로서 시각적 이미지(Dörfler, 1991; Dreyfus, 1991; Kosslyn, 1995), 시각화 과정(류현아, 2008; 류현아・장경윤, 2009; Campbell, Collis, & Watson, 1995), 시각적 추론과 증명(이종희・김선희, 2002; 홍진곤・권석일, 2004; Barwise & Etchemendy, 1991; Dreyfus, 1991; Hanna, 2000), 공간 시각화 능력(Hoffer, 1977; McLeay, O'Driscoll-Tole, & Jones, 1998) 중 어느 한쪽에 초점 둔 연구들이다. 두 번째는 시각화가 주는 효과(류희찬・이지요, 1993; 문광호・우정호, 1999; Arcavi, 2003; Wheatley, 1991)와 학습 장애 또는 기피현상(Eisenberg & Dreyfus, 1991; Hoz, 1981; Knauff & Jonson-Laird, 2002)과 같은 수학 학습의 효과에 관한 연구들이다. 세 번째는 시각화에 의한 교육과정 개발과 관련된 연구로서 대수, 기하 영역 또는 미적분과 함수와 같은 특정 내용 영역에 관한 연구들(Ainley, 1994; Arcavi, Hadas, & Dreyfus, 1994; Chazan & Bethel, 1994; Solano & Presmeg, 1995; Warren, 2000; Yerushalmy & Gafni, 1991)이다. 마지막 네 번째는 시각화와 테크놀로지(소프트웨어, 역동적 이미지)에 관한 연구(Arcavi, 2003; Hadas & Archavi, 2001; Zimmermann & Cunningham, 1991)가 있다. 2000년대 들어서, 수학적 시각화에 관한 연구는 선행연구들을 기반으로 더 발전되었거나 기존의 연구와 다른 참신하고 다양한 초점의 연구들이 이루어졌다. 특히 기존의 연구를 토대로 시각화에 관한 통합적인 이론적 틀을 마련하는 연구(Gutiérrez, 1996; Kadunz & Sträßer, 2004), 기호학적 이론들(표상, 다이어그램, 유추 등)과 시각화와의 관계를 규명한 연구(Archavi, 1999; Duval, 1999), 그리고 시각화와 행동과의 관계를 규명한 연구(Arzarello, Ferrara, Robutii, & Paola, 2005)들이 이루어졌다.

초기의 수학적 시각화에 관한 중요 연구로서 Presmeg (1986)의 연구를 들 수 있다. 그는 고등학교 학생 54명을 대상으로 하여 시각화에 관한 각종 용어(시각적 이미지, 시각적 방법과 비-시각적 방법, 수학적 시각성(visuality), 시각주의자와 비시각주의자, 시각적 설명, 시각성 교수, 시각적 교사와 비시각적 교사)를 정리하였고, 시각적 이미지의 분류 및 시각화 과정의 한계와 장점을 규명하였다. 또한 시각주의자들의 학습 장애, 시각적 교수 방법의 영향, 효과적인 시각화 학습을 위한 제언 등을

그의 연구를 통해 제시하였다.

Gutiérrez (1996)는 선행연구를 기반으로 하여 수학적 시각화에 관한 이론적 틀을 구성하여 제시하였다. 그는 시각화를 구성하는 개념에 대해서 자세히 분석하여 기술하였으며, 더 나아가 3-차원 기하 문제를 역동적 소프트웨어를 가지고 해결할 때 학생들의 행동에 관하여 사례 연구를 실시하였다. 특히 그의 연구는 학생들의 정신적 이미지와 시각화 과정, 시각화 능력에 대해서 연구 초점이 맞춰져 있다.

본 연구는 시각화에 관한 통합적인 이론적 틀을 마련하는 연구라고 할 수 있다. 그러나 Gutiérrez는 수학적 시각화 요소의 개념들을 단순히 통합적으로 제시하고 있는데 반해, 본 연구는 구성요소를 질적 사례를 통해 더 세분화하고 그것을 어떻게 활용하는지 심도 있게 분석하고 있다.

2. 이론적 배경

가. 시각화의 기원과 의미

19세기 초부터 심리학에서는 감각(시각, 청각, 후가, 촉각, 미각)과 그들 사이의 상호연결을 통한 정신적 이미지군(mental imagery)에 관한 연구가 널리 이루어졌다. 그러나 20세기 초에 행동주의가 유행하게 되면서 이미지군에 관한 연구는 심리학 연구의 주류에서 점점 멀어지게 되었고(Richardson, 1969), 상대적으로 20세기 중반 이후부터 심리치료와 행동수정주의 분야에서 시각적 이미지군(visual imagery)에 관한 연구가 지속적으로 이루어졌다.

시각화에 대한 의미를 설명하기 위해서 여러 연구들(Gutiérrez, 1996; Lean & Clements, 1981; Nemirovsky & Noble, 1997; Presmeg, 1986; Zimmermann & Cunningham, 1991)은 청각이나 촉각, 특히 시각(vision)에 의해 이루어지는 시각적 이미지에 대한 지각 및 조작에 초점을 맞추었다. 또한 대부분의 연구들은 시각화의 의미를 고려할 때 기본적으로 이미지(image), 이미지군, 정신적 이미지(mental image), 시각적 이미지(visual image), 표상(representation), 공간 능력(spatial ability) 등을 언급하여 설명하였다(Gutiérrez, 1996). 시각화는 크게 수학적 내용을 시각적 표현에 의해 제시한 정적인 것과 컴퓨터나 영화를 이용한 동영상과 같은 동적인 것으로 나누어서 생각해 볼 수 있으나(문광호 · 우정호, 1999), 본 연구에서는 시각화를 고찰할 때 그 구분을 명확히 고려하지 않을 것이다.

'시각화'라는 용어는 지난 200년간 다양한 방식으로 연구 논문에서 사용되어져 왔으며 이 용어가 어떻게 사용되어질 것인가에 대해서 명확히 할 필요가 있다(Presmeg, 2006). 그러기 위해서는 우선적으로 이미지, 이미지군, 정신적 이미지, 시각적 이미지에 대한 구체적인 정의를 살펴볼 필요가 있고, 이를 통해 시각화 개념에 대한 그 범위와 의미를 제한할 것이다.

이미지에 대한 정의는 '마음속에 영상(a picture in the mind)'으로 보고 있으며(Clements, 1982), 이미지군은 '어떤 대상이 감각 기관을 통해서 지각되어지지 않지만, 대상에 대한 인식과 상응하여 발생하는 정신적 활동'으로 정의되어지고 있다(Lean & Clements, 1981). 따라서 이미지군은 이미지에 비해 집합적이고 포괄적인 과정 중심의 개념이라 볼 수 있다.

시각화의 개념을 좀 더 구체화하고 명료화하기 위해서는 시각적 이미지군에 대한 개념을 살펴 볼 필요가 있다. Presmeg (1986)은 '시각적 이미지군에 대해서 시각적이거나 공간적인 정보를 묘사하는 정신적 스키마'로 정의했다. 그가 실시했던 고등학교 수학 수업에서의 시각화 연구를 통해서 그는 본인의 정의가 Clements (1982)의 이미지에 대한 개념과는 합치되지 않

지만, 모양・패턴・형태를 묘사하는 일종의 이미지군을 포함하기에 충분히 포괄적이라고 설명하였다. 또한 언어, 수, 수학적 기호들이 수의 (배열)형태(number form)를 나타내는 수나 대수적 표현에 의한 이미지군을 형성하는 가능성에 대해서도 이미지군의 정의에 포함될 수 있다고 보았다(Arnheim, 1969; Paivio, 1971). 물론 다이어그램 역시 시각적 이미지라 할 수 있다(Piaget & Inhelder, 1971). 특히, Lean과 Clements (1981)는 시각적 이미지를 '마음의 눈(the mind's eye)에서 그림이 떠오르는 이미지군'로 정의하고 있다. 이와 유사하게 Dreyfus (1995, p.3)는 시각적 이미지를 '강한 시각적 요소를 가진 정신적 이미지'로 제한하고, 정신적 이미지는 (외적) 시각적 정보로부터 초래될 수 있다고 보았다.

이처럼, 시각화 연구에서 사용되는 용어들은 연구자들의 일반적인 동의가 이루어지지 않고 다양한 용어를 통해서 설명되고 있는데, 예를 들면 '시각화'와 유사한 의미로서 '공간적 사고'를 사용할 수 있는 경우이다. 이에 대해서 Gutiérrez (1996)는 여러 학자들(Bishop, Presmeg, Yakimanskaya)이 시각화를 설명했던 여러 요소들을 통합하고자 하였다. 특히, 그는 '정신적 이미지'를 가장 기본적인 요소로 간주하였다. 또한 '정신적 이미지'를 어떤 외적인 도움 없이 기억으로부터 마음속에서 형성되는 준-영상(Quasi-picture)적인 것으로 간주하면서 Kosslyn (1980)의 정신적 이미지 이론을 통해 좀 더 구체화하여 설명하고 있다. Kosslyn (1980)에 의하면 정신적 이미지는 두 가지 주요한 요소로 나눌 수 있는데, 첫째는 외적 표상(a surface representation)으로서 활동기억(active memory)에 나타나는 준-영상적인 존재이고, 둘째는 내적 표상으로서 외적 표상에 의해 형성되어지는 장기 기억에 저장된 정보를 말한다. 따라서 정신적 이미지는 마음속에서 저장되어 있거나 형성되어진 것으로 정의할 수 있다.

Gutiérrez (1996)에 의하면 Yakimanskaya, Dreyfus, Presmeg이 말한 공간 이미지, 정신적 이미지, 시각적 이미지가 서로 의미하는 바가 유사하다고 언급했다. 그는 이 용어들의 의미를 통합하여 정신적 이미지를 '시각적이거나 공간적인 요소에 의한 수학적 개념, 또는 성질의 인지적 표상 종류'로 규정하였다. 정신적 이미지를 기본적인 요소로 하여 시각화를 '수학 문제를 해결하거나 수학적 성질을 증명할 때 내적이든 물질적이든 시각적이거나 공간적인 요소를 사용하는 일종의 추론'으로 정의하고 있다.

또한, Zimmerman과 Cunningham (1991)은 수학적 시각화를 '정신적으로 또는 종이와 펜, 테크놀로지의 도움(여러 가지 다른 방법으로) 등을 통해서 이미지를 형성하는 과정이고 수학적 발견과 이해에 효과적으로 이미지를 사용하는 것'으로 정의하였다. 따라서 수학적 시각화는 수학적 개념이나 수학적 문제를 나타내는 적절한 다이어그램을 그리거나 문제 해결 또는 이해를 위해서 다이어그램을 정확하게 사용하는 학생들의 능력이라고 할 수 있다.

어떤 연구자들은 '내적인' 정보와 '외적' 이미지 사이에서 만들어지는 연결 과정에 통해 시각화를 설명하고자 했다. Schnotz, Zink, 그리고 Pfeiffer (1995)는 과정 설명에 관한 정보 처리 유형 중에 시각화를 '시공간적 형상에서 정신적 모델로의 구조-사상(structure-mapping)의 과정'이라 설명하였다. 또한 Zazkis, Dubinsky, 그리고 Dautermann (1996)도 시각화 과정의 범주를 설명할 수 있는 더 정확한 정의내리고자 할 때, 시각화가 '시각주의자(visualizer)'의 '마음속에서'만 순전히 발생되는지 아니면 (외적인) 그림, 대상, 또는 컴퓨터 이미지를 통해서 이루어지는지와 같이 두 경우로 나누어 시각화를 다루어야 한다고 주장하였다.

