

논문 2012-49SP-1-3

부호책 제한을 가지는 표본 적응 프로덕트 양자기를 이용한 1차 마르코프 과정의 고 전송률 양자화

(High Bit-Rates Quantization of the First-Order Markov Process Based on a Codebook-Constrained Sample-Adaptive Product Quantizers)

김 동 식*

(Dong Sik Kim)

요 약

디지털 신호의 양을 줄이기 위한 손실 소스 부호화에서 양자화는 필수적이다. 이때 보다 효율적인 양자화를 위해서는 벡터 양자기(vector quantizer: VQ)를 사용하는데, 벡터의 차수 또는 전송률이 올라감에 따라 VQ의 부호화 복잡도는 기하급수적으로 증가한다. 이를 보완하기 위하여 여러 변형된 VQ가 제안되어 있다. 이러한 변형된 VQ의 일종으로 표본 적응 프로덕트 양자기(sample-adaptive product quantizer: SAPQ)가 있는데, 벡터의 차수를 줄여서 부호화 복잡도를 줄일 수 있는 프로덕트 VQ(product VQ: PQ)와 유사한 구조를 가지지만, 일반 PQ보다 더 좋은 성능을 가지면서 일반 VQ보다는 부호화 복잡도가 낮고 부호책을 위한 메모리의 크기도 작은 일종의 구조적 제한을 가지는 VQ이다. 이러한 SAPQ 중에서 부호책의 구조가 양자화 공간의 대각선에 대칭 형태를 가지는 단순한 형태의 1-SAPQ가 있는데, 이러한 1-SAPQ의 성능은 동일한 분포를 가지며 서로 독립인 입력에 좋은 성능을 보인다. 본 논문에서는 1-SAPQ를 1차 마르코프 과정에 대하여 설계하고 그 성능을 평가하였다. 효율적인 1-SAPQ의 설계를 위하여 초기 부호책 설계 알고리즘을 제안하였으며, 수치해석을 통하여 1-SAPQ는 비슷한 부호화 복잡도를 가지는 VQ보다 좋은 성능을 보임을 보였다. 또한 DPCM(differential pulse coded modulation) 기법에 Lloyd-Max 양자화를 사용한 경우의 성능에 근접함을 보였다.

Abstract

For digital data compression, the quantization is the main part of the lossy source coding. In order to improve the performance of quantization, the vector quantizer(VQ) can be employed. The encoding complexity, however, exponentially increases as the vector dimension or bit rate gets large. Much research has been conducted to alleviate such problems of VQ. Especially for high bit rates, a constrained VQ, which is called the sample-adaptive product quantizer(SAPQ), has been proposed for reducing the high encoding complexity of regular VQs. SAPQ has very similar structure as to the product VQ(PQ). However, the quantizer performance can be better than the PQ case. Further, the encoding complexity and the memory requirement for the codebooks are lower than the regular full-search VQ case. Among SAPQs, 1-SAPQ has a simple quantizer structure, where each product codebook is symmetric with respect to the diagonal line in the underlying vector space. It is known that 1-SAPQ shows a good performance for i.i.d. sources. In this paper, a study on designing 1-SAPQ for the first-order Markov process. For an efficient design of 1-SAPQ, an algorithm for the initial codebook is proposed, and through the numerical analysis it is shown that 1-SAPQ shows better quantizer distortion than the VQ case, of which encoding complexity is similar to that of 1-SAPQ, and shows distortions, which are close to that of the DPCM(differential pulse coded modulation) scheme with the Lloyd-Max quantizer.

Keywords : 1차 마르코프 과정, 표본 적응 프로덕트 양자기

* 정회원-교신저자, 한국외국어대학교 전자공학과

(Department of Electronics Engineering, Hankuk University of Foreign Studies)

※ 이 연구는 2011학년도 한국외국어대학교 교내학술연구비의 지원에 의하여 이루어진 것임.

접수일자: 2011년4월11일, 수정완료일: 2011년9월20일

I. 서 론

양자화(quantization)는 손실 소스 부호화(lossy source coding)의 핵심으로 그의 성능을 높이기 위해서는 블록 소스 부호화(block source coding) 이론에 근거하여 벡터 양자기(vector quantizer: VQ)를 사용할 수 있다^[1]. 그런데 일반 VQ는, 보다 많은 이득을 취하기 위하여 벡터의 차수를 높이거나 전송률을 높이면 부호화를 위한 계산의 복잡도가 벡터의 차수 또는 전송률에 대하여 기하급수적으로 증가하게 된다. 이러한 VQ의 단점을 보완하기 위하여 여러 가지 구조적 제한을 가지는 VQ들이 제안되었다^[2]. 대표적인 예로 TSVQ(tree-structured VQ), 분류(classified) VQ, 격자(lattice) VQ, 다단계(multistage) VQ, 트렐리스 부호화(trellis-coded) 양자기, 프로덕트 양자기(product quantizer: PQ) 등이 있다. 또한 PQ를 변형한 표본 적응 프로덕트 양자기(sample-adaptive product quantizer: SAPQ)가 있다^[3~4]. 하나의 프로덕트 부호책만을 가지는 PQ를 여러 개의 프로덕트 부호책을 사용할 수 있는 적응 양자화 형태로 바꾼 것이 SAPQ로, 일반 VQ로는 구현이 힘든 큰 벡터 차수 또는 전송률을 가지는 VQ를 상대적으로 낮은 복잡도와 작은 크기의 부호책으로 구현할 수 있다. 또한 SAPQ의 구조 특성상 전송 오류에 강인한 양자화 구현이 가능하다^[5~6].

[3]에는 여러 작은 차수의 VQ들로 구성된 PQ를 적응 양자화 형태로 바꾼 SAPQ가 제안되어 있는데, SAPQ의 이론적 고찰과 설계 알고리즘 등이 아울러 제시되어 있다. 또한 SAPQ 설계 시에 유용한, SAPQ 양자화 왜곡에 대한 경계(bound) 등이 제시되어 있다. 참고문헌 [4]에는 스칼라 양자기(scalar quantizer: SQ)에 기초한 SAPQ에 대해 소개하고 있는데, 그 성능에 대한 고찰, 여러 균등(uniform) 및 비균등(nonuniform) SAPQ 설계의 예들이 소개되어 있다. 균등 SAPQ의 설계는 격자 이론에 근거한 것으로, 이러한 SAPQ는 격자 VQ의 일종이 된다^[7]. 반면에 비균등 SAPQ의 경우는, 주어진 분포 함수나 훈련열(training sequence: TS)에 대하여 연산을 반복적으로 수행하여 효율적으로 부호책을 설계할 수 있다. SAPQ의 종류는 크게 m-SAPQ와 1-SAPQ가 있는데^[3], 훈련열을 사용하여 부호책을 설계

하는 방법은 m-SAPQ의 경우는 [4]에, 1-SAPQ는 [3]에 각각 군집화(clustering) 알고리즘 형태로 소개되어 있다. m-SAPQ는 하나의 프로덕트 부호책을 구성하는 m 개의 부부호책들이 서로 다를 수가 있는 것으로, 이러한 m-SAPQ 설계를 위한 군집화 알고리즘은, Lloyd-Max 양자기에서 언급한 바와 유사하게, 최적 양자기를 위한 두 개의 필요조건인 최소 거리 양자화 조건과 최적 센트로이드(centroid) 조건을 반복적으로 번갈아 가면서 적용한다^[8]. SQ에 기초한 m-SAPQ 설계를 위한 최적 센트로이드 조건의 이론적 유도는 [4]의 부록에 소개되어 있다. 이러한 m-SAPQ에 반해서, 1-SAPQ는 일종의 부호책 제한을 가지는 SAPQ로, 하나의 프로덕트 부호책을 구성하는 m 개의 부부호책이 모두 같은 경우로, 부호책의 저장을 위한 메모리의 크기를 줄일 수 있다. 1-SAPQ의 양자화 왜곡은 m-SAPQ보다는 크나, 특정한 조건에서 부부호책의 크기가 큰 경우 1-SAPQ와 m-SAPQ의 왜곡은 서로 비슷하게 된다. 따라서 이러한 경우에는 1-SAPQ를 사용하는 것이 부호책의 크기를 줄일 수 있으므로 보다 유리하다*.

