

논문 2012-49SP-2-15

일반화된 직교 매칭 퍼슈트 알고리즘

(Generalized Orthogonal Matching Pursuit)

권석범*, 심병효**

(Seokbeop Kwon and Byonghyo Shim)

요약

Compressive sensing 분야에서 orthogonal matching pursuit (OMP) 알고리즘은 underdetermined 시스템의 스파스 (sparse) 신호를 복구하는 대표적인 greedy 알고리즘으로 많은 관심을 받고 있다. 본 논문에서는 OMP 알고리즘의 반복과정에서 하나 이상의 support들을 선택할 수 있도록 하는 OMP 알고리즘의 일반화된 형태의 generalized orthogonal matching pursuit (gOMP) 기법을 제안한다. gOMP가 완벽한 신호 복원을 보장하기 위해 restricted isometry property (RIP)를 이용한 충분조건, $\delta_{NK} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+2\sqrt{N}}}$ 을 제시한다. 실험을 통해 gOMP는 매 반복과정에서 하나 이상의 support들을 선택함으로써 높은 복원 성능과 낮은 복잡도를 가짐을 확인하였다.

Abstract

As a greedy algorithm reconstructing the sparse signal from underdetermined system, orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm has received much attention in recent years. In this paper, we present an extension of OMP for pursuing efficiency of the index selection. Our approach, referred to as generalized OMP (gOMP), is literally a generalization of the OMP in the sense that multiple (N) columns are identified per step. Using the restricted isometry property (RIP), we derive the condition for gOMP to recover the sparse signal exactly. The gOMP guarantees to reconstruct sparse signal when the sensing matrix satisfies the RIP constant $\delta_{NK} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+2\sqrt{N}}}$. In addition, we show recovery performance and the reduced number of iteration required to recover the sparse signal.

Keywords : orthogonal matching pursuit (OMP), compressive sensing (CS), restricted isometry property (RIP)

I. 서론

나이퀴스트 샘플링 (Nyquist sampling) 이론은 현재 대부분의 디지털 장치에서 아날로그 신호를 획득하는데 사용되는 근간이 되는 이론이다. 이 이론에 의하면 아날로그 신호를 완벽히 복원하기 위해서 해당 아날로그 신호 주파수 대역폭의 두 배 이상의 주파수로 샘플링을

해야 한다. 이 이론은 간결하고 명쾌하지만, 신호를 완전히 무결하게 복원하기 위한 충분조건 (sufficient condition)이기에 신호의 특성이 반영되지 않는다. 최근 고화질 영상 처리나 고속 통신 시스템 등의 예에서 볼 수 있듯이 샘플링 해야 하는 데이터양이 급격히 늘어남에 따라서 이 이론의 효율성에 대한 의문이 꾸준히 제기되어 왔다.

Candes와 Donoho 등은 복원하고자 하는 신호벡터에서 0의 개수가 많은 경우, 나이퀴스트 샘플링 보다 훨씬 높은 압축률로 원 신호를 완벽하게 복원할 수 있음을 증명하였다. 이 이론을 흔히 압축 센싱 이라고 부른다.^[1-3] 스파스 신호 $\mathbf{x} \in R^n$ 과 관측값 $\mathbf{y} \in R^m$ 은 측

* 학생회원, ** 정회원, 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과 (School of Information and Communication, Korea University)

※ 이 논문은 2011년도 지식경제 전력산업원천기술개발과제 (과제번호 : 2011T100100011), '2단계 BK21 사업'의 연구비로 수행되었음.

접수일자: 2011년10월21일, 수정완료일: 2012년2월9일

정 행렬 (sensing matrix) $\Phi \in R^{m \times n}$ 을 매개로 하여 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$y = \Phi x \tag{1}$$

압축 센싱 기법의 핵심은 $m \ll n$ 인 측정 행렬 Φ 와 관측치 y 로부터 크기가 n 인 스파스 신호벡터 x 를 복원하는 것이다. 측정행렬 Φ 의 열 (column) 중에서 신호벡터의 0 아닌 원소와 곱해지는 열의 인덱스를 (true) support 라고 부른다. 예를 들면 x 벡터가 [1 0 2 0] 인 경우 support 집합은 {1, 3} 이 된다. support 를 완벽하게 구하면, support 만으로 이루어진 부분행렬을 이용하여 원 신호벡터를 구해낼 수 있으므로 궁극적으로 (1) 식의 해를 구하는 것과 동일하다.