결국, 시각화에 대한 더 정확한 정의를 위해서는 시각화를 학습자의 '마음' 또는 '어떤 외적 매개물' 중에 하나로서 그 과정을 제한하기 보다는 두 가지 사이의 교류를 통해서 의미가 형성되는 것으로 정의하는 것이 바람직하다. Zazkis, Dubinsky, 그리고 Dautermann은 역시 외적인 것(종이 또는 컴퓨터 화면)과 내적인 것(마음속) 사이에 구분을 지어 시각화를 설명하면서도 개인의 내적 과정과 외적 대상에 의한 과정 둘 다를 인정하고 있다(Nemirovsky, & Noble, 1997).

따라서 본 연구에서는 수학적 시각화를 수학 문제를 해결하거나 증명하는데 있어 수학적 정보를 주고받고, 설명하고, 사고하고, 미지의 수학적 아이디어를 발달시키고, 수학적 발견과 이해를 높이기 위한 목적으로 상상하거나 해석하는 과정·능력·결과물 또는 마음속이나 종이, 테크놀로지 도구 등을 통하여 그림, 이미지, 다이어그램을 사용하고 반영하는 것으로 정의하였다(Arcavi, 2003, Hershkowitz et al., 1989, Zimmermann & Cunningham, 1991).

나. 시각화 요소

수학적 시각화는 시각화 요소를 활용하는 과정이다. Gutiérrez(1996)는 시각화의 4가지 주요 요소로서 정신적 이미지(mental images), 외적 표상(external representations), 시각화 과정(process of visualization), 시각화 능력(abilities of visualization)을 제시하였다. 본 연구에서도 문헌 연구를 기반으로 하여 시각화의 구성 요소를 정신적 이미지, 외적 표상, 시각화의 과정, 공간 시각화 능력(spacial visaulization)으로 제시하였다. 여기서 정신적 이미지는 마음속에 나타나는 표상요소들이며, 외적 표상은 외적 이미지로서 나타나는 언어적 회화적 요소들이라 할 수 있다. 또한 정신적 이미지와 외적 표상을 매개로 하여 문제를 해결하거나 추론하는 과정이 시각화 과정이다. 마지막으로 내·외적으로 정신적 이미지 또는 외적 표상을 공간적으로 인지하고 문제 해결을 위해서 이미지를 조작할 수 있는 능력 요소들을 공간 시각화 능력이라고 볼 수 있다.

1) 정신적 이미지

정신적 이미지는 시각적이거나 공간적인 요소에 의한 수학적 개념, 성질의 인지적인 표상이라 할 수 있다(Gutiérrez, 1996). 정신적 이미지는 시각화의 가장 기본적인 요소이고, Presmeg(1986)이 말한 시각적 이미지와 그 개념이 유사하다고 할 수 있다. 특히, Presmeg은 확률, 함수해석학, 해석기하학과 같은 수학에서의 특정 영역에서 시각적 이미지들을 확인하는 연구를 실시하였다. 그는 일반적으로 어떤 문제를 해결하는데 구체적 이미지, 운동감각 이미지, 역동적 이미지와 같은 몇 가지 유형의 이미지들만이 사용되어질 수 있다고 언급하였다. Presmeg(1986)과 유사하게 Dörfler (1991)도 정신적 이미지를 분류하여 제시하고 있다. 그는 의미가 명제적인 접근과는 반대로 구체적인 '정신적 이미지'에 의해 생성된다고 주장하였다. 그의 이론을 보면 정신적 이미지 스키마타(schemata)[2]에는 '구체적 전달자(carriers)'(예를 들어, 다이어그램)와 행동 프로토콜을 포함하고 있으며 4가지 유형의 이미지 스키마타를 구체적으로 제시해주고 있다. 주목해야 할 것은 4가지 유형의 이미지 스키마타가 Presmeg이 제시한 5가지 이미지군의 유형과 거의 상응되어진다는 것이다. <표 II-1>는 Dörfler의 이미지 스키마타와 Presmeg의 이미지 유형의 비교를 나타낸다(Presmeg, 2006).

2) 스키마타(schemata)는 스키마(schema)로 구성된 것을 의미한다.

<표 II-1> Dörfler의 이미지 스키마타와 Presmeg의 이미지 유형의 비교

Dörfler의 이미지 스키마타 유형	Presmeg의 이미지 유형
회화적(Figurative, 직접적으로 인식되는) 스키마타	구체적 이미지군
운동적인(Operative, 전달자를 가지고 움직이는) 스키마타	운동감각 이미지군
관계적인(Relational, 구체적 전달자의 변형) 스키마타	역동적 이미지군
기호적(Symbolic, 기호로 된 공식과 공간적인 관계) 스키마타	공식에 대한 기억 이미지
·	패턴 이미지군

2) 외적 표상

시각화와 관련된 외적표상은 정신적 이미지를 만들어 내거나 변형시키거나 시각적 추론이 가능하도록 도울 수 있는 사진, 그림, 다이어그램 등을 포함하는 일종의 언어(verbal) 또는 그래프 표상을 말한다(Gutiérrez, 1996). Gutiérrez는 외적 표상이 절대적인 특성을 가지고 있기 보다는 개인의 표상 사용 방식에 의존되는 것으로 보고 있다. Krutetskii (1976)가 수학적 추론의 유형으로서 기하적(Visulizers[3]), 분석적(non-visulizer[4]), 조화적(기하적+분석적) 추론으로 나누었던 구분을 통해서도 외적 표상이 개별적인 특성에 더 의존된다는 것을 보여준다. Krutetskii에 따르면, 분석적 유형은 시각-영상적(visual-pictorial) 방법 보다 언어-논리적(verbal-logical) 방법을 선호하는 사람들을 말하고, 기하적 유형은 시각-영상적 방법을 선호하는 사람들을 말한다. 마지막으로 조화적 유형은 언어-논리적 방법과 시각-영상적 방법을 자연스럽게 둘 다 사용하는 사람들이다.

3) 시각화 과정

시각화는 결과의 형태로 머물러 있기 보다는 주어진 상황에 따라 변화하는 실행 과정이라고 볼 수 있다(류현아 · 장경윤, 2009). 또한 시각화 과정은 시각적 이미지에 의한 정신적이거나 육체적인 행동(수행)이라 볼 수 있다(Gutiérrez, 1996). 시각화 과정은 여러 연구(류현아 · 장경윤, 2009; Bishop, 1983; Bishop, 1989; Gutiérrez, 1996; Kosslyn, 1983; Yakimanskaya, 1991)에 의해 분류되어져 왔다. Gutiérrez (1996)은 그의 연구를 통해 시각화를 두 가지 과정으로 분류하였는데, 하나는 정신적 이미지를 만들기 위한 '정보에 시각적 해석' 과정이고, 다른 하나는 정보를 생성하기 위한 '정신적 이미지 해석'과정이라고 언급하였다. 이는 Bishop (1983)이 설명했던 시각적 처리 과정, 도형의 정보 해석 과정과 일치하는 것이다.

Bishop (1983)은 시각화를 두 가지 과정으로 분류하고 각 과정에서 필요한 능력을 기술하였다. '시각적 처리(visual processing, 이하 VP) 능력'은 추상적인 관계와 도형이 아닌 정보를 시각적인 용어로 해석하는 것, 시각적 표상과 시각적 이미지를 변형하거나 조작하는 것을 포함한다고 설명하였다. 그러나 이 능력은 주어진 자료의 형태와는 관련 없다(P. 184). 또 다른 능력은 '도형의 정보 해석(interpreting figural information, 이하 IFI) 능력'으로 모든 형태의 기하 연구, 그래프, 차트, 도표에서 규정된 시각적 정보들, 공간적 어휘에 대한 지식, 시각적 이미지들을 읽고 해석하는 능력을 의미한다고 하였다. 이런 시각화 과정은 주어진 자료와 개

3) Visualizer는 시각주의자로서 시각적이거나 비-시각적인 방법에 의해 해결되어질 수 있는 수학적 문제를 접했을 때, 시각적인 방법 사용을 더 선호하는 사람을 말한다(Presmeg, 1986).

4) Non-visualizer는 비시각주의자로서 시각적이거나 비-시각적인 방법에 의해 해결되어질 수 있는 수학적 문제를 접했을 때, 시각적인 방법을 선호하지 않는 사람이다(Presmeg, 1986).

인적 관심 사이의 상호작용에 의해 전적으로 결정되어진다(예를 들어, 특정 수학 문제를 수행하는 방식은 다양하다). 즉, 이런 능력들은 개인의 선호도, 시각화 했던 기억, 적절한 시각화를 상기시키고 선택하는 능력, 선택된 시각화를 적절하게 활용하는 능력과 상당히 관련되어 있다(Bishop, 1989). 이외에도, Kosslyn (1983)은 Bishop의 연구보다 더 세분화하여 시각화의 과정을 정신적 이미지를 생성(image generation)하는 과정(VP에 해당함), 이미지를 면밀히 관찰하고 분석(image inspection)하는 과정(IFI), 이미지를 유지(image maintenance)하는 과정(IFI), 정신적 이미지를 다른 형태의 이미지나 정보로 변형(image transformation)하는 과정(IFI)으로 분류하고 있다.

4) 공간 시각화 능력

Hamley (1935)에 의한 수학적 능력의 정의를 살펴 볼 때, 수학적 능력은 일반 지능, 시각적 이미지군, 수와 공간적 구성을 인지하고서 그 구성을 정신적인 패턴으로 이해하는 능력(공간 시각화 능력)으로 구성된다. 따라서 공간 시각화 능력은 수학적 사고에 중요한 부분을 차지한다고 볼 수 있다.