[3]과 [4]에서 SAPQ에 대한 실험은 주로 독립적이고 동일하게 분포된(independent and identically distributed: i.i.d.) 신호에 대한 것이며 다양한 입력 신호에 대한 성능 연구 수행은 안 되어 있다. 그러나 SAPQ는 구조적으로 제한을 가지고 있는 VQ의 일종이므로 입력되는 신호의 통계적 특성에 따라 그 성능에 차이가 있을 수 있다. 예를 들어 상관관계가 존재하는 신호에 대하여 초기 부호책의 선정에 따라서 보다 좋은 SAPQ 부호책 설계가 가능하다. 이렇게 상관관계를 가지는 신호의 양자화를 위하여 SQ에 기초한 일반 DPCM(differential pulse coded modulation) 기법에 SAPQ를 결합하여 사용할 수도 있다^[9]. 본 논문에서는 DPCM과 같은 특별한 예측 기법을 사용하지 않고 VQ에 기초한 1-SAPQ를 직접 1차 마르코프 과정(first-order Markov process)에 적용하여 양자화할 때의 성능을 고찰해 보았다. 이를 위하여 1-SAPQ의 구조에 대하여 분석해보았고 1차 마르코프 과정에 적합한 초기 부호책 설계 알고리즘을 제안하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 제 II 장에서는

* m 과 부부호책 크기의 비를 표본비라고 하는데, 1-SAPQ에서는 이 비를 고정시키고 부부호책 크기를 증가시키면 1-SAPQ와 m-SAPQ의 왜곡이 비슷하게 된다^[3]. 즉 m-SAPQ의 서로 다른 m 개의 부부호책들이 동일한 부부호책이 됨을 관찰할 수 있다.

1-SAPQ를 소개하였다. 제 III장에서는 1-SAPQ 부호책의 구조에 대하여 분석하고 설계 알고리즘을 소개하였으며, 제 IV장에서는 초기부호책 설계를 위한 알고리즘을 소개하였다. 제 V장에서는 실험 결과 제시 및 토론을 하였으며, 마지막 장에서 본 논문의 결론을 내렸다.

II. 표본 적응 프로덕트 양자기

본 장에서는 1-SAPQ의 원리와 부호책의 구조를 살펴보기 위하여 먼저 VQ를 수식으로 정리하고 1-SAPQ를 간단히 정리하였다.

유클리드 공간 \mathbf{R} 에서 정의되는 κ 개의 불규칙 변수 X_1, \dots, X_κ 를, 양자화하려고 하는 이산 시간 신호원이라 하자. 또한 이러한 불규칙 변수로 구성된 $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_\kappa)$ 를 \mathbf{R}^κ 공간에서 정의되는 불규칙 벡터라 하자. 이때 $E\|X_i\|^2 < \infty$ 이라 가정한다. 여기서 $\|\cdot\|$ 은 \mathbf{R}^κ 공간에서 사용될 l_2 놈(norm)이다. \mathbf{R}^κ 공간의 n 개의 원소로 구성된 집합 \mathcal{C} 를 부호책(codebook)이라 하고 그 원소를 부호단어(codeword)라 한다. 불규칙 벡터 \mathbf{X} 를 양자화한다고 하는 것은 \mathbf{X} 의 관찰 열들을 각각 부호책 \mathcal{C} 의 원소의 열로 사상하는 것으로 이러한 사상을 VQ라 한다. 부호책 \mathcal{C} 를 사용해서 불규칙 변수 \mathbf{X} 를 양자화할 때의 양자화 평균 왜곡은 다음과 같다.

$$D_{VQ} := E\left\{\frac{1}{\kappa} \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{X} - \mathbf{y}\|^2\right\}$$

이러한 κ 차수 VQ의 전송률은 입력되는 실수 원소 하나 당 비트 수로 정의되는데, 이 양자화에서 만일 고정 길이 부호화(fixed-length coding)를 양자기의 출력을 위한 부호화에 사용한다고 하면 전송률 R (bits/sample)은 다음과 같다.

$$VQ : R = \frac{\log_2 n}{\kappa}$$

일반적으로 이러한 양자화는, 주어진 입력에 대해 최소의 거리를 가지는 부호단어를 부호책 \mathcal{C} 의 전체에서 찾는 방식으로, 본 논문에서는 이를 κ 차수 VQ 또는 단순히 VQ라고 부르기로 한다.

VQ의 부호화 복잡도는 벡터의 차수 κ 또는 전송률이 증가함에 따라 기하급수적으로 증가한다. 만일 κ 가

너무 커서 VQ 구현이 어려운 경우, 한 가지 해결 방안으로 κ 차수 벡터를 여러 개의 작은 부벡터로 나누고 각 부벡터를 독립적인 VQ를 사용하여 양자화하는 방법이 있다. 이때 각 부벡터를 양자화하기 위한 부호책을 부부호책이라 부른다. 그러면, κ 차수 벡터를 여러 개의 작은 부벡터로 나누어서 양자화하는 기법의 부호책은 κ 차원 공간에서 각 부부호책들의 카르테시안(Cartesian) 프로덕트 형태를 가진다. 따라서 이러한 양자기를 프로덕트 부호 VQ라고 부른다^[2,p.430]. 본 논문에서는 이러한 VQ를 줄여서 PQ(product quantizer)라 부르기로 한다.

불규칙 변수열 X_1, X_2, \dots 를 양자화하기 위한 PQ 중 한 가지 형태를 수식화해 보자. k -tuple인 $\mathbf{X}_i := (X_{(i-1)k+1}, X_{(i-1)k+2}, \dots, X_{(i-1)k+k})$ ($i = 1, \dots, m$)를 \mathbf{R}^k 공간의 부벡터(subvector)라 하자. 여기서 k 와 m 은 양의 정수이다. 이러한 부벡터를 양자화하기 위한 k 차원 VQ의 부호책을 부부호책(subcodebook)이라 부르고 이를 \mathcal{C} 로 표기하자. 여기서 \mathcal{C} 는 \mathbf{R}^k 의 부분집합이고 이 집합의 원소의 개수를 n_0 이라 하자. 부부호책 \mathcal{C} 의 부부호단어(subcodeword)의 차수는 k 가 된다. 만일 m 개의 불규칙 벡터 \mathbf{X}_i 를 k 차원 VQ로 부호책 \mathcal{C} 를 사용하여 각각 독립적으로 양자화한다고 하면, 이때 PQ의 양자화 평균 왜곡은 다음과 같다.

$$D_{PQ} := E\left\{\frac{1}{km} \sum_{i=1}^m \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{y}\|^2\right\}$$

참고로 PQ는 \mathbf{R}^{km} 공간에서 카르테시안 프로덕트 집합인 $(\mathcal{C})^m$ 으로의 사상이며, 이러한 집합을 ‘프로덕트 부호책’이라 부른다. 또한 PQ의 전송률은 k 차수 VQ와 같이 다음과 같다.

$$PQ : R = \frac{\log_2 n_0}{k}$$

그러나 이러한 PQ는 부벡터간의 상호 상관성을 이용할 수 없으므로, km 차수 VQ에 비하여 양자화 왜곡이 증가하게 된다. 이러한 문제를 개선하기 위해서는, 입력 신호간의 상관성을 줄여주는 이산 여현 변환(discrete cosine transform)과 같은 변환을 양자화 이전에 먼저 입력 신호에 적용하는 방법이 있다^[2, p.235]. 그러나 이러한 변환을 사용한다 해도 PQ의 벡터 차수 k 는 km 보다 작으므로, 벡터 차수를 통한 이득은 km 차수 VQ에

비하여 적다.