일반적으로 식 (1) 과 같이 과소결정 된 (underdetermined) 시스템인 경우, 일반적으로 하나 이상의 x 가 존재하기 때문에 일반적으로는 원 신호를 완벽히 복원할 수 없다. 하지만 복원하고자 하는 신호 x 가 스파스한 성질을 가지며 또한 측정 행렬 Φ 가 직교성 (orthogonality) 를 가지고 있다면 L_1 -최소화 기법을 사용하여 원 신호 x 를 완벽히 복원할 수 있다.^[3]

$$\hat{x} = \min \|x\|_1 \quad \text{subject to } \Phi x = y \tag{2}$$

L_1 -최소화 기법에서 원 신호 x 를 완벽히 복원하기 위한 조건으로, 주어진 K -스파스 신호 (영 아닌 값이 K 개)에 대해서 측정 행렬 Φ 의 직교성 정도를 표현하는 restricted isometry property (RIP) 가 널리 사용된다.^[4]

$$1 - \delta < \frac{\|\Phi x\|_2}{\|x\|_2} < 1 + \delta \tag{3}$$

식 (3) 을 만족하는 가장 작은 상수를 RIP 상수라고 부르며 δ_K 로 표시한다.^[5] Candes 와 Donoho 는 측정 행렬 Φ 가 $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ 의 조건을 만족할 때, L_1 -최소화 기법을 사용하여 원 신호 x 를 완벽히 복원할 수 있음을 밝혀 내었다. 하지만 L_1 -최소화 기법은 convex 최적화 문제로서 많은 양의 계산이 필요하다.

이러한 단점을 극복하기 위한 대안으로서 greedy 알고리즘들이 근래 활발히 연구되고 있다. Greedy 알고리즘은 L_1 -최소화 기법에 비해 월등히 낮은 복잡도를 가지면서도 우수한 복원 성능을 보여주고 있기에 실용적이다. 이러한 greedy 기반의 대표적인 알고리즘으로는 orthogonal matching pursuit (OMP) 가 있으며, 근래

OMP 를 개선한 여러 가지 알고리즘들이 제안되었다.^[6] ^[3] 이에에는 compressive sampling matching pursuit (CoSaMP)^[7], subspace pursuit (SP)^[8], regularized orthogonal matching pursuit (ROMP)^[9] 그리고 stagewise orthogonal matching pursuit (StOMP)^[10] 등이 있다. Wakin 과 Davenport 는 OMP 알고리즘을 사용하여 K -스파스한 (신호벡터 중 K 개의 0 아닌 원소가 있는) 신호벡터를 오류없이 완벽하게 복원하기 위해서는 측정 행렬 Φ 가 $\delta_{K+1} < \frac{1}{3\sqrt{K}}$ 를 만족해야 함을 밝혀 내었다.^[11] 최근 본 연구팀은 완벽한 복원이 가능한 영역이 이 보다 훨씬 넓으며 XX 로 주어지는 것을 밝혀 내었다.

본 논문에서는 OMP 알고리즘을 확장한 일반화된 OMP (generalized OMP; gOMP) 기법을 제안하고 gOMP 의 완벽한 신호 복원을 위한 RIP 기반의 충분조건을 제시한다. 또한 모의 실험을 통하여 제안하는 gOMP 알고리즘이 기존에 알려진 스파스 신호 복원 알고리즘들에 비해 우수한 복원 성능과 낮은 복잡도를 가지는 것을 확인한다.