공간적 능력은 정신적 이미지를 형상화하고 이미지들을 마음속으로 조작하는 능력을 의미한다(Lean & Clements, 1981; McGee, 1979). 또한, 공간 시각화 능력은 2차원 또는 3차원의 주어진 자료(대상)를 정신적으로 회전하거나, 조작해보거나, 비틀어 돌려보는 능력이 포함되며, 시각화에 기본적인 요소로 고려될 수 있다(McGee, 1979). 공간 시각화 능력에 관련된 연구들(Del Grand, 1987; Gutiérrez, 1996; McGee, 1979)은 오래전부터 지속적으로 활발하게 이루어져왔다. 특히, McGee (1979)는 그의 요인 분석 연구(factor analytic study)에서 공간 능력에 대한 두 가지 구별되는 요소를 강조하였는데, 하나는 위에서 설명한 공간 시각화 생성 능력이고 다른 하나는 공간 방향화(orientation) 능력이라 하였다. 공간 방향화 능력은 주어진 시각적 패턴 내에서 요소들의 배열을 이해하고, 공간이 형상화된 것에서 방향 변화에 혼란을 느끼지 않으며, 보는 시각에 따라 공간의 방향을 결정하는 능력이 포함한다. 그는 공간 능력의 요인 조사이외에도 공간 시각화와 공간 방향화 능력에 관한 성별 차이를 조사하였고, 특히 공간 능력 테스트에서 환경적, 발생론적, 호르몬, 신경학적인 요인들의 영향을 자세히 설명하고 있다. Gutiérrez (1996)는 주어진 문제에 대해서 구체적인 시각화 과정을 수행하기

<표 II-2> 공간 시각화 능력의 유형과 비교

<table>
<tr><th>Gutiérrez (1996)의 유형</th><th>Del Grande (1987)의 유형</th><th>McGee (1979)의 유형</th></tr>
<tr><td>정신적 회전 (Mental Rotation)</td><td>·</td><td>공간 시각화 (생성)능력</td></tr>
<tr><td>도형-배경 인식 (Figure-ground Perception)</td><td>도형-배경 인식</td><td rowspan="6">공간 방향화 능력</td></tr>
<tr><td>지각 항등성 (Perceptual Constancy)</td><td>지각 항등성</td></tr>
<tr><td>공간적 위치 인식 (Perception of Spatial Positions)</td><td>공간 내 위치 인식</td></tr>
<tr><td>공간적 관계 인식 (Perception of Spacial Relationships)</td><td>공간적 관계성 인식</td></tr>
<tr><td>시각적 구별 (Visual Discrimination)</td><td>시각적 구별</td></tr>
<tr><td>·</td><td>눈-운동신경의 조정</td></tr>
</table>

위해서는 시각화 능력을 보유하고 향상시켜야 한다고 주장하였다. 그는 풀고자 하는 수학 문제의 특징과 형성된 이미지에 따라서 몇 가지 시각화 능력(위에서 언급된 공간 시각화 능력의 개념과 유사하다) 중에 학생들이 선택을 해야 한다고 주장했다.

<표 II-2>는 Gutiérrez에 의해 주장된 시각화 능력의 유형과 Del Grande (1987)와 McGee (1979)의 공간 시각화 능력 유형과의 비교를 보여준다.

III. 연구 방법

1. 참여자

본 연구의 참여자들은 경기도 남양주에 소재한 A고등학교 2학년 학생들로서 현재 학교에 재적 중인 인원을 무작위로 30명 추출하여 연구를 실시하였다. 연구에 참여한 30명의 학생들 중 남학생은 15명, 여학생은 15명이었고, 1명(17세)을 제외하고는 나머지 29명 모두가 18세였다. 또한 이들 중 문과계열 학생은 26명, 이과계열은 3명, 예체능계열은 1명이었고, 모든 학생들이 '공통수학'과 '수학Ⅰ' 과목의 전 영역을 배운 적이 있었다. 연구에 참여한 학생들의 최근 수학 성취도(지난 학기의 수학 성적)는'수, 우, 미, 양, 가' 척도에 빗대어 볼 때, '수' 4명, '우' 9명, '미' 11명, '양' 3명, '가' 3명이었으며 전반적으로 수학 성적이 고르게 분포하고 있었다. 본 연구는 수학 문제 해결 과정에 시각화 요소를 확인하고 그 요소의 활용을 심도 있게 분석하는데 목적이 있다. 연구 참여자가 문제해결을 위한 충분한 추론능력을 가지고 있고, 자신의 사고 과정을 명확하게 표현할 수 있어야 한다. Inhelder와 Piaget (1958)는 학생의 추론 발달과 관련하여 형식적 조작기에 학생이라도 완전한 속 구조에 도달하는 것은 14-15세 이후라고 지적하였다. 따라서 연구 참여자로서 남녀 비율이 동일하고 성적분포가 고른 고등학교 2학년 학생들을 선정하게 되었다. 연구 참여자 30명은 7 문항으로 구성된 설문지를 통해서 수학적 시각성(mathematical visuality)을 평가하였고, 이 중 수학적 시각성이 높은 상위 10명을 선발하여 수학적 시각화 요소를 분석하고 10명 중 인터뷰가 가능한 5명에 대해 연구자가 개별 임상 면담을 실시하였다. 수학적 시각성이란 시각적 방법이나 비시각적 방법 중 어느 것을 사용하든지 해결 할 수 있는 문제를 접했을 때, 시각적인 방법[5]을 선호하는 정도를 말한다(Presmeg, 1986). Krutetskii(1976)는 학습에 핵심적인 부분으로서 시각적 이미지의 유무가 문제 해결 방법이 시각적인지 아니면 비시각적인지를 결정한다고 지적했다. 따라서 시각성 평가를 위해 시각적 문제 해결을 한 경우는 2점, 비시각적 문제 해결을 한 경우는 0점, 시각적인 방법의 사용여부가 애매한 경우는 1점으로 점수를 산정하였다(Presmeg, 1986). 다음 <표 III-3>는 연구 참여자에 대한 시각성 평가 결과이다.

2. 예비 연구

연구자가 작성한 도구가 연구검사 도구로 적절한지를 알아보기 위하여 B고등학교 문과계열 2학년생 2명을 대상으로 2010년 8월 23

5) 시각적 (문제 해결) 방법(visual method)은 문제 해결에서 가장 핵심적인 부분으로서 추론이나 대수적인 해법을 이용했더라도 (다이어그램이 포함될 수도 그렇지 않을 수도 있는) 시각적 이미지를 수반하고 있는 것을 말한다. 비시각적 (문제 해결) 방법(nonvisual method)은 문제 해결에 핵심적인 부분으로서 시각적 이미지를 포함하지 않는 경우이다(Presmeg, 1986).

<표 III-3> 연구 참여자의 시각성 평가 결과(상위 10명)

번호	코드	성별	수학성취도	문항 유형에 따른 점수										총점 (16)	면담참여여부
				시각화과정 · 외적표상				공간시각화 능력							
				1번 (2)	2번 (2)	3번 (2)	4번 (2)	5번 (2)	6번 (2)	7-(1)번 (2)	7-(2)번 (2)	7-(3)번 (2)	7-(4)번 (2)		
1	A	남	수	1	1	1	1	2	2	1	1	0	0	10	x
2	B	남	우	2	1	2	2	0	2	1	0	0	0	10	x
3	C	남	수	0	2	1	1	0	2	1	1	0	1	9	x
4	D	남	양	0	0	1	0	2	2	1	1	1	1	9	o
5	E	여	미	0	0	2	0	2	2	1	1	0	0	8	o
6	F	여	미	0	0	2	0	2	2	1	1	0	0	8	o
7	G	남	우	0	0	2	0	2	2	1	1	0	0	8	o
8	H	여	미	0	0	2	0	2	2	1	1	0	0	8	o
9	I	남	수	0	0	1	2	0	2	1	1	0	0	7	x
10	J	여	우	0	0	1	0	2	2	1	1	0	0	7	x

일부터 2010년 9월 5일까지 2주간 2가지 종류(1차 시각성 평가지, 2차 평가지)의 설문지 문항을 가지고 연구를 실시하였다. 예비 연구 결과에 대해서 C대학 수학교육 전공 대학원생 2명과 2회에 걸쳐 논의를 하였으며, 이 과정에서 초안으로 작성한 연구도구의 오류를 수정하고 문항의 난이도를 조절하였다. 이후 수학교육 전문가 2명의 조언을 통하여 연구 도구를 확정하였다.

3. 연구 절차

본 연구는 수학적 시각화의 구성 요소를 알아보기 위해서 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 2010년 7월부터 2010년 12월까지 6개월간 수행되었다. 2010년 8월 예비 연구를 실시하고 문항을 수정·보완한 후 본 연구를 실시하였다. 2010년 9월 1일부터 2010년 9월 10일까지 10일간 경기도 남양주 소재에 A고등학교 2학년 학생들 중 재적 인원에서 30명을 무작위 추출하여 연구의 참여 의사를 묻고 참여 여부에 대한 확인을 받았다. 1차적으로, 연구에 참여하게 된 30명 학생들에게 수학 성취도 수준·학습 영역·사회적 배경·수학적 성향을 묻는 자기 관찰 체크 리스트와 사회적 배경 설문을 작성하게 했고, 그 다음 수학적 시각성을 평가하여 연구 목적에 맞는 연구 대상자를 선정하였다. 수학적 시각성 평가를 위한 문항들은 학생들이평가지에 기술한 내용을 토대로 하여 시각화 과정·외적 표상의 사용 여부를 확인하고 공간 시각화 능력을 평가하기 위해서 구성되어졌다. 시각성 평가 결과를 통해서 점수가 높은 상위 10명을 선발하였고 이 중 5명(D, E, F, G, H)은 수학적 시각화의 요소를 더 자세히 알아보기 위한 2차 임상 면담에 참여시켰다. 면담 참여자 선정에 있어 참여하지 못한 나머지 5명(A, B, C, I, J)은 학업, 건강 등의 개인적인 사정으로 인해 면담 참여를 거부하였다. 시각화의 주요 요소인 정신적 이미지의 경우 1차 평가지에 기술된 내용만으로는 분석의 어려움이 있고 연구 결과도 상당히 제한될 수밖에 없다. 따라서 추가적인 임상 면담이 반드시 필요하였다. 수학적 시각화의 요소를 더 명확하게 알아보기 위해 추가적

으로 수학적 시각화 요소에 관한 문항을 구성하였다. 이 문항을 통해 면담 참여자 5명에게 개별 평가를 실시하였으며 동시에 평가 문항에 대해서 관찰 및 면담을 실시하였다. 연구자의 면담과정에서는 2차 평가의 문항 뿐 아니라 이전에 학생들이 풀었던 1차 시각성 평가 문항에 대해서도 반 구조화된(semi-structured) 개별 임상 면담을 실시하였다. 모든 개별 면담은 비디오로 촬영하여 전사했다. 이후 1차, 2차 평가의 결과와 면담 내용을 토대로 분석틀을 고안하고, 그 분석 틀에 기초하여 수학적 시각화의 구성 요소를 범주화하고 분석을 실시하였다. 개별 관찰·면담 자료는 수학적 시각화의 요소를 범주화하고 문제 해결 과정에서의 시각화 요소의 활용을 알아보는데 중요한 분석 자료로 사용되었다.

4. 자료 수집 및 분석

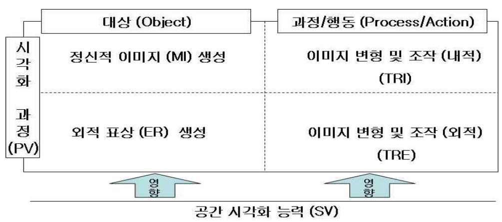
본 연구는 학생들이 작성한 설문지와 평가지(수학적 시각성, 시각화 요소), 면담 과정이 녹화된 비디오 테이프, 면담 과정에서 학생들이 작성한 기록물, 연구자가 작성한 기록물, 녹화 내용에 대한 면담 관찰 일지 등의 자료를 수집하였고, 수집된 자료를 기반으로 일정 비교 분석법(constant comparative method)을 사용하여 분석을 실시하였다.

가. 검사 도구

본 연구에 사용된 검사 도구로는 1차 시각성 평가지의 7문항과 추가적인 시각화 요소를 알아보기 위한 2차 평가지의 4문항이 사용되었다. 2차 평가지는 Russell (1997)의 연구 도구에 포함된 문항 중에서 정신적 이미지, 공간 시각화 능력과 관련하여 문항을 첨가하고, 번역을 실시한 후 문맥을 맞게 수정하여 재구성하였다. 특히, '정신적 이미지'와 시각화 과정에서의 '이미지 조작 및 변형'에 연구 초점을 맞추어 문항을 구성하였다.