이제 SAPQ 중에서 부호책을 위한 메모리 크기를 보다 줄일 수 있는 1-SAPQ에 대해 간단히 살펴보자. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ 을 불규칙 벡터 $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ 의 한 관찰이라고 하고, 이러한 관찰을 표본이라고 하자. 부호기와 복호기에 미리 설계된 동일한 J 개의 프로덕트 부호책을 가지고 있으면서, 입력되는 각 표본마다 적응하여 J 개의 프로덕트 부호책 중에서 하나를 선택할 수 있는 일종의 적응 양자화를 생각해 보자. $C_j (\subset \mathbf{R}^k)$ 를 $j (\in \{1, \dots, J\})$ 번째 프로덕트 부호책을 위한 부부호책이라 하고 이러한 부부호책들의 원소의 개수가 모두 같은 n_1 이라고 하자. 참고로 J 개의 프로덕트 부호책 중 j 번째 프로덕트 부호책은 $(C_j)^m$ 로 표시한다. 불규칙 벡터 $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ 의 표본들이 적응 양자기로 입력된다고 가정하자. 그러면 이 적응 양자기는 먼저 각 표본 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ 을 부부호책 C_1, \dots, C_J 를 사용해서 다음과 같은 J 개의 표본 거리를 구한다.

$$\frac{1}{km} \sum_{i=1}^m \min_{\mathbf{y} \in C_j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|^2 \quad (j = 1, \dots, J) \quad (1)$$

각 표본에 대하여 적응 양자기는 식 (1)의 표본 거리를 최소로 하는 최적의 프로덕트 부호책을 J 개의 프로덕트 부호책 중에서 선택한다. 따라서 이러한 적응 양자기의 평균 왜곡은 $D_{1\text{-SAPQ}}$ 로 표시할 때, 다음과 같다.

$$D_{1\text{-SAPQ}} := E \left\{ \min_j \frac{1}{km} \sum_{i=1}^m \min_{\mathbf{y} \in C_j} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{y}\|^2 \right\} \quad (2)$$

식 (1)의 표본 거리에 기초한 식 (2)의 양자화 기법을 1-SAPQ라 부른다^[3]. 각 표본에 대하여 1-SAPQ는 선택된 프로덕트 부호책의 인덱스와 양자화된 m 개 입력의 인덱스를 일종의 피드포워드 적응 기법 형태로 전송한다. 이러한 피드포워드 적응 기법은 각 표본에 대하여 최적의 프로덕트 부호책 선택을 가능하게 한다. 음이 아닌 정수 η 에 대하여 $J = 2^\eta$ 라고 하면, 1-SAPQ의 전체 전송률 R 은 다음과 같다.

$$1\text{-SAPQ} : R = \frac{\log_2 n_1}{k} + \frac{\eta}{km}$$

이 전송률에서 η/km 는 SAPQ에서 매 m 개의 입력마다 선택된 프로덕트 부호책을 지칭하기 위한 부가 비트가 된다.

1-SAPQ의 부호책은 \mathbf{R}^{km} 공간에서 모든 프로덕트 부호책의 합집합 형태, 즉 $\cup_{j=1}^J (C_j)^m$ 로 나타낼 수 있다. 1-SAPQ의 부호책은 PQ의 경우와 흡사한 구조를 가지면서 km 차원의 공간에서 PQ의 경우인 $(C)^m$ 보다 자유로운 구조를 가질 수 있으므로, 1-SAPQ를 사용하여 PQ를 통해서 얻을 수 있는 이득을 증가시킬 수 있다^[3]. 따라서 km 차원에서의 각 VQ가 가지는 부호책의 제약을 고려한다면 양자화 성능에 있어서 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$D_{VQ} \leq D_{1\text{-SAPQ}} \leq D_{PQ}$$

여기서 VQ는 $\kappa = km$ 이라 가정한다. 또한 1-SAPQ는 PQ와 마찬가지로 k 차원의 VQ에 기초를 두고 있으므로 부호화 복잡도는 km 차수 VQ 보다 월등히 낮다. SAPQ의 양자화 왜곡과 부호화 복잡도에 대한 연구는 [3]과 [4]의 부록과 예에서 보다 구체적으로 소개되어 있다.

III. 1-SAPQ 부호책의 설계

주어진 훈련열을 반복적으로 균집화하는 방법에 기초하여 1-SAPQ 부호책을 효과적으로 설계할 수 있다. 반복 균집화 알고리즘은 두 개의 필요조건인 1) 최소 거리 양자화 조건과 2) 최적 센트로이드 조건을 반복적으로 훈련열에 적용한다^[2,p.349]. 최소 거리 양자화 조건은 입력되는 각 벡터에 대하여 최소의 왜곡을 가지는 부호책을 선정하는 것이며, 최적 센트로이드 조건은 주어진 양자화 영역에 대하여 최적의 부호단어를 선정하는 것이다. $k = 1$ 인 m -SAPQ의 경우에 대해선 참고 문헌 [4]의 부록에 소개되어 있는데, 본 장에서는 $k \geq 1$ 인 1-SAPQ를 위한 최적 센트로이드 조건을 유도하였다.

1. 최적 1-SAPQ 설계를 위한 필요조건

우선 유도를 단순화하기 위하여 $k=1$ 이라 하고 불규칙 벡터 $\mathbf{X} (\in \mathbf{R}^{km})$ 가 분포 함수(distribution function) F 를 가지고 있다고 가정하자. SAPQ 부호책인 $\cup_{j=1}^J (C_j)^m$ 에서 부부호책 C_j 를 집합 $C_j := \{y_1(j), \dots, y_{n_1}(j)\}$ 로 표시하자. 이 식에서 부호단어 $y_1(j), \dots, y_{n_1}(j)$ 는 실수이다. 그러면 j 번째 프로덕트 부호책 $(C_j)^m$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(C_j)^m = \{(y_1(j), y_1(j), \dots, y_1(j)), \\ (y_1(j), y_1(j), \dots, y_2(j)), \dots, (y_{n_1}(j), y_{n_1}(j), \dots, y_{n_1}(j))\}$$

즉 1-SAPQ 부호책은 Jn_1 개의 실수를 사용하여 \mathbf{R}^{km} 공간에서의 $J(n_1)^m$ 개의 부호단어를 만들어 내고 있다. 집합 $\mathcal{S}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j) (\subset \mathbf{R}^{km})$ 를 j 번째 프로덕트 부호책의 부호단어 $(y_{\ell_1}(j), \dots, y_{\ell_m}(j)) =: \mathbf{y}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j)$ 에 해당하는 양자화 영역으로 표기하고 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{S}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j) := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j)\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{\ell'_1, \dots, \ell'_m}(j')\|^2, \\ \forall \ell'_1 \neq \ell_1, \dots, \forall \ell'_m \neq \ell_m, \forall j' \neq j\} \\ (\ell_1, \dots, \ell_m = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, J) \quad (3)$$

이러한 식 (3)은 첫 번째 필요조건인 최소 거리 양자화 조건으로, 주어진 입력과 최소의 거리에 있는 부호단어로 양자화되는 것을 의미한다. 따라서 식 (2)의 1-SAPQ의 평균 왜곡은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$D_{1\text{-SAPQ}} = \sum_{j=1}^J \sum_{\ell_1=1}^{n_1} \dots \sum_{\ell_m=1}^{n_1} \int_{\mathcal{S}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j)\|^2 dF(\mathbf{x}) \quad (4)$$

이제 주어진 $\ell (\in \{1, \dots, n_1\})$ 에 대하여 $D_{1\text{-SAPQ}}$ 를 $y_\ell(j)$ 로 미분하여 1-SAPQ가 최소화되는 필요조건을 구해보자. $D_{1\text{-SAPQ}}$ 를 미분하기 위하여 식 (4)에서 $y_\ell(j)$ 에 해당하는 항목만을 고려해 보자. 우선 식 (4)에서의 제곱 항은 다음과 같이 m 개 제곱 항의 덧셈 형태로 전개된다.