II. gOMP 알고리즘

OMP 는 대표적인 greedy 알고리즘으로 매 반복과정 (iteration) 마다 support 들을 하나씩 추가하는 동시에, 잔차 (residual) 을 줄여가며 스파스 신호 x 를 복원한다. 본 논문에서 제안하는 gOMP 는 OMP 의 직접적인 확장된 형태로서, OMP 가 매 반복과정에서 support 를 하나씩 늘리는 반면, gOMP 는 매 반복과정에서 N 개의 support 를 선택한다. 다수의 support 를 선택함으로써 더 빨리 모든 support 들을 찾을 수 있는 장점이 있다. 본 장에서는 gOMP 알고리즘에 대해 살펴본 후, gOMP 가 스파스 신호 x 를 완벽히 복원하기 위한 충분조건을 제시한다.

1. gOMP 의 개요

gOMP 는 각 반복 (iteration) 과정에서 정합 필터 (matched filtering) 후 얻어지는 상관치들 중 가장 큰 N 개의 원소의 인덱스를 support 로 지정한 후, 선택된 support 들의 subspace 만으로 least squares 해를 구하여 x 의 추정치를 만들며, 또한 선택된 subspace 로 이루어지는 공간에 투사 (projection) 된 신호를 관측치로부터

표 1. 일반화된 orthogonal matching pursuit 알고리즘
Table 1. Generalized orthogonal matching pursuit algorithm.

Input :	Φ, y, K
Output :	\hat{x}
Initialize	$r_0 = y$, and $T_0 = \emptyset$.
For	$k \leq \min(K, m/N) \ \& \ \ r_{k-1}\ > \epsilon$
(Identify)	for $i=1, 2, \dots, N$ $t_i^k = \operatorname{argmax}_{j: j \notin \{A^{k-1}, t_{i-1}^k, t_{i-2}^k, \dots, t_i^k\}} \langle r_{k-1}, \phi_j \rangle $
(Augment)	$\Lambda^k = \Lambda^{k-1} \cup \{t_1^k, t_2^k, \dots, t_N^k\}$
(Estimate)	$\hat{x} = \operatorname{argmin}_{x: p(x)=\Lambda^k} \ y - \Phi x\ $
(Update)	$r_k = y - \Phi \hat{x}$ $k = k + 1$
end	

번 후 잔차를 생성한다. OMP와 대비되는 가장 큰 특징은 표 1의 (identify)과정에서 기존 OMP는 잔차와 측정 행렬의 열 벡터들의 상관치의 절대값 중 가장 큰 support 하나만을 선택하지만, gOMP는 N 개의 큰 support들을 선택한다는 점이다. $N=1$ 인 경우 gOMP 알고리즘은 OMP와 동일하게 된다. gOMP는 각 반복마다 다수의 support들을 선택함으로써 더 많은 true support들을 선택할 수 있기에, 필요한 반복횟수를 줄이는 동시에 수행시간을 크게 단축시킬 수 있다.

2. gOMP의 RIP기반 충분조건

압축 센싱 알고리즘은 해당 행렬이 특정 충분조건을 만족하는 경우에 대해서 스파스 신호 복원을 보장하게 되는데, gOMP 역시 해당 행렬이 정해진 충분조건을 만족하는 경우에 대해 신호 복원을 보장한다. 본 장에서는 gOMP 알고리즘이 동작하기 위한 충분조건에 대해 분석한다.

gOMP 알고리즘이 모든 support의 원소를 찾기 위해서는 각 반복과정마다 N 개의 support중 적어도 하나 이상의 true support를 포함해야만 한다. 즉, 이것은 잔차와 측정 행렬 Φ 의 각각의 열(column)의 상관값으로 이루어지는 원소 중 실제 true support가 최소 N 번째에 속해야 함을 의미한다.