나. 분석 방법

연구 참여자가 정신적 이미지를 가지고 어떻게 사고하는지를 확인하는 것은 쉽지 않은 일이다. 따라서 이런 어려움을 해결하기 위한 하나의 방법으로 '발성사고법(Think-aloud method)'을 사용하였다(Newell & Simon, 1972). 이것은 학생들이 과제를 수행하는 동안 순간순간 떠오르는 생각을 입으로 중얼거리며 자유롭게 말하게 함으로써 학생의 사고를 연구자가 확인하고 사고의 과정을 관찰할 수 있다는데 장점이 있다. 평가지의 각 문항에 대한 자료 분석은 작성한 문제 풀이 내용, 발성 사고법에 의한 인터뷰 전사내용, 연구자의 관찰 등을 바탕으로 질적 분석을 실시하였다. 특히, 이론적 배경을 토대로 하여 <그림 III-1>와 같은 분석틀을 구성하였고 수학적 시각화 요소를 정신적 이미지, 외적 표상, 이미지 조작 및 변형(내적 또는 외적), 공간 시각화 능력으로 분류하여 분석을 실시하였다.



<그림 III-1> 수학적 시각화 요소에 관한 분석틀

다음 <표 III-4>는 수학적 시각화에 관한 본 연구의 범주와 Gutiérrez(1996)의 연구 범주와의 비교이다.

<표 III-4> 시각화 구성 요소의 범주화

Gutiérrez (1996)	본 연구의 결과	
정신적 이미지	정신적 이미지	
시각화 과정	이미지 변형 및 조작	내적 이미지 변형 및 조작
		외적 이미지 변형 및 조작
외적 표상	외적 표상	현실적 그림 표상
		도형
		그래프 표상
		언어적 표상
		오류가 포함된 표상
시각화 능력	공간 시각화 능력	공간 시각화 생성 능력
		공간 방향화 능력

본 연구는 시각화 구성 요소에 대해 Gutiérrez의 연구보다 더 세부적인 범주를 구성함으로써 학생들의 수학적 시각화의 활용 과정을 구체적이면서 심도 있게 분석할 수 있는 토대가 되었다. 또한 이런 분석 결과들은 수학 문제 해결의 교수 학습적 효과를 높이기 위해 학생들의 수학적 시각화를 어떻게 유도할 것인가에 대한 올바른 방향을 제시해 줄 것이다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 고등학생들이 가지고 있는 수학적 시각화의 구성 요소

본 연구에서는 5명(D, E, F, G, H) 학생의 사례를 통해서 수학적 시각화의 구성 요소를 분석하고 범주화하였다. 특히, 학생들이 1차, 2차 평가를 통해 시각화를 사용하면서 확인되었던 다양한 표상, 문제 접근 과정, 개별 면담 자료가 시각화 구성 요소의 범주화에 기초가 되었다. 시각화의 구성 요소는 크게 정신적 이미지, 외적 표상, 이미지의 변형 및 조작, 공간 시각화 능력으로 범주화 되었다. 이는 Gutiérrez (1996)가 시각화의 구성 요소로 제시했던 정신적 이미지, 외적 표상, 시각화 과정, 시각화 능력의 범주와 유사한 결과이다. 그러나 본 연구에서는 좀 더 세부적으로 시각화의 구성요소를 분류하였다. 외적 표상은 현실적 그림, 도형, 모델, 오류가 포함된 표상으로 구분하였고, 이미지의 변형 및 조작은 내적 이미지의 변형 및 조작과 외적 이미지의 변형 및 조작으로 세분화 하였다. 또한 공간 시각화 능력의 경우, 공간 시각화 생성 능력과 공간 방향화 능력을 구분하여 범주화하였다 (McGee, 1979). 이런 구성 요소들은 때로는 위계적으로 나타나기도 하였고, 때로는 동시에 혼재되어 나타나기도 하였다.

가. 정신적 이미지

'정신적 이미지'는 학생들이 시각화를 구성하는 가운데 가장 기본적인 요소로 확인되었다 (Gutiérrez, 1996). 11개의 문항에 대한 5명의 학생들의 면담 중 모든 문항에서 정신적 이미지를 관찰할 수 있었다. 특히, 면담 중에 일어나는 침묵, 또는 이미지를 설명을 위한 말과 행동들은 정신적 이미지를 생성하거나 생성된 정신적 이미지에 대한 결과로서 분석을 하였다. 정신적 이미지의 결과가 아닌, 정신적 이미지 생성 과정으로서의 관점에 볼 때 정신적 이미지는 시각화 과정에 포함될 수 있다(류현아 · 장경윤, 2009; Kosslyn, 1983; Yakimenskaya, 1991). 따라서 본 연구에서는 정신적 이미지를 탐구하는데 정신적 이미지의 생성 과정과 정신적 이미지의 결과를 엄밀하게 구분하지 않았다. 본 연구의 정신적 이미지는 시각화를 하는 대상으

로서의 의미가 강조되어진다. 다음 면담 내용은 학생 D의 면담 과정에서 나타난 문제 해결을 위한 정신적 이미지의 사례이다.

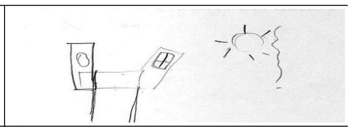
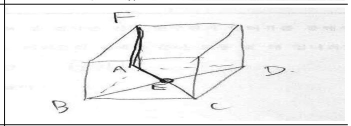
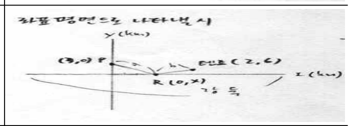
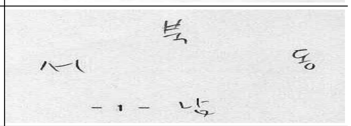
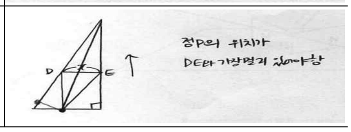
> 00 R : 문제를 푸는데 머릿속에 떠오르는 뭔가 가 있었다면 그것을 자세히 이야기 해 볼래요?
> 01 D : 음...(3초 동안 침묵) 이제, 가장 많이 생각난 게요. 비커에 물을 옮기는데 어떻게 이것을 정확히 맞추나 이런 생각을 많이 했어요. 풀면서도 일단 수학문제이지만 수치가 정확한데, 이것은 하다가 8리터짜리를 5리터짜리로 붓다가 무심코 부으면 넘칠 수도 있잖아요(손동작으로 따르는 시늉을 하며). 솔직히 깔때기가 있는 것도 아니고. 그래서 어떻게 정확히 딱 끊어 넣나 하는 것이요 또 비커에 눈금이 있는지는 모르겠지만 비커의 넓이도 정확히 나와 있지 않으니깐 옮길 때 제한이 되지 않을까하는 생각이요.

학생 D는 1차 평가에 1번 문항을 해결하는데 ‘비커에 담긴 물’을 정신적 이미지로 가지고 있었다(프로토콜 01). 비커에 담긴 물의 양인 “8”이라는 수에 주목하기 보다는 실제 비커에 담긴 물의 이미지를 문제를 해결하는 내내 고려하고 있었다.

나. 외적 표상

‘외적 표상’은 11개의 문항 중 2차 평가의 1번 문항을 제외하고 나머지 모든 문항에 대해서 학생들이 평가지에 작성한 내용과 면담 중에 작성한 내용을 통해서 확인되었다. 특히, 외적 표상은 문제 유형에 따라 다양하게 나타났는데 본 연구에서는 ‘현실적인 그림 표상’, ‘도형’, ‘그래프 표상’, ‘언어적 표상’, ‘오류가 포함된 표상’으로 나누어 범주화 하였다. 또한, 한 문항에서 대해서 둘 이상의 외적 표상의 유형이 나타나는 경우도 있었다. 2차 평가의 1번 문항의 경우에는 5명의 학생 모두가 외적 표상을 나타내지 않았고 정신적 이미지에 의해서만 문제를 해결하였다. 다음 <표 IV-5>는 학생들이 나타낸 외적 표상의 5가지의 범주에 대한 대표적인 사례들이다.

<표 IV-5> 학생들의 ‘외적 표상’의 예

현실적인 그림 표상	학생 E	
도형	학생 H	
그래프 표상	학생 D	
언어적 표상	학생 D	
오류가 포함된 표상	학생 F	

첫 번째, ‘현실적인 그림 표상’의 경우 학생들이 2차 평가 2번 문항을 해결 할 때 머릿속으로 상상되는 현실 상황을 그림으로 표현한 것이다. 학생들(D, E, G, H)은 문제에 제시된 문, 태양, 창문, 도로를 그림을 표현하였다. 또한 1차 평가의 3번·4번과 2차 평가의 3번·4번 문항은 도형에 관한 문제 유형이었지만, 문제에 도형을 그림으로 제시하지 않고 언어적 서술에 의해서만 문제를 제시하였다. 이때, 학생들은 문제를 푸는 과정에서 ‘도형’을 나타내고 있었다. 세 번째, ‘그래프 표상’의 경우 5명 모든 학생들이 1차 평가 2번 문항에서 문제에 제시된 조건을 ‘점과 선’이나 좌표상의 그래프로 표현하였다. 넷째로, ‘언어적 표상’은 단순히 언어로 설명을 기술하는 것이 아니라, 학생 D가 2차 평가 2번 문항을 해결할 때 제

시했던 '동, 서, 남, 북' 방위의 위치와 같이 어떤 패턴이나 관계를 나타내는 경우를 말한다. 마지막으로, '오류가 포함된 표상'은 문제에 대한 이해가 잘못되었거나 문제를 푸는 과정의 실수와 오개념에 의해 오류가 포함된 도형, 그림, 그래프 등을 나타낸 경우이다.

다. 이미지 변형 및 조작

시각화 과정에 관한 선행 연구를 보면, 시각화 과정을 두 가지 과정으로 '시각적 이미지의 생성'과 '이미지의 변형 및 조작' 과정으로 구분할 수 있다(류현아 · 장경윤, 2009; Bishop, 1983; Gutiérrez, 1996; Kosslyn, 1983; Yakimanskaya, 1991). 따라서 시각적 이미지의 생성을 본 연구 결과의 시각화의 구성요소로서 '정신적 이미지'에 포함시킨다면, '이미지 변형 및 조작'은 시각화 과정에 한 범주라고 할 수 있다. 시각화의 구성 요소로서 '이미지 변형 및 조작'은 학생들이 평가지에 작성한 내용들과 면담의 전사내용에 의해 관찰할 수 있었으며, 조금 더 세분화하여 '내적 이미지 변형 및 조작'과 '외적 이미지 변형 및 조작'으로 구분되어 나타났다.

1) 내적 이미지 변형 및 조작

'내적 이미지 변형 및 조작'은 학생들이 구성한 정신적 이미지에 의해서 이루어지는 정신적 조작 활동 과정을 의미한다. 수학 문제 해결 과정에서 시각화의 요소 중 정신적 이미지와 더불어 기본적인 요소로 간주되어진다. 내적 이미지 변형 및 조작은 문제를 해결하는 학생들의 면담 과정 중 말과 행동을 통해서 확인되었으며, 다음 면담 내용은 학생 H의 면담 과정에서 나타난 내적 이미지 변형 및 조작의 사례이다.