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j)\|^2 = [x_1 - y_{\ell_1}(j)]^2 + [x_2 - y_{\ell_2}(j)]^2 + \dots \\ + [x_m - y_{\ell_m}(j)]^2$$

여기서 $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_m)$ 이다. 따라서 식 (4)에서 이러한 제곱 항의 총 개수는 $J(n_1)^m m$ 가 된다. 이중에서, 주어진 $i (\in \{1, \dots, m\})$ 와 $\ell (\in \{1, \dots, n_1\})$ 에 대하여, $[x_i - y_\ell(j)]^2$ 항의 개수는 $(n_1)^{m-1}$ 개가 된다. 그러므로 식 (4)에서 $y_\ell(j)$ 가 들어가 있는 항의 총 개수는 $(n_1)^{m-1} m$ 이 되며, 이러한 $(n_1)^{m-1} m$ 항들의 적분의

함은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{\ell_1=1}^{n_1} \dots \sum_{\ell_{i-1}=1}^{n_1} \sum_{\ell_{i+1}=1}^{n_1} \dots \sum_{\ell_m=1}^{n_1} \int_{\mathcal{S}_{\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, \ell, \ell_{i+1}, \dots, \ell_m}(j)} \sum_{i=1}^m [x_i - y_\ell(j)]^2 dF(\mathbf{x}) \quad (5)$$

식 (5)를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i, j)} [x_i - y_\ell(j)]^2 dF(\mathbf{x})$$

이 식에서 $\mathcal{S}_\ell(i, j)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{S}_\ell(i, j) := \bigcup_{\ell_1=1}^{n_1} \dots \bigcup_{\ell_{i-1}=1}^{n_1} \bigcup_{\ell_{i+1}=1}^{n_1} \dots \bigcup_{\ell_m=1}^{n_1} \mathcal{S}_{\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, \ell, \ell_{i+1}, \dots, \ell_m}(j) \quad (6)$$

그러므로 식 (4)의 $D_{1\text{-SAPQ}}$ 를 $y_\ell(j)$ 로 미분하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial D_{1\text{-SAPQ}}}{\partial y_\ell(j)} = \frac{\partial}{\partial y_\ell(j)} \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i, j)} [x_i - y_\ell(j)]^2 dF(\mathbf{x}) \\ = 2 \left[y_\ell(j) \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i, j)} dF - \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i, j)} x_i dF(\mathbf{x}) \right] \quad (7)$$

식 (7)의 미분을 0으로 놓음으로 다음과 같이 $D_{1\text{-SAPQ}}$ 의 최소화를 위한 필요조건을 얻는다.*

$$y_\ell^*(j) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i, j)} x_i dF(\mathbf{x}) \Big/ \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i, j)} dF \\ (j = 1, \dots, J, \ell = 1, \dots, n_1) \quad (8)$$

식 (8)에서 보는 바와 같이 j 번째 부호책의 ℓ 번째 부호단어 $y_\ell^*(j)$ 는 인덱스 i 에 대하여 적분 항들을 모두 더하여 i 에 무관한 형태를 취하고 있다. 식 (8)의 조건을 1-SAPQ 설계에서 두 번째 필요조건인 최적 센트로이드 조건이라고 하는데, 최소 거리 양자화 조건과 더불어 두 가지 조건을 반복적으로 적용하면서 1-SAPQ 부호책을 설계할 수 있다. 나아가서 앞에서 유도한 방법과 유사하게, $k > 1$ 인 경우에도 식 (8)의 결과를 확장하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

* 제곱항의 2차 미분이 양수이므로 1차 미분이 0이 되는 지점은 $D_{1\text{-SAPQ}}$ 이 극소점이 되는 지점이다. 따라서 1차 미분이 0이 되는 경우는 $D_{1\text{-SAPQ}}$ 가 최소화되기 위한 필요조건이 된다.

$$\mathbf{y}_\ell^*(j) = \frac{\sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i,j)} \mathbf{x}_i dF(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_\ell(i,j)} dF} \quad (j=1, \dots, J, \ell=1, \dots, n_1) \quad (9)$$

이 식에서 설계된 부부호단어 $\mathbf{y}_\ell^*(j)$ 와 적분 변수 \mathbf{x}_i 는 \mathbf{R}^k ($k > 1$)에 속하는 벡터이며 설계된 부부호책은 $C_j^* = \{\mathbf{y}_1^*(j), \dots, \mathbf{y}_{n_1}^*(j)\}$ ($j=1, \dots, J$)이 된다. 주어진 함수 F 에 대하여 1-SAPQ 설계를 위한 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

1-SAPQ 설계 알고리즘 (분포 함수 F)

- 0) 초기화 ($\gamma=0$): 부부호책 크기 n_1 , 부부호단어의 차수 k , 표본의 크기 m , 부부호책의 개수 $J = 2^n$, 왜곡 임계값 $\Delta > 0$, 초기 부부호책 C_j^0 의 선정과 이를 사용하여 구성한 \mathbf{R}^{km} 공간에서의 초기 부호책 $\mathcal{C}_0 = \cup_{j=1}^J (C_j^0)^m$, 분포함수 F , 그리고 $D_{-1} = \infty$.
- 1) 현 반복 γ 에서의 부호책 \mathcal{C}_γ 을 사용하여 식 (3)으로부터 $J(n_1)^m$ 개의 \mathbf{R}^{km} 공간에서의 양자화 영역 $\mathcal{S}_{\ell_1, \dots, \ell_m}(j)$ 를 구하고 식 (4)로부터 양자화 왜곡 D_γ 를 구한다.
- 2) 만일 $(D_{\gamma-1} - D_\gamma)/D_\gamma \leq \Delta$ 가 만족되면 정지. 이때 \mathcal{C}_γ 가 설계된 부호책이다. 그렇지 않으면 계속해서 진행.
- 3) 식 (6)과 (7)로부터 Jn_1 개의 새로운 부부호단어 $\mathbf{y}_\ell^*(j)$ 를 계산하고 부호책 $\mathcal{C}_\gamma = \cup_{j=1}^J (C_j^*)^m$ 를 갱신한다. 이때 각 부부호책은 $C_j = \{\mathbf{y}_1^*(j), \dots, \mathbf{y}_{n_1}^*(j)\}$ 이다. 다시 단계 1)로 진행.

2. 1-SAPQ 설계를 위한 군집화 알고리즘

실질적인 양자기 설계에 있어서는 분포 함수 F 보다는 훈련열을 사용하는 것이 1-SAPQ 부호책 설계에 보다 효율적인데, 1-SAPQ 설계 알고리즘 (분포 함수 F)을 훈련열을 사용하는 반복 군집화 알고리즘 형태로 바꾸면 다음과 같다^[3]. 이때 사용하는 훈련열이 가지는 분포 함수는 F 라 가정한다.

1-SAPQ 군집화 알고리즘 (훈련열)

- 0) 초기화 ($\gamma=0$): 부부호책 크기 n_1 , 부부호단어의 차수 k , 표본의 크기 m , 부부호책의 개수 $J = 2^n$, 왜곡 임계값 $\Delta > 0$, 초기 부부호책 C_j^0 의 선정과 이를 사용하여 구성한 \mathbf{R}^{km} 공간에서의 초기 부호책 $\mathcal{C}_0 = \cup_{j=1}^J (C_j^0)^m$, 훈련열 $((\mathbf{x}_{1,\nu}, \dots, \mathbf{x}_{m,\nu}))_{\nu=1}^M$, 그리고 $D_{-1} = \infty$.
- 1) 현 반복 γ 에서의 부호책 \mathcal{C}_γ 을 사용해서 훈련열의 벡터 $\mathbf{x}_{i,\nu}$ ($i=1, \dots, m, \nu=1, \dots, M$)를 1-SAPQ로 양자화하여 다음과 같은 Jn_1 개의 집합으로 나눈다.

$$\Gamma_\ell(j) := \{\mathbf{x}_{i,\nu} : \|\mathbf{x}_{i,\nu} - \mathbf{y}_\ell\|^2 \leq \|\mathbf{x}_{i,\nu} - \mathbf{y}_{\ell'}\|^2, \mathbf{y}_\ell, \mathbf{y}_{\ell'} \in C_j, \zeta(\nu) = j, \forall \ell' \neq \ell\} \quad (j=1, \dots, J, \ell=1, \dots, n_1) \quad (10)$$

이때 $\Gamma_\ell(j)$ 를 서로소(disjoint)인 집합으로 만들기 위하여 식 (10)의 부등식에서 등식이 성립하는 벡터 $\mathbf{x}_{i,\nu}$ 는 ℓ 이 제일 작은 집합에만 속하게 한다. 식 (10)에서 1-SAPQ에 의해 결정되는 함수 ζ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\zeta(\nu) := \operatorname{argmin}_j \frac{1}{km} \sum_{i=1}^m \min_{\mathbf{y} \in C_j} \|\mathbf{x}_{i,\nu} - \mathbf{y}\|^2$$