이를 표현하기 위해 S -support 집합에 대해, 측정 행렬 Φ 의 열들과 관측값과의 상관치 중, N 번째로 큰 절대 값, $C_S^{(N)}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$C_S^{(N)} = |\langle \Phi_S, y \rangle| \quad (4)$$

T 와 W 는 true support 집합과 wrong support 집합이라 가정할 경우, 식 (4)를 이용하면 gOMP는 측정 행렬 Φ 의 열들과 관측치와의 상관치에서 가장 큰 N 개의 값 중 $C_T^{(1)}$ 이 포함되어야 한다. 예를 들어, $C_W^{(1)} > C_W^{(2)} > \dots > C_T^{(1)} > \dots > C_W^{(N-1)}$ 인 경우이다. 이런 다양한 경우들은 다음의 조건으로 간략하게 표현할 수 있다.

$$C_T^{(1)} > C_W^{(N)} \quad (5)$$

gOMP가 K -스파스한 신호 복원을 하기 위한 충분조건을 구하기 위하여 두 가지 경우를 고려한다. 첫째는 초기 반복 (initial iteration)에서 관측값과 측정 행렬 Φ 의 열들 간의 상관치에서 (5)식을 만족시키는 경우이고, 둘째는 일반적인 k ($k > 1$) 번째 반복에서 잔차와 측정 행렬 Φ 의 열들 간의 상관치로부터 얻어지는 (5)식의 조건이다. 마지막으로 gOMP는 두 가지 경우를 포함하여 알고리즘을 수행하기 때문에 두 가지 경우를 바탕으로 gOMP의 전체 반복에 대한 충분조건을 제시한다.

gOMP의 충분조건을 자세하게 분석하기에 앞서, gOMP의 이에 사용되는 RIP 성질 2가지를 정리한다.

정리 1: 측정 행렬 Φ 가 $K_1 < K_2$ 인 두 실수에 대해 RIP 조건을 만족하면, 다음의 관계가 성립한다.^[4, 8]

$$\delta_{K_1} < \delta_{K_2} \quad (6)$$

정리 2: disjoint한 관계에 있는 T, S 집합에 대해 $\delta_{|S|+|T|} < 1$ 인 경우, 다음의 부등식이 성립한다.^[8, 12]

$$\|\Phi_S' \Phi_T u\| \leq \delta_{|S|+|T|} \|u\|_2 \quad (7)$$

가. 첫 번째 반복과정에서 gOMP의 충분조건

첫 번째 반복과정의 경우, 관측값과 측정 행렬 Φ 와의 상관관계에서 식 (5)는 측정 행렬 Φ 가 다음의 RIP 조건을 만족할 때 성립 된다.

정리 3: gOMP는 K -스파스한 신호 복원을 위해 첫 번째 반복에서 N 개의 support들을 선택하는 경우, 관측 행렬 Φ 가 다음의 RIP 조건에 만족될 때, 선택된 support들 중 하나 이상의 true support가 포함됨을 보장한다.

$$\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + \sqrt{N}} \quad (8)$$

증명:

식 (8)를 증명하기 위해 식 (5)의 좌변, $C_T^{(1)} = |\langle \Phi_T \mathbf{y} \rangle|_\infty$ 는 L_∞ 과 L_2 의 잘 알려진 부등식과 소개된 RIP 성질을 이용하여 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$C_T^{(1)} \geq \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\sqrt{K}}(1 - \delta_K) \quad (9)$$

식 (5)의 우변, $C_W^{(N)} = |\langle \Phi_W \mathbf{y} \rangle|^{(N)}$ 은 소개된 RIP 성질을 이용하면 다음과 같이 정리 된다.

$$\delta_{K+N} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\sqrt{N}} \geq C_W^{(N)} \quad (10)$$

식 (9)의 우변과 식 (10)의 좌변이 다음의 관계가 성립되면, 식 (5)가 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\sqrt{K}}(1 - \delta_K) \geq \delta_{K+N} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\sqrt{N}} \quad (11)$$

식 (11)을 소개된 RIP 성질을 이용하여 풀면 정리 3이 된다.

나. k 번째 반복과정에서 gOMP의 충분조건

k 번째 반복과정의 경우, 첫 번째 반복과정에서 사용했던 관측치 대신 잔차와 측정 행렬 Φ 와의 상관관계를 이용하여 식 (5)가 성립될 수 있는 조건을 찾는다.

k 번째 반복의 충분조건을 찾기 위해 식 (4)에서 관측치로 사용되었던 \mathbf{y} 를 k 번째 잔차 \mathbf{r}_k 로 대체하여 k 번째 반복에서는 다음의 정의를 사용한다.

$$C_S^{(N)} = |\langle \Phi_S \mathbf{r}_k \rangle| \quad (12)$$

식 (12)의 정의를 사용하여 k 번째 반복에서 측정 행렬 Φ 가 다음의 RIP 조건을 만족할 때, 식 (5)가 성립된다.