03 R : 그런데, 3)번 4)번에서 원이 사각형에 네 변에 모두 다 내접하나요? 이게 정확한 가요?
04 H : 음...아니요...(계속 고민한다. 6초간 침묵)
05 H : 둘 다 다 만날 것 같아요.
06 R : 왜요?
07 H : (손으로) 잘라 보니깐 그래요.

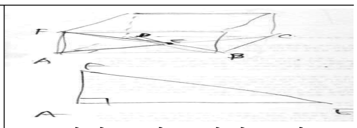
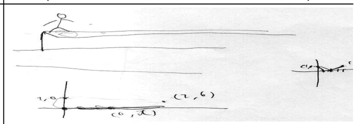
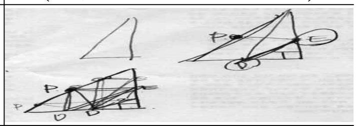
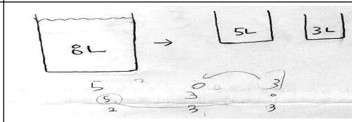
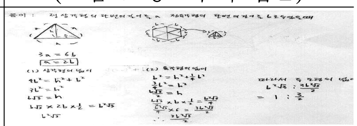
학생 H는 1차 평가의 7번 문항을 해결하면서 '구가 내접된 정육면체'의 외적 표상을 풀이에 그려놓고 평면을 통해 자르는 과정을 머릿속으로 생각하고 있었다(프로토콜 07). 이는 학생 H가 내적 이미지의 변형에 의해서 문제를 해결하려는 시도로 볼 수 있다.

2) 외적 이미지 변형 및 조작

'외적 이미지 변형 및 조작'의 과정은 학생들이 문제에 제시된 그림이나 자신이 구성한 외적 표상에 의해서 이루어지는 구체적인 조작 활동 과정이라 볼 수 있다. 5명의 학생들은 외적 표상의 조작 과정을 구체적으로 다양한 표상(그림, 도형, 그래프 표상 등)에 의해서 표현하였다. 특히, 본 연구에서는 외적 이미지 변형 및 조작의 유형을 4가지로 분류하였다. 그 유형은 '차원 변화에 의한 조작', '다른 외적 표상으로의 전환', '보조선에 의한 조작', '대수(수)적 접근으로의 조작'으로 분류된다. 외적 이미지 변형 및 조작은 문제를 해결하거나 면담을 하는 과정에서 학생들이 작성했던 시각적 자료를 기초로 분석하였으며, <표 IV-6>은 4가지의 유형별 외적 이미지 변형 및 조작의 사례이다.

학생 H와 G는 2차 평가 4번 문항을 해결하는 과정에서 3차원의 입체도형을 그리고 나서 2차원의 평면도형으로 외적 표상을 변형하여 나타내었다(차원에 의한 조작). 또한, 학생 D는 1차 평가 문항 2번을 해결하면서 문제의 조건을 현실적 그림 표상으로 나타낸 다음 좌표평면상에 그래프 표상으로 변형시켜 나타내었다(다른 외적 표상으로의 전환). 그리고 5명

<표 IV-6> 학생들의 ‘외적 이미지 변형 및 조작’의 예

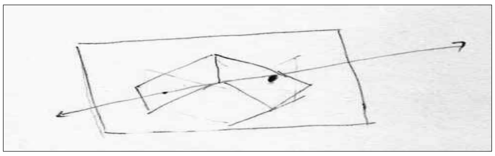
차원 변화에 의한 조작	학생 G	 (3차원 도형→2차원 도형)
다른 외적 표상으로의 전환	학생 D	 (그림 표상→그래프 표상)
보조선에 의한 조작	학생 F	
대수(수)적 접근으로의 조작	학생 E	 (그림 표상→수적 접근)
	학생 D	 (도형→대수적 접근)

의 모든 학생들은 1차 평가 3번 문항과 2차 평가 3번 문항에서 먼저 표현된 도형 내부에 보조선을 그려 외적 표상을 변형시킨 후 문제를 해결하고자 했다(보조선에 의한 조작). 마지막으로 학생 D, F, E, H는 현실적인 그림이나 도형을 나타낸 후 ‘수’, ‘미지수’를 표기하여 문제를 수 또는 대수적 사고를 통하여 해결하기도 하였다(대수적 접근으로의 조작).

3) 공간 시각화 능력

‘공간 시각화 능력’은 시각화의 기본적인 요소로 간주되며 정신적 이미지나 외적 표상을 마음속으로 조작하는 능력이다. 특히, 2차원 또는 3차원의 대상을 회전하거나, 변형(조작)시키거나, 비틀어 보는 능력을 포함하고 있다(Lean & Clements, 1981; McGee, 1979). 1차 평가 5번, 6번 문항은 공간 시각화 능력을 탐구하기 위한 문항으로서 사용되었다(Vladimirskii, 1971). 공간 시각화 능력은 학생들이 평가지에 작성했던 자료들과 면담 과정 중 연구자의 추가 질문에 의해 대답했던 자료들에 의해서 확인되었다. 본 연구에서는 공간 시각화 능력을 알아보기 위해서 학생들에게 2차원, 3차원의 대상을 문제 조건에 따라 조작을 하고 그 결과를 그림으로 표현하도록 요구하였고, ‘공간 시각화 생성능력’, ‘공간 방향화 능력’으로 세분화하여 분류하였다 (McGee, 1979).

08 R : 그러면 대상을 약간 위에서 보면 어떻게 보일지 그려보세요.
・・・(중략)
09 G : 음...(그림을 그리고 있다)
10 G : 이렇게 그려져요.

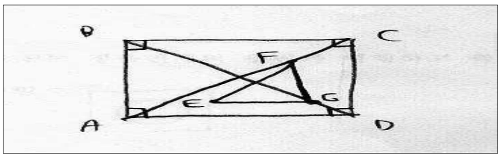


<그림 IV-2> 공간 시각화 능력을 통해 제시한 표상(학생 G).

위의 면담 내용은 학생 G가 1차 평가 문항 6번에 대해서 면담을 실시하던 중 연구자의 추가 질문 ‘문제에 제시된 대상을 다른 방향으로 본다면, 어떻게 그릴 수 있는가’에 대해서 답한 과정이다. 이처럼 공간 시각화 생성 능력은 학생 G가 정신적 이미지를 생성하고 그 대상을 외적 표상으로 형상화할 수 있는 능력을 말한다(프로토콜 09).

11 R : 5번 문제를 볼게요.
12 R : 잘 풀었는데, 답으로 그린 그림은 어느 위치에서 보고 있다고 생각하고 그린 그림인가요?

13 H : 위에서요.



<그림 IV-3> 1차 평가 5번 문항에 제시한 표상(학생 H)

학생 H는 1차 평가 5번 문항에 주어진 그림(대상)에 대해서 관찰자인 자신과의 관계성을 공간적으로 인식하고 있다(프로토콜 13). 이는 Gutiérrez(1996)가 말한 '공간적 위치 인식 능력'으로서 공간 방향화 능력에 한 범주를 보여주는 사례이다.

2. 수학 문제 해결 과정에서 고등학생들이 가지고 있는 수학적 시각화의 구성요소의 활용

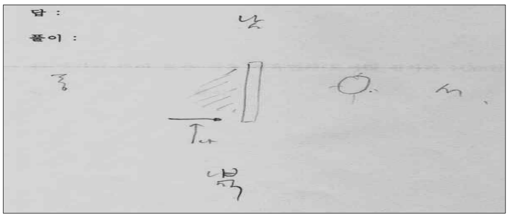
가. 정신적 이미지와 외적 표상의 활용

본 연구에서 사용된 평가 문항들은 공간 시각화 능력을 확인하기 위한 1차 평가 문항 5, 6, 7번을 제외하고 나머지 모든 문항들이 언어적 서술에 의한 문장제 문제였다. 주목할 것은 이런 문제들을 학생들이 해결하면서 외적 표상을 생성하기 이전에 기본적으로 '정신적 이미지'를 구성한다는 것이다. 특히, 문제의 조건에 의해서 생성된 정신적 이미지가 애매하거나 또는 이해가 불명확하거나 '내적 이미지 조작 및 변형'이 어려운 경우에 외적 표상을 구성하는 것으로 확인되었다.

14 D : 2번 문제를 풀 때 정확히 강둑이 수직 위로 3m에 있다는데(3초간 침묵)...
15 D : 이제 이것을 그림으로 그려 보면요. (연습장에 그림을 그리며) 처음에 강이 이렇게 있으면, 이 위로 학생 P가 서 있을 것이고, 이제 이게 어떻게 입체적으로 이렇게 길이 있어서...

학생 D는 1차 평가 2번 문항의 해결 과정을 설명하면서 처음 문제를 읽고 문제 상황에 대한 정신적 이미지를 생성한 후(프로토콜 14), 외적 표상(그림)을 구성하고 있었다(프로토콜 15).

16 G : (문제를 읽으면서 손을 이용해 방향을 가리켜보고 있다)
17 G : (그림을 그린다)
18 G : (손으로 방향을 따져보고, 그림을 그린다)



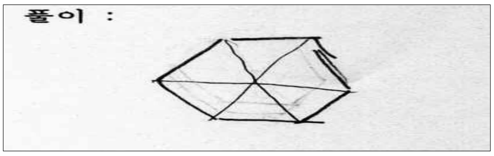
<그림 IV-4> 2차 평가 2번 문항을 풀면서 제시한 표상(학생 G).

19 G : 남쪽을 바라보고 있어요.

위의 내용은 학생 G의 2차 평가 2번 문항에 대한 면담 내용의 일부이다. 학생 G는 문제를 읽고 문제 조건에 대한 정신적 이미지를 생성한 후(프로토콜 16) 그림으로 나타내보고(프로토콜 17), 다시 정신적 이미지를 생성한 후(프로토콜 18) 그림으로 나타내는(프로토콜 18) 반복 활동을 통하여 문제를 해결하고 있었다. 따라서 외적 표상을 생성하기 위해서는 명료한 정신적 이미지가 전제되어야 한다. 학생 G는 초기에 답으로 '남쪽'을 언급했다가 다시 정신적 이미지와 외적 표상을 활용하여 정답을 '북쪽'으로 수정하였다.

학생들 중에는 정신적 이미지를 생성하고 나서 외적 표상을 생성하지 않는 경우도 있었다.

그 이유에 대해서 학생 F는 “머릿속에는 막 생각이 나는데 그것을 그림이나 말로 표현을 못해요. 특히 입체적인 거는요. ‘구’ 같은 거요.”라고 말하였다. 이는 정신적 이미지가 명료하더라도 공간 시각화 능력이 부족할 경우 외적 표상을 구성하지 못하였다. 다음 면담 내용은 학생 F가 공간 시각화 능력의 부족으로 인해 외적 표상을 지속적으로 나타내지 못한다는 것을 확실히 뒷받침 해주고 있다(프로토콜 23).