이제 γ 번째 반복에서의 양자화 평균 왜곡 D_γ 를 다음 식으로부터 구한다.

$$D_\gamma := \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^M \min_j \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \min_{\mathbf{y} \in C_j} \|\mathbf{x}_{i,\nu} - \mathbf{y}\|^2$$

- 2) 만일 $(D_{\gamma-1} - D_\gamma)/D_\gamma \leq \Delta$ 가 만족되면 정지. 이때 \mathcal{C}_γ 가 설계된 부호책이다. 그렇지 않으면 계속해서 진행.
- 3) γ 를 1만큼 증가. 식 (11)의 집합으로부터 Jn_1 개의 부부호단어 $\mathbf{y}_\ell^o(j)$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{y}_\ell^o(j) := \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \Gamma_\ell(j)} \mathbf{x}}{\sum_{\mathbf{x} \in \Gamma_\ell(j)} 1} \quad (j=1, \dots, J, \ell=1, \dots, n_1)$$

이 부부호단어로 부호책 $\mathcal{C}_\gamma = \cup_{j=1}^J (C_j^o)^m$ 를 갱신한다. 이때 각 부부호책은 $C_j = \{\mathbf{y}_1^o(j), \dots, \mathbf{y}_{n_1}^o(j)\}$ 이다. 다시 단계 1)로 진행.

3. SAPQ의 부호화 복잡도와 메모리

SAPQ를 상관관계가 있는 신호를 양자화하는데 있어서 양자화 왜곡과 부호화 복잡도 측면에서 일반 VQ와 비교를 하기 위하여 본 절에서는 SAPQ를 수행하는데 있어서 필요한 계산량과 메모리를 [3]을 기초로 분석하였다. [3]의 부록 D에서는 1-SAPQ를 수행하는데 필요한 덧셈과 곱셈의 각 개수를 유도하였는데, SQ의 경우도 l_2 norms을 사용하고 나무구조 탐색을 한다는 가정 하에 필요한 곱셈의 양을 $2^{\eta+1} \log_2 n_1$ 으로 유도하였다. 그러나 SQ의 경우에는 l_2 norms은 l_1 norms과 동일하므로 양자화를 위한 곱셈이 필요하지 않다. 즉 SQ에 기초한 SAPQ($k=1$)의 수행을 위해서 곱셈이 필요하지 않다. 그러나 VQ에 기초한 SAPQ($k>1$)는 양자화하기 위한 하나의 불규칙변수에 대하여, 즉 하나의 스칼라 입력에 대하여 $2^\eta n_1$ 개의 곱셈이 필요하다. 이를 전송률 R 에 대해서 정리하면 $2^\eta n_1 = 2^{kR + (1-1/m)\eta}$ 가 된다. 반면에 κ 차원 VQ의 경우에 필요한 곱셈의 개수는 $n = 2^{\kappa R}$ 이 된다. 일반적으로 $k < \kappa$ 인 경우에 VQ와 SAPQ의 양자화 왜곡이 비슷하므로 VQ를 수행하기 위한 곱셈의 개수가 SAPQ의 경우보다 많다.

1-SAPQ의 수행을 위해 설계된 J 개의 부부호책 $C_j (j=1, \dots, J)$ 를 저장하기 위해 필요한 메모리는 각 부부호책의 크기가 n_1 이고 부부호단어는 k 차원의 벡터이므로 전체적으로 $k2^\eta n_1 = k2^{kR + (1-1/m)\eta}$ 개의 스칼라 값을 저장할 메모리가 필요하다. 반면에 κ 차원 VQ의 경우에 필요한 메모리양은 $\kappa n = \kappa 2^{\kappa R}$ 이 되는데, 곱셈의 경우와 마찬가지로 VQ를 수행하기 위한 메모리의 양이 1-SAPQ 경우보다 많다. VQ와 1-SAPQ를 수행하기 위해 필요한 곱셈의 개수와 메모리양을 비교하여 표 1에 정리하였다. 이 표에서 메모리양은 부호책의 저장을 위한 스칼라 값의 기억 장소의 개수를 의미한다.

훈련비(training ratio)는 양자기의 부호책을 설계할 때 하나의 부호단어를 설계하기 위해 사용되는 훈련열의 개수를 의미한다^[2, p.364]. 훈련비가 클수록 훈련열을 사용하여 설계한 부호책이 확률함수 F 에 근접하는 결과를 얻을 수 있다^[11]. 또한 양자기의 구조에 따라서 같은 성능을 나타내는 훈련비가 달라지는데 1-SAPQ 일반 VQ보다 훈련비가 좋아서 작은 크기의 훈련열로 확률함수 F 에 보다 근접한 부호책 설계가 가능하다^[12]. 표 1에 이러한 훈련비도 비교하였다.

표 1. VQ와 1-SAPQ의 부호화 복잡도와 메모리 비교($T = mM$: 훈련열에서 벡터의 개수)

Table 1. Encoding complexity comparison between VQ and 1-SAPQ ($T = mM$: number of vectors in TS).

Quantizers	VQ	1-SAPQ ($k > 1$)	1-SAPQ ($k = 1$)
Quantizer dimension	κ	km	
Codeword dimension	κ	k	
Codebook size	n	$2^\eta n_1^m$	
Subcodebook size	-	n_1	
Bit rate R	$(\log_2 n)/\kappa$	$(\log_2 n_1)/k + \eta/km$	
Multiplications per sample ^[3]	n	$2^\eta n_1$	0
Memory per sample ^[3]	κn	$k2^\eta n_1$	
Training ratio β ^[12]	$T/\kappa n$	$T/k2^\eta n_1$	

IV. 1차 마르코프 과정과 1-SAPQ의 설계

1-SAPQ는 \mathbf{R}^{km} 공간에서 구조적인 제한을 가지고 있으므로 입력의 형태에 따라서 양자화 성능이 다르다. [3]과 [4]에서는 주로 i.i.d.인 입력에 대해서 SAPQ의 성능을 여러 다른 양자기와 비교해 보았다. i.i.d.인 입력에 대한 SAPQ의 평균 양자화 왜곡은 TSVQ보다 좋으면서 양자화를 위한 복잡도는 TSVQ와 비슷하고 부호책을 위한 메모리의 크기는 오히려 작다^[3]. 본 장에서는 이러한 i.i.d. 입력보다는 동일한 분포를 가지면서 1차 마르코프 과정에 대해 1-SAPQ의 양자화 성능을, 부호책의 설계 및 구조와 연관하여 고찰해 보았다. 특히 SAPQ 설계에서 부호책의 구조와 밀접한 관계를 가지고 있는 초기 보호책 설계에 대하여 분석을 하고 간단한 알고리즘을 제시하였다.

불규칙 변수 X_1, \dots, X_m 의 분포는 동일하지만 서로 독립이 아닌 1차 마르코프 과정이라고 가정하자. $k=1$ 일 때, 1-SAPQ의 부호책을 구성하는 각 프로덕트 부호책은 \mathbf{R}^m 공간의 대각선 $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ 와 대칭 형태로만 놓일 수 있다^[3, Fig.3]. 따라서 입력 신호의 군집 형태가 역시 대각선을 중심으로 타원형의 군집을 형성한다는 사실로부터 적절한 1-SAPQ 부호책을 설계하면, 1-SAPQ를 사용하여 1차 마르코프 과정을 효과적

으로 양자화할 수 있을 것이다.

제 II장에서 소개한 1-SAPQ 설계 알고리즘은 Lloyd-Max 알고리즘에서와 마찬가지로 각 반복에서의 평균 왜곡 D_γ 는 감소하여 결국 수렴하게 되며, 초기 부호책 $\mathbf{C}_0 = \cup_{j=1}^J (\mathbf{C}_j^0)^m$ 에 따라서 어떠한 국부 최소치로 수렴한다. 따라서 설계된 부호책의 성능과 알고리즘의 수렴 속도는 알고리즘에 사용하는 초기 부호책 \mathbf{C}_0 의 선정에 따라 상당한 영향을 받는다. 이러한 영향은 일반 κ 차수 VQ의 경우보다 더 심한데, 이는 1-SAPQ의 각 프로덕트 부호책이 프로덕트라는 구조로 제한을 가지면서 서로 겹쳐있기 때문이다. 즉 초기 부호책에서 가지는 각 부호단어의 위치가 결국은 수렴된 1-SAPQ 부호책의 형태와 거의 일치한다. 1-SAPQ를 위한 초기 부호책 설정을 위해서는 [3]에서 제시한 ‘분리기법’이 이제까지 제시된 방법 중에서 i.i.d.인 입력에 가장 효과적이다.