정리 4: gOMP는 K -스파스한 신호 복원을 위해 각 반복에서 N 개의 support들을 선택하는 경우, 센싱 행렬이 다음의 조건에 만족될 때, 완벽한 신호 복원을 보장

한다.

$$\delta_{NK} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + 2\sqrt{N}} \quad (13)$$

증명:

분석을 위해 Λ^k 를 k 번째 반복과정 이전에 선택된 support들의 집합이라고 정의하고, 이미 선택된 true support들의 개수를 l 이라고 정의한다. k 번째 반복과정에서는 k 이전의 반복과정들마다 최소 하나의 true support가 선택되었기 때문에 l 은 최소 k 보다 크게 되어 다음의 관계가 성립한다.

$$l = |T \cap \Lambda^k| \geq k \quad (14)$$

식 (5)의 좌변, $C_T^{(1)} = |\langle \Phi_T \mathbf{r}_k \rangle|_\infty$ 은 norm 부등식을 이용하여 k 번째 잔차 크기의 제곱, $\|\mathbf{r}_k\|_2^2$ 과 다음의 관계를 가진다.

$$\|\mathbf{r}_k\|_2^2 \leq \sqrt{K-l} \|\mathbf{X}_{T-\Lambda^k}\|_2 C_T^{(1)} \quad (15)$$

$\|\mathbf{r}_k\|_2^2$ 는 $\mathbf{r}_k = P_{\Lambda^k}^\perp \mathbf{y}$ 에서 다음의 식으로 정리된다.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_k\|_2^2 &= \|\Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 - \|P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \quad (16) \end{aligned}$$

식 (16)에서 두 항은 RIP 성질들을 이용하여 각각 다음의 부등식으로 정리된다.

$$\|\Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \geq (1 - \delta_{K-l}) \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\|P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \\ &\leq \frac{\delta_{Nk+K-l}^2 (1 + \delta_{Nk})}{(1 - \delta_{Nk})^2} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \quad (18) \end{aligned}$$

$\|\mathbf{r}_k\|_2^2$ 을 기준으로 식 (15), (16), (17), 그리고 (18)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_T^{(1)} &\geq \\ &\left(1 - \delta_{N-l} - \frac{1 + \delta_{Nk}}{(1 - \delta_{Nk})^2} \delta_{Nk+K-l}^2\right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{K-l}} \quad (19) \end{aligned}$$

식 (5)의 우변, $C_W^{(N)} = |\langle \Phi_W \mathbf{r}_k \rangle|^{(N)}$ 는 norm 부등식을 이용하여 다음의 관계를 가진다.

$$\|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2 \geq \sqrt{N} C_W^{(N)} \quad (20)$$

다음으로 $\|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2$ 는 다음의 상계 (upper bound)를 가진다.

$$\begin{aligned} & \|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2 \\ & \leq \|\Phi_W^T \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \\ & \quad + \|\Phi_W^T P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서 두 항은 RIP 성질들을 이용하여 각각 다음의 부등식으로 정리된다.

$$\|\Phi_W^T \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \leq \delta_{N+K-l} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \|\Phi_W^T P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \\ & \leq \frac{\delta_{N+Nk} \delta_{Nk+K-l}}{1-\delta_{Nk}} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$\|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2$ 를 기준으로 식 (20), (21), (22), 그리고 (23)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_W^{(N)} & \leq \\ & \left(\delta_{N+K-l} + \frac{\delta_{N+Nk} \delta_{Nk+K-l}}{1-\delta_{Nk}} \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{N}} \end{aligned} \quad (24)$$