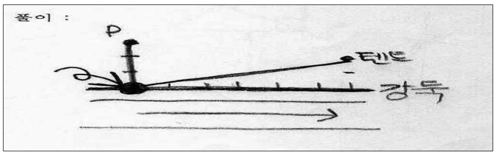
<그림 IV-5> 2차 평가 3번 문항을 풀면서 제시한 표상(학생 F)

20 F : 아..정육각형이 아니라 정육면체네. 입체잖아요.
21 F : 저는 입체를 못해요.
22 R : 정육면체를 못 그리나요?
23 F : 저는 무슨 면체는 잘 못 그리는데...

또한, 학생 개인이 가지고 있는 정신적 이미지가 매우 명료한 경우(정신적 이미지가 학생에게 매우 익숙한 경우)에도 외적 표상을 생성하지 않았다. 특히, 2차 평가 1번 문항에 대해서 5명의 모든 학생들은 외적 표상을 생성하지 않았으며 그 이유를 묻는 추가 질문에 대해서 ‘자신이 매일 보기 때문에 너무 익숙하다’라고 설명하였다(프로토콜 24).

24 E : 왜냐하면, 이런 수학 문제 같은 것은 제가 많이 봤던 것이 아닌데, 집 같은 것은 제가 하루 종일 그 공간에서 생활한단 말이에요. 많이 익숙해져 있고. 머리로요. 집을 굳이 그리지 않아도 머릿속으로 상상이 가능하니깐 빨리 답을 찾을 수 있어요.

한 명을 제외하고 학생 E, F, G, H는 1차 평가 2번 문항에 대해서 <그림 IV-6>와 같이 유사한 오답을 제시하고 있었다.



<그림 IV-6> 1차 평가 2번 문항에 제시한 오답(학생 H)

4명의 학생과 면담을 하면서 위와 같이 답을 쓴 이유를 질문하였는데 학생들은 ‘최단거리는 직선’이라는 정형화된 정신적 이미지를 가지고 있었으며, 이런 이미지에 대한 정형화가 문제 해결의 풍부한 사고를 억제하고 문제의 조건에 대한 부적절한 결과를 이끌어내고 있었다. 이는 Bishop(1989)이 언급했던 시각화에 대한 부정적 영향과도 일치하는 것이다. 특히, 학생 H는 인터뷰를 통해서 정형화된 이미지에 의한 고립된 사고를 잘 보여주고 있었다(프로토콜 26).

25 R : 좋아요. 그러면 왜 여기 그림이 최단거리라고 생각을 했어요.
26 H : 직선이 최고 짧을 것이라고 생각했어요.
27 R : 아. 직선이 제일 짧을 거라고요?
28 H : 예.

・・・(중략)

학생 E는 1차 평가 4번 문항을 해결하면서 오류를 포함하고 있는 외적 표상에 의해 정답과는 거리가 먼 문제 풀이를 제시하였다(<표 IV-5>에 ‘오류가 포함된 표상’ 참고). 그들은 면담과정에서 연구자가 그 문제에 대해 다시 한 번 풀이를 요구했을 때 자신의 실수에 대해서 인지를 하고 풀이를 수정하려고 노력하였다. 그

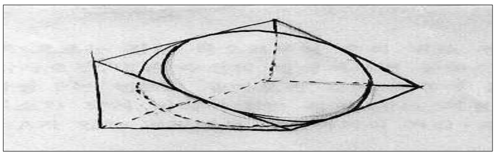
는 '점 P가 빗변에 있다'는 조건과는 다르게 점 P를 밑변에 위치시키면서 문제 해결에 실패하고 말았다. 면담을 통해 확인한 결과, 학생 E는 '빗변'에 대한 개념을 이해하고 있었다. 따라서 오류를 포함하고 있는 외적 표상은 문제 해결의 실패에 상당한 영향을 주고 있었다.

나. 이미지 변형 및 조작의 활용

1) 차원 변화에 의한 이미지 변형 및 조작

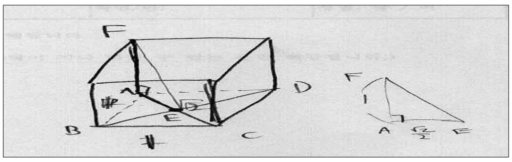
2차원 평면상의 대상보다는 3차원 입체공간의 대상에 대한 이미지의 변형 및 조작을 활용하는 것이 학생들에게 더 어려운 과제였다. 이는 외적 표상을 활용하는 관점에서 2차원 보다 3차원의 대상을 학생들이 잘 표현하지 못하는 결과와도 부합된다. 같은 맥락에서, 고차원의 대상에 대한 이미지 변형 및 조작을 위해서는 충분한 공간 시각화 능력(공간 시각화 생성 능력과 공간 방향화 능력)을 필요로 한다. 또한, 문제 풀이 과정에서 구성된 이미지에 대해서 차원 변화(예를 들어, 3차원 입체도형에서 2차원 평면도형으로 변형)가 있을 때 동일 차원에서 이미지를 변형하고 조작하는 것보다 더 높은 인지적 능력을 필요로 했다. 1차 평가 7-(3), 7-(4)번 문항에 대해서 학생 D, E, F는 정육면체의 이미지를 문제 조건에 맞게 조작하고 나서 단면을 그리도록 요구 했을 때, 단면을 그리기 보다는 오히려 3차원 입체도형을 그대로 그려 놓는 것이 덜 복잡하다고 언급하였다(프로토콜 30, 32). 다음은 학생 D, E의 1차 평가 7-(3) 문항에 대한 면담 내용의 일부이며 <그림 IV-7>는 학생 E가 쓴 풀이 답안이다.

29 R : 3)번 문제의 단면만 어떤 모양인지 자세히 그려볼래요.
30 D : 이게 좀 헷갈려서 그냥 입체로 다 그렸어요.
31 R : 사실은 잘려진 단면만 그리면 되거든요. 근데, 입체적으로 그렸더라고요.
32 E : 단면만 생각하면요. 어디어디인지 구분이 더 안가요. 그래서 아예 다 그리는 게 나아요.



<그림 IV-7> 1차 평가 7-(3)번 문항에 제시한 표상(학생 E)

2차 평가 4번 문항의 경우, 학생 H는 3차원의 대상의 이미지를 2차원의 대상의 이미지로 변형시켰는데, 구성된 2차원의 이미지가 문제를 해결하는데 도움을 주고 있었다.



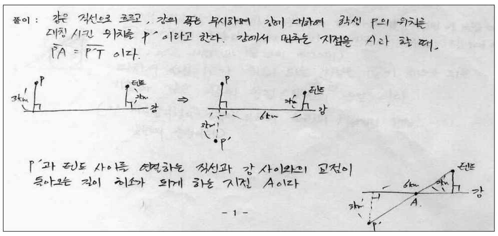
<그림 IV-8> 2차 평가 4번 문항에 제시한 풀이 답안(학생 H)

2) 문제 해결의 탐색·정당화를 위한 이미지 변형 및 조작

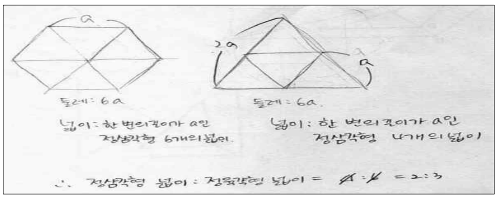
문제 해결에 있어 정신적 이미지와 외적 표상을 생성하는 것이 도움이 될 수 있지만, 답을 추론해가는 과정에 탐색 활동과 도출된 답에 대한 정당화를 위해서는 이미지의 변형 및 조작 과정이 지속적으로 이루어져야 한다. 구성된 이미지를 조작하는 것이 항상 문제에 대한 답을 직접적으로 도출해 내는 것은 아니지만 학생들은 1차 평가 2, 3, 4번 문항의 답을 추론해 내는데 이미지 조작을 매우 효과적으로 활용하고 있었다. 특히, 1차 평가 2번 문항의 경우 학생 A, B, C는 <그림 IV-9>와 같이

그래프 표상을 조작함으로써 문제의 답을 단 시간에 도출해 내었다.

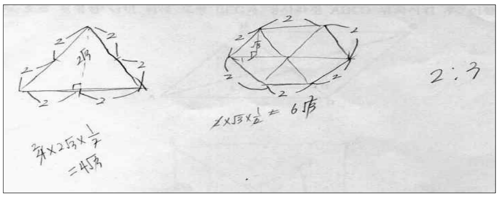
외적 이미지 변형 및 조작으로서 ‘보조선’에 의한 외적 표상의 조작은 이를 어떻게 조작하고 변형하느냐에 따라 효과적인 문제 풀이에 상당한 영향을 주는 것으로 나타났다.



<그림 IV-9> 1차 평가 2번 문항에 제시한 풀이 답안(학생 B)



(학생 C의 풀이)



(학생 J의 풀이)

<그림 IV-10> 1차 평가 3번 문항에 제시한 풀이 답안(학생 C, J)

<그림 IV-10>에서와 같이 1차 평가 3번 문항에 대한 학생 C, J의 풀이 답안을 비교해보면, 학생 C의 풀이 보다는 학생 J의 풀이가 문제의 답을 도출해 내는데 훨씬 효과적인 보조선을 구성하였다는 것을 알 수 있다. 따라서 효과적인 이미지 변형 및 조작 활동은 문제 해결의 시간을 줄여 줄 수 있을 뿐 아니라 답을 도출해내는 분석적인 시각을 갖게 한다. 그러나 주목할 것은 학생들이 시각적 이미지에 의한 조작을 통해 문제를 해결하는 것이 상당히 효과적이라고 인정되지만(프로토콜 35), 문제 해결에 대한 탐색이나 시각화를 통해 도출해낸 답에 대한 정당화를 위해서는 대수적인 접근 방법을 함께 활용한다는 것이다(Vinner, 1989). 1차 평가 3번 문항에 대한 학생 G의 면담 과정을 보면 문제를 해결할 때 그려 놓은 도형이 도움을 주었지만 풀이를 하는 과정에서 도형의 한 변을 ‘2’로 두었고(프로토콜 33), 자신의 풀이에 대한 정당화를 위해서는 한 변의 길이를 ‘x’로 두고 대수적으로 접근하려는 경향을 보였다(프로토콜 37).

33 G : 만약에 정육각형 한 변의 길이가 2라고 치면, 정삼각형의 둘레는 12가 되요.

・・・(중략)

34 R : 그럼, 문제를 풀 때 그림을 그렸는데, 그림을 그려 놓아서 문제 푸는데 어떤 영향을 준 것 같아요?

35 G : 훨씬 더 수월했어요.

36 R : 그럼, 둘레 길이가 12라고 두었는데, 만약에 12가 아니라 다른 수가 되어도, 넓이 비는 2 : 3 이 될까요?

・・・(중략)

37 G : 음...x로 두어도 이렇게 나올 것 같은데.

38 R : 근데 둘레 길이를 수로 둔 이유가 있나요?

39 G : 훨씬 더 그게 눈에 보기 좋으니까요. 풀이가 쉬우니깐.

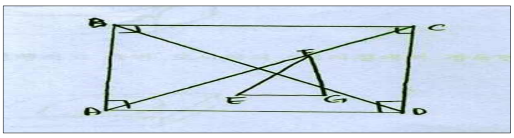
문제 해결을 위해 시각적 이미지(정신적 이미지, 외적 표상)를 생성하고 시각적 이미지를 조작하여 정답을 추론하는 과정은 시각적 추론 과정이라 할 수 있다. 그런데 Dreyfus (1991)는 시각적 추론만을 가지고 새로운 결과를 발견하고

그것을 정당화하는 것이 쉽지 않다고 지적하였다. 그러나 여러 학자들에 의해서 시각화가 문제 해결 전반에 도움을 줄 수 있는 중요한 역할한다고 인정되고 있다(Arcavi, 2003; Drefus, 1991; Brown & Wheatley, 1990). 더불어, Barwise와 Etchemendy (1991)는 시각적인 정보와 언어적 정보의 조절을 통해서 가장 효과적인 수학적 정당화가 가능하다고 주장하였다.