1-SAPQ 설계를 위한 군집화 알고리즘은 초기 부호책 구성을 위하여 크기가 n_1 인 k 차원에서의 부부호책이 J 개 필요하다. 이 J 개의 부부호책을 만들기 위해서

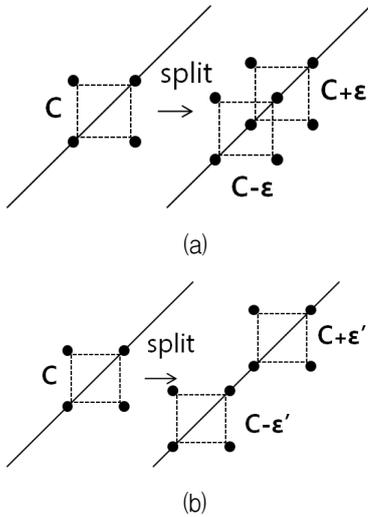


그림 1. 분리기법에 의한 초기부호책 설계 알고리즘^[3]에서 분리상수의 크기에 따른 1-SAPQ를 위한 초기 부호책의 형태($n_1=2$, $m=2$, $k=1$, $\eta=1$, $\epsilon < \epsilon'$) (a) 프로덕트 부호책 간에 겹침이 발생 (b) 프로덕트 부호책 간에 겹침이 없음

Fig. 1. Shape of the initial codebook of 1-SAPQ depending on the split constant in the split initial codebook algorithm^[3] ($n_1=2$, $m=2$, $k=1$, $\eta=1$, $\epsilon < \epsilon'$) (a) Overlap between the product codebooks (b) No overlap between the product codebooks.

는 먼저 일반 VQ 설계 알고리즘으로 만들어진 크기가 n_1 인 k 차원에서의 부부호책이 하나 필요하다. 이를 시작 부부호책이라 부르고 \mathbf{C}^0 라고 표기하자. SAPQ의 부가정보 비트인 $\eta (= \log_2 J)$ 가 정수라고 가정하고 양의 상수 ϵ 에 대하여 분리 벡터 $\boldsymbol{\epsilon} := (\epsilon, \dots, \epsilon) (\in \mathbf{R}^k)$ 를 정의하자. 그러면 분리기법에 기초한 초기 부호책 설계 방법은, 그림 1에서 보는 바와 같이 γ 번째 반복에서 부부호책 \mathbf{C}^γ 를 $\mathbf{C}^\gamma - \boldsymbol{\epsilon}$ 과 $\mathbf{C}^\gamma + \boldsymbol{\epsilon}$ 로 2개의 부부호책으로 나누어서 결국은 모두 J 개의 부부호책을 만드는 방법이다^[3, Split Method]. 이때 분리 상수 ϵ 의 크기에 따라서 초기 부호책의 형태가 달라지는데, ϵ 이 작은 경우는 그림 1(a)에서 보는 바와 같이 프로덕트 부호책간의 겹침이 존재하면서 2개의 부부호책으로 갈라지는데, 이렇게 설계된 초기 부호책은 i.i.d. 신호에 적절한 반면, 그림 1(b)와 같이 분리 상수 ϵ 을 적절히 크게 설정하여 분리된 부부호책들이 겹치지 않게 하면 1차 마르코프 과정의 양자화에 유리할 것이다.

예를 들어 [4]의 Fig. 3의 예를 살펴보자. 여기서 1-SAPQ는 $n_1=2$, $k=1$, $\eta=1$ 이고 2개의 불규칙 변수 X_1 과 X_2 가 양자화될 입력이다($m=2$). 또한 이들 불규칙 변수는 가우시언 분포를 가지는, 분산은 1이고 상관계수가 $\rho=0.9$ 인 1차 마르코프 과정이다. 1-SAPQ 부호책을 설계 시, 초기 부호책을 위한 분할 기법에서, 만일 분리 상수를 $\epsilon=0.01$ 로 사용하면 양자화 왜곡은 -8.07dB 가 된다^[4, Fig.3(a)]. 그러나 분리 상수를 $\epsilon=1$ 로 놓게 되면 양자화 왜곡은 -8.73dB 로 양자화 성능이 향상됨을 알 수 있다^[4, Fig.3(b)]. 이는 초기 부호책 선정 시에, 그림 1(b)에서 언급한 바와 같이 분리 상수가 크면 1-SAPQ의 프로덕트 부호책들이 타원형의 분포를 따라 적절히 배치될 수 있기 때문이다. 그러나 부부호

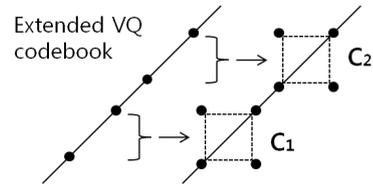


그림 2. k 차원에서 Jn_1 개의 부호단어를 가지는 확장부호책을 이용한 1-SAPQ 설계를 위한 초기부호책 설정의 예($n_1=2$, $m=2$, $k=1$, $J=2$)

Fig. 2. Example of initial codebook construction for 1-SAPQ by using the extended codebook with Jn_1 codeword in k -dimensions ($n_1=2$, $m=2$, $k=1$, $J=2$).

책의 크기인 n_1 이 커지게 되면 알고리즘의 수렴 속도가 매우 느리다는 단점이 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 본 장에서는 특별히 1차 마르코프 과정을 위한 1-SAPQ의 설계를 위하여 겹침이 없는 초기부호책의 설계를 위하여, 일반 k 차원에서 Jn_1 개의 부호단어를 가지는 VQ의 부호책을 이용한 초기 부호책 설계 알고리즘을 제안하였다. 그림 2에서 보는 바와 같이 먼저 훈련열의 k 차원 벡터를 사용하여 Jn_1 개의 부호단어를 만든다. 이때 VQ의 초기 부호책 설계를 위한 분리기법을 사용한다^[2,p.361]. 이러한 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

초기 부호책(확장된 VQ 부호책)

0) 초기화 ($\gamma = 0$): 부호책 크기 n_1 , 부부호단어의 차수 k , 부가정보 비트 η , 분리 상수 $\epsilon (> 0)$, 그리고 주어진 훈련열 $(\mathbf{x}_{1,\nu}, \dots, \mathbf{x}_{m,\nu})_{\nu=1}^M$ 에 대하여 평균 $\mathbf{y}_1^0 = (mM)^{-1} \sum_{\nu,i} \mathbf{x}_{i,\nu}$ 을 구함.

1) 만일 $\gamma \geq \eta + \log_2 n_1$ 이면 정지. 이때 확장부호책 $\{\mathbf{y}_1^\gamma, \dots, \mathbf{y}_2^\gamma\}$ 을 사용하여 다음과 같이 초기 부부호책을 구성함.

$$C_j^0 = \{\mathbf{y}_{n_1(j-1)+1}^\gamma, \dots, \mathbf{y}_{n_1 j}^\gamma\} \quad (j = 1, \dots, J)$$

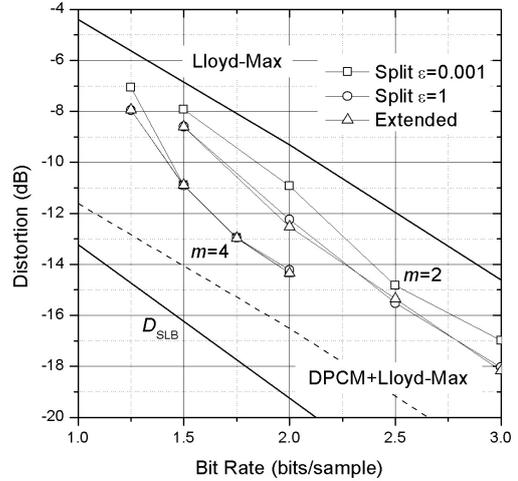
그렇지 않으면 계속 진행.