식 (19)과 식 (24)의 우변들을 이용하여 다음의 관계가 성립할 경우, 식 (5)가 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \delta_{N-l} - \frac{1 + \delta_{Nk}}{(1-\delta_{Nk})^2} \delta_{Nk+K-l}^2 \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{K-l}} \\ & \geq \left(\delta_{N+K-l} + \frac{\delta_{N+Nk} \delta_{Nk+K-l}}{1-\delta_{Nk}} \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{N}} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)의 간결한 표현을 위해, $N-l < NK$, $Nk+K-l < NK$, $Nk < NK$ 그리고 $N+Nk < NK$ 인 점을 정리 1을 이용하면 각각 $\delta_{N-l} < \delta_{NK}$, $\delta_{Nk+K-l} < \delta_{NK}$, $\delta_{Nk} < \delta_{NK}$ 그리고 $\delta_{N+Nk} < \delta_{NK}$ 부등식이 성립한다. 이 부등식들을 이용하여 식 (24)을 정리하면 다음의 식으로 정리된다.

$$\delta_{NK} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K-l} + 2\sqrt{N}} \quad (26)$$

$l > 1$ 에 의해 정리 4는 식 (26)의 충분조건이 된다.

다. 전체 반복에서 gOMP의 충분조건

gOMP가 완벽한 신호 복원을 하려면 첫 번째 반복의 경우와 k 번째 반복의 경우, 두 경우 모두 만족을 해야

한다. N 과 K 가 1보다 큰 경우, $\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + \sqrt{N}} >$

$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + 2\sqrt{N}}$ 이고, $NK > N+K$ 이므로 정리 1에 의해

$\delta_{NK} > \delta_{N+K}$ 가 성립한다. 이에 따라 k 번째 반복의 조

건, $\delta_{NK} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + 2\sqrt{N}}$ 이 성립하면, 첫 번째 반복의

충분조건, $\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + \sqrt{N}}$ 은 성립하게 되므로

gOMP 전체 반복의 경우 충분조건은 δ_{NK}

$< \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + 2\sqrt{N}}$ 이 된다.

III. 모의 실험

모의실험에서는 gOMP의 성능 확인을 위해 신호 복원율과 복잡도를 L_1 -최소화 기법, OMP, StOMP, 그리고 CoSaMP기법과 함께 비교 실험하였다. 관측 행렬은 128×256 의 크기를 가지며 각 항들은 가우스분포를 갖는다. 잡음이 없는 환경에서 1000개의 행렬을 사용하였고 스파스 신호는 K 개의 영 아닌 값을 갖는 가우스분포 값으로 구성하였다. gOMP의 반복과정에서 선택하는 support의 크기, 즉, $N=5, 10$ 인 경우에 대해 실험을 수행하였고, StOMP 방식은 두 가지 threshold 방법, false alarm rate (FAR)과 false discovery rate (FDR) 중 조금 더 성능이 우수한 FAR기법에 대해 실험을 수행하였다.

그림 1은 완벽 복원 성능 실험의 결과로 x축은 sparsity 단계, y축은 완벽 신호 복원율을 의미한다.

그림 1에서 OMP는 크기가 128인 신호에 대해 약 20개의 영 아닌 신호까지는 완벽한 복원을 할 수 있으나 sparsity 단계가 20이 넘어가면서 복원율이 감소하였고, StOMP는 33개의 sparsity 단계까지 CoSaMP는 37개의 sparsity 단계까지 완벽히 신호를 복원 할 수 있는 것을 확인할 수 있다. 이에 반해 gOMP는 크기가 128인 신호에서 39개의 영 아닌 신호까지 완벽히 복원함을 확인할 수 있다. 본 모의실험을 통하여 gOMP가 OMP, StOMP, CoSaMP에 비해 덜 스파스(sparse)한, 즉 0아닌 원소가 많은 경우에도, 신호 복원의 성능이 뛰어난