다. 공간 시각화 능력의 활용

McGee (1979)는 공간 시각화 생성 능력과 공간 방향화 능력을 구분하여 설명하였지만 Gutiérrez (1996)는 조금 더 세분화하여 '정신적 회전(공간 시각화 생성 능력)', '도형-배경 인식(공간 방향화 능력)', '지각 항등성(공간 방향화 능력)', '공간적 위치 인식(공간 방향화 능력)', '공간적 관계 인식(공간 방향화 능력)', '시각적 구별(공간 방향화 능력)'로 공간 시각화 능력의 유형을 범주화하였다. 학생 F가 연구자와의 면담 중에 설명했던 1차 평가 5번 문항의 설명들은 위의 세분화된 공간 시각화 능력 중 몇 가지를 어떻게 활용하고 있는지 자세히 설명해주고 있었다.

40 R : 문제에 제시된 그림은 사각형이 비스듬하게 보이는데, 왜 정답에 그림은 정사각형으로 그렸어요?
41 F : 문제에서 정사각형이라고 했으니까요.



<그림 IV-11> 1차 평가 5번 문항에 제시한 표상(학생 F)

42 R : 그럼, 답으로 그린 그림은 어느 위치에서 보고 그렸을까요?

・・・(중략)

43 F : 밑으로요.(손으로 아래를 가리킨다)
44 R : 문제에 제시된 그림은요?
45 F : (손으로 사각형 모양을 만든다)음...위에 서인데, 약간 비스듬하게요.
46 R : 그런데, 점 G의 위치는 정확하게 그린 건가요?
47 R : 자세히 그려볼래요?
48 F : 대충 그린 건데...실수했네요.
49 R : 그럼, 점 G가 대각선에 있는 건가요?
50 F : 네. 선분 BD에 있는 거예요.

학생 F는 문제에 제시된 그림(평행사변형을 그려 놓은 그림)을 보고 풀이 답안에는 정사각형을 그려 놓았다. 이것은 문제에 '정사각형'이라는 조건을 상기하면서 다른 관점에 의한 도형의 형태의 변화에 혼란을 느끼지 않고 모양의 불변성을 인지할 수 있는 지각 항등성을 잘 활용하고 있다고 볼 수 있다(프로토콜 41). 또한, 자신이 답안으로 그린 도형(<그림 IV-11>)에 대해서 문제에 제시된 대상을 관찰자인 자신이 어느 위치에서 바라봤는가를 인식하고 있으므로 '공간적 위치 인식' 능력을 잘 활용하고 있는 것이다(프로토콜 43). 그러나 학생 F가 사각형과 삼각형이 겹쳐 있는 그림에 대해서 '점 G'의 위치를 정확히 그리지 못한 것은 두 개의 대상에 대한 이미지를 관찰자인 자신의 시각과 관련시킬 때 '공간적 관계 인식' 능력을 제대로 발휘하지 못했기 때문이다(프로토콜 48).

Ⅴ. 요약 및 제언

본 연구에서는 30명의 고등학생을 통하여 수학적 시각화의 구성 요소를 알아보고, 각각의 시각화 구성 요소가 수학 문제 해결 과정에서 어떻게 활용되는지 알아보았다. 특히, 30명의 학생들 중 시각성 평가에 의해 선발된 5명(D, E, F, G, H)의 학생들을 통해 질적 사례 연구를 실시하였다. 시각화의 구성 요소는 크게 정신적 이미지, 외적 표상, 이미지의 변형 및 조작, 공간 시각화 능력으로 범주화되었다. 이는 Gutiérrez (1996)가 제시했던 시각화의 주요 요소와 유사한 연구 결과이다. 그러나 본 연구에서는 '이미지의 생성' 과정과 '결과로서 나타난 이미지'를 명확히 구분하여 범주화하지 않았기 때문에 시각화 과정을 '이미지 생성하기'와 '이미지 변형 및 조작'으로 구분한 여러 학자들(류현아 · 장경윤, 2009; Bishop, 1983; Kosslyn, 1983; Gutiérrez, 1996)의 연구 결과와는 다소 차이가 있다. 특히, 이미지 변형 및 조작의 경우 내적 이미지 변형 및 조작과 외적 이미지 변형 및 조작으로 세분화하여 범주화 하였다. 또한 공간 시각화 능력에 관해서는 McGee (1979)의 공간 능력의 분류 유형으로서 공간 시각화 생성 능력과 공간 방향화 능력으로 구분하여 분석을 실시하였다. 따라서 본 연구 결과에서 나타난 시각화의 구성 요소는 Gutiérrez (1996)의 연구보다 더 구체적이고 세분화된 결과라 할 수 있다. 수학적 시각화의 구성 요소를 확인하기 위해 사용되었던 모든 평가 문항(1차 평가 7개 문항, 2차 평가 4개 문항)마다 위에서 범주화된 모든 시각화의 요소를 확인할 수는 없었으며 문제마다 그 중 일부만 확인되었거나 중복되어서 관찰되었다. 또한 이런 구성 요소들은 위계성을 가지고 나타나기도 하였고, 동시 다발적으로 상호교차하면서 나타나기도 하였다.

먼저, 정신적 이미지의 경우 시각화를 구성하는 가장 기본적인 요소로 확인되었으며, 모든 평가 문항에 대해서 학생들이 정신적 이미지를 사용하는 것으로 나타났다. 둘째로, 외적 표상의 경우 2차 평가 1번 문항을 제외하고 나머지 모든 문항을 통해서 확인 할 수 있었으며 현실적 그림 표상, 도형, 그래프 표상, 언어적 표상, 오류가 포함된 표상으로 분류하여 관찰할 수 있었다. 셋째로, 이미지 변형 및 조작의 경우 학생들이 구성한 정신적 이미지에 의해서 이루어지는 정신적 조작 활동 과정으로서의 '내적 이미지 변형 및 조작'과 문제에 제시된 그림이나 자신이 구성한 외적 표상을 통해 이루어지는 구체적인 조작 활동 과정으로서의 외적 이미지 변형 및 조작을 구분하여 확인할 수 있었다. 이런 이미지 변형 및 조작 활동은 문제 해결을 위한 기본적인 필수 과정이면서 문제 해결의 성패에 영향을 주는 중요한 요소이다. 특히, 외적 이미지 변형 및 조작은 차원 변화에 의한 조작, 다른 외적 표상으로의 전환, 보조선에 의한 조작, 대수(수)적 접근으로의 조작으로 분류되어 확인되었다. 마지막으로, 공간 시각화 능력의 경우 나머지 시각화의 구성 요소(정신적 이미지, 외적 표상, 이미지 변형 및 조작)를 충분히 활용하기 위해서 필요한 요소이다. 공간 시각화 생성 능력과 공간 방향화 능력은 2차 임상 면담 과정에 연구자의 추가 질문에 의해 학생들을 통해 확인 할 수 있었다.

정신적 이미지, 외적 표상, 이미지 변형 및 조작, 공간 시각화 능력으로 범주화되어 확인된 시각화의 요소들은 수학 문제 해결 과정에서 다양하게 활용되고 있었다. 우선, 외적 표상의 생성의 경우 학생들이 문제를 해결하는데 외적 표상을 생성하기 이전에 기본적으로 정신적 이미지를 구성하고 있었다. 특히, 문제의 조건에 의해서 생성된 정신적 이미지가 애매하거나 문제 이해의 명확성이 떨어지고, 문제 해결을 위한 내적 이미지 조작 및 변형이 어렵고 복잡한 경우에는 외적 표상을 구성하는 것으로 확인되었다. 정신적 이미지를 생성하고 나서 외적 표상으로 나타내지 못하는 경우에 대해서는 정신적 이미지가 명료하더라도

공간 시각화 능력이 부족하여 외적 표상을 나타내지 못하였거나, 학생 개인의 경험을 통해서 이미 매우 명료하게 정신적 이미지를 가지고 있었기 때문에 외적 표상의 생성을 불필요하게 만들고 있었다. 이는 2차 임상 면담에 참여한 5명의 학생 모두가 2차 평가 1번 문항을 푸는 동안 외적 표상을 나타낼 필요성을 느끼지 못한 것이 근거가 될 수 있다. 수학 문제 해결 과정에서 정형화된 정신적 이미지는 문제 해결에 대한 학생들의 풍부한 사고를 억제하고 문제에 대한 부적절한 풀이 결과를 이끌어내었다. 학생들이 가지고 있는 정형화된 이미지는 수학 문제임에도 불구하고 수학적 사고가 배제된 비논리적인 방법에 의해 문제를 해결하도록 유도하였다. 또한 학생들이 문제를 풀면서 나타낸 외적 표상에서 오류를 포함하고 있는 경우에는 문제를 해결할 때 수정이 되기보다는 문제 해결의 실패로 이어지는 경향이 있었다. 이미지 변형 및 조작의 경우 차원 변화에 의해서 이루어질 수 있으나 그 과정에서 어려움을 느끼는 학생들이 있었다. 2차원 평면상의 대상보다 3차원 입체공간 상의 대상에 대한 이미지 변형 및 조작 활동이 학생들에게는 더 어려운 과제였다. 이는 2차원보다는 3차원 대상에 대해서 외적 표상으로 구현하지 못하는 연구 결과와도 부합된다. 이런 결과는 고차원의 대상에 대한 이미지 변형 및 조작이 더 높은 공간 시각화 능력을 요구하기 때문인 것으로 설명될 수 있다. 또한 수학 문제를 해결할 때 동일 차원에서 이미지를 조작하는 것보다 차원 변화에 의해서 이미지를 조작해야 하는 경우가 더 높은 인지 능력을 필요로 하였다. 그리고 3차원의 대상을 2차원의 이미지로 변형 시켰을 경우 학생들이 문제를 해결하는데 도움을 주고 있었다. 문제 해결에 있어 답을 추론해 가는 과정은 이미지 내에서 이루어지는 탐색 활동과 도출된 답을 정당화하기 위한 이미지 조작 활동이 지속적으로 이루어져야 한다. 따라서 이미지 변형 및 조작은 문제에 대한 답을 도출해 내는데 매우 효과적으로 활용될 수 있다. 내적·외적 이미지 변형 및 조작의 활동은 문제 해결의 시간을 단축시켜줄 뿐 아니라 답을 이끌어 내는 분석적인 시각을 갖게 하였다. 그러나 특이한 점은 학생들이 시각적 이미지에 의한 조작이 문제 해결에 상당히 도움이 된다고 인정하고는 있지만, 도출해낸 답에 대한 정당화는 대수(수)적 접근 방법을 함께 사용한다는 점이다. 따라서 학생들은 정당화를 요구하는 연구자의 추가적인 질문에 대해서 '수' 또는 '문자'를 통해 대수적 사고를 활용하고 있었다. 물론, 시각적 추론 과정만으로 이론에 대한 정당화나 일반화된 사고를 발견하는 것은 무리가 있을 수 있다. 그러나 시각화가 문제 해결 전반에 특히, 수학적 추론 능력에 도움을 줄 수 있다는 사실은 여러 연구 결과 통해 확인할 수 있다(Arcavi, 2003; Drefus, 1991; Brown & Wheatley, 1990). 공간 시각화 능력의 활용은 McGee (1979) 보다 더 세분화된 정신적 회전, 도형-배경 인식, 지각 항등성, 공간적 위치 인식, 공간적 관계 인식, 시각적 구별의 범주에 의해 자세히 분석해 볼 수 있었다(Gutiérrez, 1996).