2) γ 를 1만큼 증가. 확장부호책을 사용하여 훈련열의 벡터 $\mathbf{x}_{i,\nu} (i = 1, \dots, m, \nu = 1, \dots, M)$ 을 양자화하고 확장부호책의 각 부호단어에 해당하는 훈련열의 벡터들의 센트로이드를 구하여 확장부호책 $\{\mathbf{y}_1^\gamma, \dots, \mathbf{y}_2^\gamma\}$ 을 갱신한다. 다시 단계 1)로 진행.

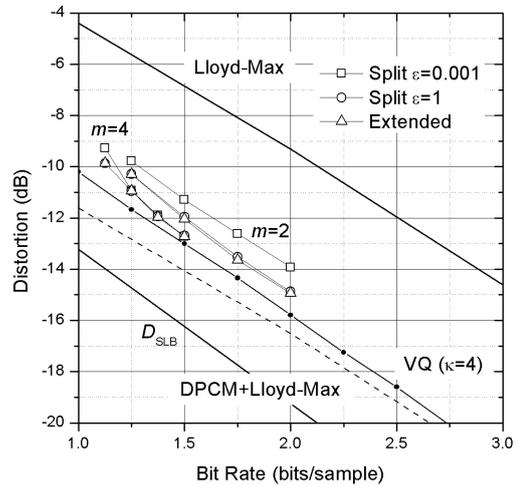
V. 실험 결과

본 논문의 모의실험에서는 제안한 초기 부호책 설계 알고리즘을 사용하여 상관관계가 있는 1차 마르코프 과정의 훈련열에 대하여 1-SAPQ를 설계하고 그 성능을 비교해 보았다. 이때 훈련열의 크기는 확률 함수 F 에 대하여 충실한 부호책 설계가 되도록 하기 위하여 훈련비 β 는 $\beta > 100$ 이 만족되도록 하였다.

그림 3의 실험은, 먼저 1-SAPQ 중에서, $k = 1$ 인 경우를 고찰하고, $k > 1$ 인 경우(그림 3(b))로 확장하여 고찰해 보았다. 그림 3(a)는 $k = 1$ 인 경우로 SQ에 기초를 두고 있는 1-SAPQ인데^[4], 표 1에서 언급한 바와 같이



(a)



(b)

그림 3. 1차 마르코프 과정을 위한 1-SAPQ 부호책 설계에서 분리 기법('Split')과 제안한 확장된 VQ 부호책('Extended') 기법의 비교(가우스 1차 마르코프 과정, 상관계수: $\rho = 0.9$, 분산: 1) (a) $k = 1, n_1 = 2, \eta = 1-4$ (b) $k = 2, n_1 = 4, \eta = 1-4$

Fig. 3. Comparison of the split ('Split') and proposed extended codebook ('Extended') schemes for designing the 1-SAPQ codebooks to quantize the first-order Markov process (Gauss first-order Markov process, correlation coefficient: $\rho = 0.9$, variance: 1) (a) $k = 1, n_1 = 2, \eta = 1-4$ (b) $k = 2, n_1 = 4, \eta = 1-4$

양자기 구현을 위해서는 곱셈이 필요 없이 단순하게 비교 연산(덧셈)만 있으면 되는 장점을 가지고 있다. 먼저 그림 3(a)에서 분리 기법으로 초기부호책을 선정하여 1-SAPQ를 설계하는 경우('Split')를 보면, 분리 상수 ϵ

에 따라서 1-SAPQ의 성능이 다름을 알 수 있다. $\epsilon = 0.001$ 은 i.i.d. 신호에 대하여 적합한데반해서 1차 가우스 마르코프 과정에 대해서는 $\epsilon = 1$ 이 보다 좋은 성능을 보임을 알 수 있다. 반면에 제안한 초기 부호책 선정 방법('Extended')을 사용한 경우는 분리 기법의 $\epsilon = 1$ 의 경우와 비슷한 양자화 왜곡 결과를 얻으면서 알고리즘의 수렴 속도는 제안한 기법을 사용하는 것이 훨씬 빠르다는 것을 알 수 있다. 따라서 1차 마르코프 과정을 위한 1-SAPQ 설계를 위해서는 제안한 초기 부호책 선정 방법을 사용하는 것이 유리하다. 이때 확장된 VQ 부호책 기법에서 분리 상수는 $\epsilon = 0.001$ 이다.

그림 3(a)의 SQ에 기초한 1-SAPQ의 성능은 DPCM^[10,Ch.6]에 Lloyd-Max 양자기를 사용한 경우보다 많이 떨어짐을 알 수 있는데, SQ에 기초한 1-SAPQ도 DPCM과 결합하여 성능을 개선할 수 있다^[9]. 여기서 DPCM은 상관성이 있는 신호로부터 이득을 얻어내고 1-SAPQ는 VQ의 이득을 제공한다. 그러나 이러한 기법은, DPCM을 같이 사용해야 하므로, 벡터 간에 독립적인 양자화가 곤란하여 채널 잡음에 민감하게 된다는 단점이 있다. 이와는 다른 방법으로 그림 3(b)에서 보는 바와 같이 VQ에 기초한 1-SAPQ($k > 1$)를 사용하면, k 차수 VQ를 이용하므로 신호내의 상관관계로부터 이득을 취할 수가 있어서 SQ에 기초한 1-SAPQ의 단점을 보완할 수 있다. 그림 3(b)를 보면 부호화 복잡도가 비슷한 VQ($\kappa = 4$)를 사용한 경우와 비슷한 양자화 왜곡 곡선을 보임을 알 수 있으며 'DPCM+Lloyd-Max'의 경우의 성능에 보다 근접하였음을 알 수 있다. 여기서 DPCM의 성능은 최대 성능으로 Lloyd-Max 양자기에 DPCM의 이득 $10\log_{10}(1-\rho^2)$ 을 더한 것이다^[10,p.261]. 또한 그림 3에서 D_{SLB} 는 Shannon의 양자기 왜곡에 대한 하한이다.

표 2에서는 $\kappa = 4$ 차수 VQ와, $k = 1$ 과 2인 경우의 1-SAPQ를 가우시언 및 라플라시언 i.i.d. 입력과 가우스-마르코프 및 라프라스-마르코프 입력에 대하여 각각 실험한 결과를 부호화 복잡도와 같이 비교를 하였다. 여기서 κ 차수 VQ와 1-SAPQ는 전송률이 $R = 2.25$ (bits/sample)에서 서로 부호화 복잡도가 비슷한 경우를 비교하였으며 1-SAPQ에서 부가비트는 모두 $\eta = 4$ 이다. 표 2에서 $k = 1$ 인 경우의 1-SAPQ는 곱셈

표 2. 전송률 $R=2.25$ 에서 i.i.d. 및 1차 마르코프 ($\rho=0.9$) 신호에 대한 양자화 왜곡(dB) 비교.

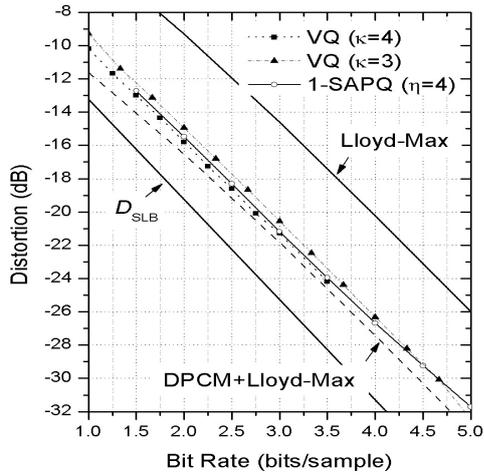
Table 2. At the bit rate $R=2.25$, quantizer distortion (dB) comparison for the i.i.d. and first-order Markov($\rho=0.9$) processes.