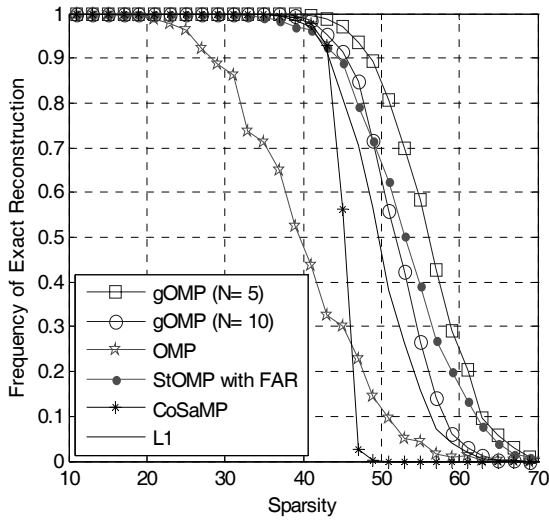


그림 1. gOMP와 다른 알고리즘들의 완벽신호 복원율
Fig. 1. The exact recovery ratio for gOMP and other algorithms.

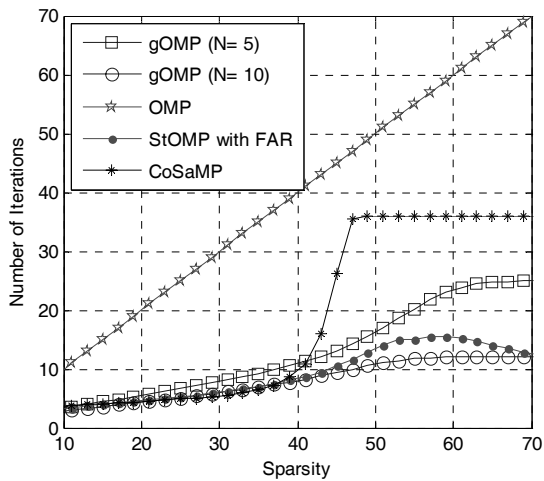


그림 2. gOMP와 다른 알고리즘들의 반복 횟수
Fig. 2. The iteration number of gOMP and other algorithms.

것을 확인할 수 있다.

다음으로 복잡도를 확인하기 위해 해당 알고리즘들이 종료되었을 때까지 수행된 반복 횟수와 수행 시간의 평균을 측정하였다. 그림 2와 3의 y축은 각각 평균 반복 횟수와 수행 시간을 의미하고 x축은 sparsity 단계를 의미한다. 그림 2에서 gOMP는 OMP에 비해 약 1/4의 반복횟수만으로 알고리즘이 끝나는 것을 확인할 수 있다. 스파스한 신호에 대해서는 StOMP, CoSaMP와 비슷한 반복횟수를 가지지만 스파스하지 않은 신호의 경우, 복원이 실패하면서 CoSaMP알고리즘의 반복횟수

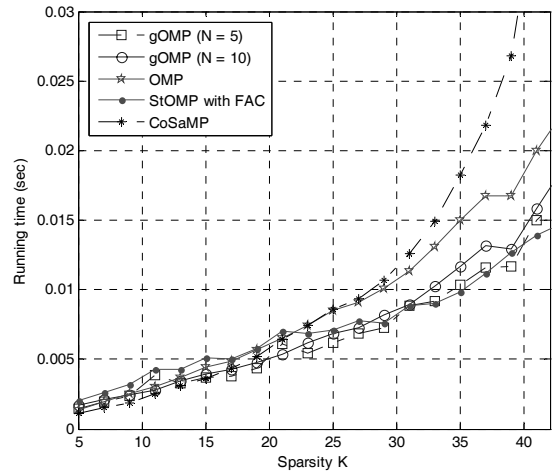


그림 3. gOMP와 다른 알고리즘들의 수행 시간
Fig. 3. The running time of gOMP and other algorithms.