본 연구는 수학적 시각화에 관한 통합적인 이론적 틀을 마련하는 기초적인 연구라 할 수 있다. 본 연구에서 사용된 구조화된 수학 문제에서는 정신적 이미지, 외적 표상, 이미지 변형 및 조작, 공간 시각화 능력의 4가지 틀을 가지고 학생들의 수학적 시각화를 충분히 분석할 수 있는 것으로 나타났다. 그러나 연구 도구에 있어 도형 문제에 편중되어 있기 때문에 다양한 수학 영역의 문제(수 연산, 대수, 확률 통계 등)에 대해서 본 연구의 이론적 틀을

확인해보는 연구가 더 필요할 것이다. 또한 교수 학습 과정에서 상대적으로 시각화가 덜 사용되는 수 연산, 대수 영역에 대해서도 시각화가 어떤 영향을 주고 어떻게 활용될 수 있는지 탐구해보는 연구가 후차적으로 진행되어야 할 것이다. 많은 학자들은 수학적 시각화 활용에서 테크놀로지의 역할을 강조했다. 테크놀로지는 수학을 학습하는데 공간 시각화 능력이 부족한 학생들에게 이미지를 생성하도록 도와줄 뿐만 아니라 문제 해결을 위한 이미지 조작을 쉽고 빠르게 구현할 수 있는 장점이 있다. 따라서 본 연구의 결과들은 학생들의 교수학습의 효과를 높일 수 있는 IT기기, 교육용 소프트웨어, 교육 콘텐츠의 개발의 연구에 도움을 줄 수 있는 것으로 기대된다.

참고문헌

교육과학기술부(2007). **개정 중학교 교육과정 해설: 수학.**

류현아(2008). **중등 기하문제 해결에서 시각화와 추론 과정**. 건국대학교 대학원 박사학위 논문.

류현아・장견윤(2009). 중등 기하문제 해결에서 시각화 과정. **대한수학교육학회지 수학교육학 연구**, 19(1), 143-161.

류희찬・이지요(1993). 수학교육에서의 시각화의 중요성과 LOGO. **대학수학교육학회 논문집**, 3(1), 75-85.

문광호・우정호(1999). 중・고등학교 수학의 시각화. **대학수학교육학회지 <학교수학>**, 1(1), 135-156.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교출판부.

이종희・김선희(2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사: 수학적 추론 유형 중심으로. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>**, 41(3), 273-289.

장경윤(1992). 수학교육에 있어서의 시각화와 시각적 사고. **대한수학교육학회지 수학교육학 연구**, 2(2), 53-63.

홍진곤・권석일(2004). 전형식적 증명의 교수학적 의미에 관한 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 43(4), 381-390.

Ainley, J.(1994). Building on chldren''s intuitions about line graphs. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*(Vol. 2, pp. 1-8).

Arcavi, A.(1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*(Vol. 1, pp. 55-80).

Arcavi, A., Hadas, N., & Dreyfus, T.(1994). Engineering curriculum tasks on the basis of theoretical and empirical findings. *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics for the 18th PME international Conference*(Vol. 2, pp. 280-287).

Arcavi, A.(2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arnheim, R.(1969). *Visual thinking. University of California Press.*

Arzarello, F., Ferrara, F., Robutti, O., & Paola, D.(2005). The genesis of signs by gestures: The case of Gustavo. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*(Vol. 2, pp. 73-80).

Barwise, J., & Etchemendy, J.(1991). Visual information and valid reasoning. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*(pp. 9-24). Mathematical Association of America, Washington DC.

Bishop, A. J.(1983). Spatial abilities and mathematical thinking. *Proceedings of the IV I.C.M.E.*, 176-178.

__________ (1989). Review of research in visualization in mathematics education. *Focus on Learning problems in mathematics*, 11 (1), 7-16.

Brown, D. L., & Wheatley, G., H.(1990). The role of imagery in mathematics reasoning. *Proceedings of the 14th Annual Meeting International Group for Psychology of Mathematics Education Conference*, Mexico, 217-224.

Campbell, K. J., Collis K. F., & Watson, J. M. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 177-194.

Chazan, D., & Bethel, S.(1994). Sketching graphs of an independent and a dependent quantity: Difficulties in learning to make stylized conventional "pictures". In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 176-184).

Clements, K.(1982). Visual Imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 2-9.

Del Grande, J. J.(1987). Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shults (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12* (1987 yearbook, pp. 126-135). Reston, VA: NCTM.

Dörfler, W.(1991). Meaning: Image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Group for the 15th PME international Conference*(Vol. 1, pp. 17-32).

Dreyfus, T.(1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 33-48).

__________ (1995). Imagery for diagrams, In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Expliting mental imagery with computers in mathematics education* (Nato Asiseries F, Vol. 138, pp. 3-19). Berlin: Springer.

Duval, R.(1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-26).

Eisenberg, T., & Dreyfus, T.(1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*(pp. 25-37). Mathematical Association of America, Washington DC.

Frostig, M., & Horne, D.(1964). *The Frostig program for the development of visual perception.* Chicago: Follett Publishing Co.

Gutiérrez, A.(1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig and A. Guttierez (eds.). *Proceedings of the 20th conference of the international* *group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3-19).

Hadas, N., & Arcavi, A.(2001). Relearning mathematics -- the case of dynamic geometrical phenomena and their unexpected Cartesian representations. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*(Vol. 3, pp. 81-88).

Hanna, G.(2000). Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Hamley H. R.(1935). *The testing of intelligence*. London: Evans.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (ICMI Study Series, pp. 70-95). University Press, Cambridge.

Hoffer, A.(1977). *Mathematics resource project: Geometry and visualization*. Palo Alto, Calif.: Creative Publications.

Hoz, R.(1981). The effects of rigidity on school geometry learning. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 171-190.

Inhelder, B., & Piaget, J.(1958). In A. Parsons & S. Milgram (Trans.), *The Growth of Logical Thinking: from childhood to adolescence*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Kadunz, G., & Sträßer, R.(2004). Image Metaphor Diagram Visualisation in Learing Mathematics. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 241-248).

Knauff, M., & Johnson-Laird, P., N.(2002). *Viusal imagery can impede reasoning*. Memory & Cognition.

Kosslyn, S. M.(1980). *Image and mind*. Harvard University Press: London.

____________ (1983). *Ghosts in the mind's machine*. New York, NY: W. W. Norton.

____________ (1995). Mental imagery. In S. M. Kosslyn & D. N. Osherson (Eds.), *An Invitation to Cognitive Science: Visual Cognition* (2nd ed., Vol. 2). Cambridge, MA: MIT Press.

Krutetskii, V. A.(1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Lean, G., & Clements, M. A.(1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.

McGee, M. G.(1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.

McLeay, H., O'Driscoll-Tole, K., & Jones, K. (1998). Using imagery to solve spatial problems. In L. Bills (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*(Vol. 18, pp. 83-88).

NCTM(2000). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. VA: NCTM.

Nemirovsky, R., & Noble, T.(1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 99-131.

Newell, A., & Simon, H. A.(1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ:

Prentice-Hall.
Paivio, A.(1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rine-hart and Winston, Inc.
Piaget, J., & Inhelder, B.(1971). *Mental imagery in the child*. London: Routledge & K. Paul.
Presmeg, N.(1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
__________ (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and Future*(pp. 205-236). Sense Publishers.
Richardson, A.(1969). *Mental imagery*. London: Routledge & Kegan Paul.
Russell, R. A.(1997). *The use of visual reasoning strategies in problem-solving activities by pre-service secondary mathematics teachers*. Unpublished Doctoral dissertation, University of Georgia.
Schnotz, W., Zink, T., & Pfeiffer, M.(1995) *Visualization in learning and instruction: Effects of graphic representation formats on the structure and application of knowledgd*. In Research Report 5. Freidrich-Schiller University of Jena.
Solano, A., & Presmeg, N. C.(1995). *Visualisation as a Relation of Images*. Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 19(3), pp. 66-73).
Thompson, P. W.(1996) *Imagery and the development of mathematical reasoning*. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), Theories of mathematical learing. NJ.
Vinner, S.(1989). The avoidance of visual consideration in calculus student. Focus: On *Learning Problems in Mathematics*, 11, 149-156.
Vladimirskii, G. A.(1971). An experimental verification of a method and system of exercises for developing spatial imagination. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*(Vol. 5, pp. 57-117). Stanford: School Mathematics Study Group.
Warren, E.(2000). Visualisation and the development of early understanding of algebra. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*(Vol. 4, pp. 273-280).
Wheatly, G. H.(1991). Enhancing mathematics learning through imagery. *The Arithmetic Teacher*, 39(1), 34-36.
Yakimanskaya, I. S.(1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. Im J. Kilpatrick, I. Wirsqup, A. Buccino, & R. Streit (Eds.), *Soviet Studies in Mathematics Education*. Reston, VA: NCTM.
Yerushalmy, M., & Gafni, R.(1991). The effect of graphic representation: An experiment involving algebraic transformations. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*(Vol. 3, pp. 372-377).
Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal*

of Research in Mathematics Education, 27(4), 235-457.

Zimmermann, W., & Cunningham, S.(1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*(pp. 1-8. Mathematical Association of America, Washington DC.

Analysis on Factors and the Application of Mathematical Visualization in Problem Solving Process

Joo, Hong-Yun (Yongdong Middle School)
Kwean, Hyuk-Jin (Korea University)

The purpose of the study are to identify factors of mathematical visualization through the thirty students of highschool 2nd year and to investigate how each visualization factor is used in mathematics problem solving process. Specially, this study performed the qualitative case study in terms of the five of thirty students to obtain the high grade in visuality assessment.

As a result of the analysis, visualization factors were categorized into mental images, external representation, transformation or operation of images, and spacial visualization abilities. Also, external representation, transformation or operation of images, and spacial visualization abilities were subdivided more specifically.

* key words : Mathematical Visualization (수학적 시각화), Visualization Factors (시각화 요소), Mental Image (정신적 이미지), External Representation (외적 표상), Visualization Process (시각화 과정), Spacial Visualization Ability (공간 시각화 능력).

논문접수 : 2011. 12. 20
논문수정 : 2012. 2. 3
심사완료 : 2012. 3. 8