Quantizers	VQ	1-SAPQ		1-SAPQ + DPCM ^[9]
	$\kappa = 4$ $n = 512$	$k = 1$ $m = 16$ $\eta = 4$ $n_1 = 4$	$k = 2$ $m = 8$ $\eta = 4$ $n_1 = 16$	$k = 1$ $m = 16$ $\eta = 4$ $n_1 = 16$
Multiplications	512	0	256	1
Memory	2,048	64	512	64
Gaussian i.i.d.	-11.6	-11.4	-12.0	-
Gauss-Markov	-17.1	-14.6	-16.7	-18.2
Laplacian i.i.d.	-11.4	-10.7	-11.7	-
Laplace-Markov	-17.0	-14.5	-16.5	-17.7

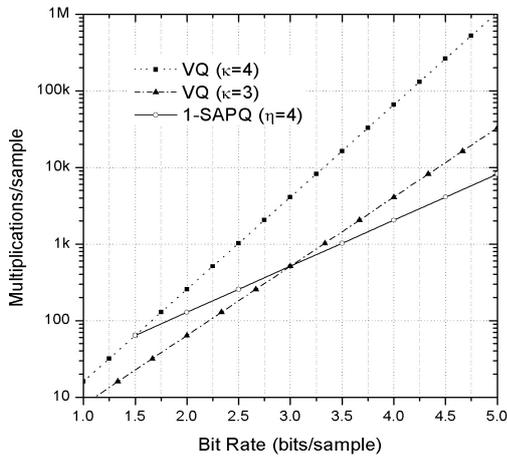
은 필요 없고 64개의 스칼라 값을 위한 메모리만 필요하다. 표 2를 보면 입력이 가우시언 i.i.d.인 경우는 $k = 2$ 인 경우의 1-SAPQ가 $\kappa = 4$ 차수 VQ에 비하여 부호화 복잡도도 낮으면서 더 좋은 양자화 왜곡을 가짐을 알 수 있다. 가우스-마르코프 또는 라프라스-마르코프와 같이 상관관계가 있는 신호의 경우는 i.i.d. 신호와는 달리 상관관계를 이용하여 이득을 취할 수가 있다. 표 2를 보면 VQ의 경우 가우스-마르코프 및 라프라스-마르코프 신호에 대하여 각각 5.5dB, 5.6dB의 이득을 취함을 알 수 있다. 1-SAPQ도 상관관계를 가지는 신호에 대하여 이득을 취하는데 $k = 1$ 인 1-SAPQ는 각각 3.3dB, 3.8dB의 이득으로 일반 VQ에 비하여 떨어진다. 이는 구조적 제한을 가지는 1-SAPQ의 부호책 때문이다. $k = 2$ 인 1-SAPQ는 $k = 1$ 인 경우보다는 구조적 제한을 덜 받으므로, $k = 2$ 인 1-SAPQ는 각각 4.7dB, 4.8dB로 SQ에 기초한 1-SAPQ의 이득보다 크다. 참고로 1-SAPQ에 DPCM을 결합한 양자기의* 경우는 κ 차수 VQ보다 더 좋은 양자화 왜곡을 보임을 알 수 있다.

그림 4에는 고 전송률($1 < R \leq 5$)에서의 1차 마르코프 과정에 대한 1-SAPQ의 성능을 실험하였다. 그림 4(a)에서 보는 바와 같이 DPCM에 Lloyd-Max 양자기를 사용한 경우의 성능에 근접함을 알 수 있으며, $\kappa = 4$ 차수의 VQ와 비슷한 성능을 보임을 알 수 있다. 그러나 전송률이 올라가면서 $\kappa = 4$ 차수의 VQ는, 높은 부호화 복잡도와 매우 큰 훈련열의 필요로 인하여 설계

* DPCM과 1-SAPQ가 결합된 양자기는 참고문헌 [9]에 제안되어 있는데, 본 실험에서의 DPCM은 스칼라 값을 1차 선형 예측하는 예측기를 가지고 있으며 예측 계수는 $\rho = 0.9$ 이다. 또한 여기서 사용된 1-SAPQ의 부호책은 i.i.d. 분포에 대하여 $k = 1$, $m = 16$, $n' = 2$, $\eta = 4$ 로 설계되었다.



(a)



(b)

그림 4. 고 전송률에서의 1차 마르코프 과정에 대한 1-SAPQ의 성능비교 (a) 1-SAPQ와 VQ의 양자화 왜곡 (dB) 비교 (b) 1-SAPQ와 VQ의 부호화 복잡도 비교(multiplications/sample)

Fig. 4. 1-SAPQ Performance comparison for high bit rates (a) Quantizer distortion (dB) comparison between 1-SAPQ and VQ (b) Encoding complexity comparison between 1-SAPQ and VQ (multiplications/sample).

하기가 곤란해지지만 1-SAPQ의 경우는 고 전송률의 양자화도 가능하다는 것을 알 수 있다. $\kappa = 3$ 차수의 VQ에서 부호화 복잡도가 1-SAPQ 경우와 비슷한 경우에는, 1-SAPQ의 양자화 왜곡이 더 좋을 수 있다. 그림 4(b)는 표 1에서 부호화 복잡도에서 곱셈의 수를 나타낸 것으로, 메모리양과 훈련비는 여기에 상수를 곱한 것과 같다(표 1 참조). $\kappa = 4$ VQ와 1-SAPQ를 비교하면 고 전송률에서 1-SAPQ의 부호화 복잡도가 낮으

며 $\kappa = 3$ VQ의 경우에는 $R=3$ 에서 곱셈수가 비슷함을 알 수 있다. 따라서 그림 4의 결과를 보면 고 전송률의 경우 1-SAPQ가 비슷한 부호화 복잡도를 가지는 VQ에 비하여 1차 마르코프 과정에 대한 양자화를 보다 효율적으로 수행할 수 있음을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는, 구조적으로 제한을 가지는 벡터 양자기(vector quantizer: VQ)인 표본 적응 프로덕트 양자기(sample-adaptive product quantizer: SAPQ)중에서, 양자화 공간의 대각선에 대칭 형태를 가지는 단순한 형태의 1-SAPQ가 있는데, 이러한 1-SAPQ가 1차 마르코프 과정에 대한 성능을 분석하고 모의실험을 하였다. 이러한 입력에 적절한 1-SAPQ 부호책의 설계를 위하여 초기 부호책 설정 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘을 사용하여 1-SAPQ를 설계하면 알고리즘의 수렴 속도도 빠르면서 상관관계를 가지는 신호에 적절한 부호책이 설계됨을 알 수 있었다. 고 전송률에서는 일반 VQ의 경우 부호화 복잡도의 증가로 인하여 설계가 어려워지나 1-SAPQ를 사용하면 설계가 가능하며 DPCM에 Lloyd-Max 양자기를 사용한 경우에 근접하는 성능을 얻을 수 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] A. J. Viterbi and J. K. Omura, *Principles of Digital Communication and Coding*. McGraw Hill, 1979.
- [2] A. Gersho and R. M. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [3] D. S. Kim and N. B. Shroff, "Quantization based on a novel sample-adaptive product quantizer (SAPQ)," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2306-2320, Nov. 1999.
- [4] D. S. Kim and N. B. Shroff, "Sample-adaptive product quantization: asymptotic analysis and examples," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 10, pp. 2937-2947, Oct. 2000.
- [5] Z. Raza, F. Alajaji, and T. Linder, "Design of sample adaptive product quantizers for noisy channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 4, pp. 576-580, April 2005.
- [6] D. S. Kim and Y. Park, "Sample-adaptive

- product quantizers with affine index assignments for noisy channels,” *IEICE Trans. Commun.*, vol. E92-B, no. 10, pp. 3084-3093, Oct. 2009.
- [7] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, “Voronoi regions of lattices, second moments of polytopes, and quantization,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, no. 2, pp. 211-226, Mar. 1982.
- [8] J. Max, “Quantizing for minimum distortion,” *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. 6, pp.7-12, March 1960.
- [9] 김동식, 이상욱, “표본 적응 프리덕트 양자기에 기초한 DPCM을 이용한 고 전송률 영상 압축,” *한국통신학회 논문지*, 제 24권, 12B호, pp. 2382-2390, 1999년. 12월.
- [10] N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [11] D. S. Kim and M. R. Bell, “Upper bounds on empirically optimal quantizers,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 49, no. 4, pp. 1037-1046, April 2003.

— 저 자 소 개 —

김 동 식(정회원)
 대한전자공학회 논문지
 제 48권 SP편 제 4호 참조