가 급격하게 증가하는 것을 확인할 수 있다. 특히, sparsity 단계가 50을 넘어갈 때 CoSaMP알고리즘은 반복횟수가 발산하는 경향이 있어 최대 반복 수를 제한하였다. 그림 3에서 스파스한 신호에 대해 StOMP를 제외한 다른 알고리즘들은 큰 차이를 보이지 않지만 스파스하지 않는 신호의 복원일 경우, gOMP와 StOMP가 적은 시간이 걸림을 알 수 있다.

gOMP는 각 반복에서 선택하는 N 의 크기가 클수록 해당 알고리즘이 종료되는데 필요한 반복횟수가 적어짐을 확인할 수 있다. 이 현상은 각 반복마다 N 의 크기가 커질수록 true support들이 많이 포함되기 때문에 발생하는 것으로 볼 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 OMP의 일반화된 형태인 gOMP 알고리즘을 제안하였다. Greedy 알고리즘의 대표적인 OMP 알고리즘은 반복과정마다 하나의 support 선택하여 스파스 신호를 복원하지만, gOMP는 반복과정에서 다수의 support들을 선택한다. 완벽한 복원을 위해서는 다수의 선택된 support중 최소 하나 이상의 true support를 포함하는 것이 보장되어야 하는 점으로부터 RIP 기반의 충분조건, $\delta_{NK} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + 2\sqrt{N}}$ 을 얻어내었다. gOMP는 반복과정에서 다수의 support를 선택함으로써 복원 성능 향상 및 낮은 복잡도를 가질 수 있었다. 모의 실험을 통해 gOMP는 OMP, StOMP, CoSaMP, 그리고

L_1 -최소화 기법과 스파스한 신호의 복원 성능 및 복잡도를 비교한 결과 낮은 복잡도를 가지면서 우수한 신호 복원 능력을 갖는 것을 확인할 수 있었다.

사사

이 논문은 2011년도 지식경제 전력산업원천기술개발 과제 (과제번호 : 2011T100100011), ‘2단계 BK21사업’의 연구비로 수행되었음.

참고 문헌

- [1] D. L. Donoho and P. B. Stark, “Uncertainty principles and signal recovery,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 49, no. 3, pp. 906–931, 1989.
- [2] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, “A simple proof of the restricted isometry property for random matrices,” *Constructive Approximation*, Vol. 28, no. 3, pp. 253–263, Dec. 2008.
- [3] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 52, no. 2, pp. 489–509, Feb. 2006.
- [4] E. Candes and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 51, no. 12, pp. 4203–4215, Dec. 2005.
- [5] R. Giryes and M. Elad, “RIP-Based Near-Oracle Performance Guarantees for SP, CoSaMP, and IHT,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. PP, no. 99, Nov. 2011.
- [6] J. A. Tropp and A. C. Gilbery, “Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit,” *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [7] D. Needell and J. A. Tropp, “CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 26, no. 3, pp. 301–321, Mar. 2009.
- [8] W. Dai and O. Milenkovic, “Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction,” *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 55, no. 5, pp. 2230–2249, May. 2009.
- [9] D. Needell and R. Vershynin, “Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit,” *IEEE J. Sel. Topics Signal Processing*, Vol. 4, no. 2, pp. 310–316, Apr. 2010.
- [10] D. L. Donoho and I. Drori and Y. Tsaig and J. L. Starck,, “Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit,” Mar. 2006.
- [11] M. A. Davenport and M. B. Wakin, “Analysis of Orthogonal Matching Pursuit using the restricted isometry property,” *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 56, no. 9, pp. 4395–4401, Sep. 2010.
- [12] E. J. Candes, “The restricted isometry property and its implications for compressed sensing,” *Comptes Rendus Mathematique*, Vol. 346, no. 9–10, pp. 589–592, May. 2008.
- [13] J. A. Tropp, “Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation,” *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 50, no. 10, pp. 2231–2242, Oct. 2004.

저 자 소 개



권 석 범(학생회원)
 2007년 고려대학교
 컴퓨터학과 학사.
 2010년 고려대학교 컴퓨터·전파
 통신공학과 석사.
 2010년~현재 고려대학교 컴퓨터·
 전파통신공학과 박사과정.

<주관심분야 : Signal processing, Wireless communication>



심 병 효(정회원)
 1995년 서울대학교
 제어계측공학과 학사.
 1997년 서울대학교
 제어계측공학과 석사.
 2004년 University of Illinois at
 Urbana-Champaign
 Mathematics 석사.

2005년 University of Illinois at Urbana-Champaign Electrical and Computer Engineering 박사.

2007년~현재 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과 조교수

<주관심분야 : Information theory, Signal processing, Wireless communication>