신뢰성응용연구
제12권, 제1호. pp.47-56, 2012

수명이 대수정규분포를 따르는 제품에 대한 경제적인 신뢰성 입증시험 설계

권 영 일

청주대학교 산업공학과

An Economic Design of Reliability Demonstration Test for Product with Lognormal lifetime distribution

Young Il Kwon

Department of Industrial Engineering, Cheongju University

Abstract

Reliability demonstration tests with zero-failure acceptance criterion are most commonly used in the field of reliability application since they require fewer test samples and less test time compared to other test methods that guarantee the same reliability with a given confidence level. For products with lognormal lifetime distribution, an economic zero-failure test plan is developed that minimizes the total cost related to perform a life test to guarantee a specified reliability of a product with a given confidence level. A numerical example is provided to illustrate the use of the proposed test plan.

Key words : reliability demonstration test(신뢰성 입증시험), lognormal distribution(대수정규분포), zero failure acceptance test(무고장시험), confidence level(신뢰수준), cost model(비용모형)

논문접수일 : 2012년 02월 06일 논문수정일 : 2012년 02월 27일 게재확정일 : 2012년 03월 03일

1. 서 론

통상 제품이나 부품의 신뢰성을 확인하기위한 신뢰성 입증시험(reliability demonstration test)은 특정 요구수명을 규정된 신뢰수준(confidence level)으로 보장하도록 설계된다. 시험 현장에서는 동일한 요구수명과 신뢰수준을 보장하는 시험방식들 중에서도 적용이 비교적 수월하고, 상대적으로 시험시간이나 시료수가 단축되는 무고장 시험방식(zero-failure test)이 널리 사용되고 있다. 무고장 합격기준을 적용하는 시험에서는 규정된 사용수명(백분위 수명)과 신뢰수준을 만족하는 시료수 n과 무고장 시험시간 T를 결정하게 된다. 즉 n개의 시료로 시험을 시작하여 시험시간 T동안 고장이 없으면 합격, 즉 요구수명을 규정된 신뢰수준으로 보증하는 방식이다.

동일한 신뢰수준으로 동일한 백분위수명을 보증하는 무고장 시험방식에는 다양한 (n, T) 조합이 존재한다. 수명시험에서 시험에 투입될 시료의 가격이나 시험에 사용되는 장비 사용료, 에너지 비용과 각종 간접비용 등 시험시간과 관련된 비용이 높은 경우, 적절한 시료수와 시험시간의 조합을 선택함으로써 시험비용을 최소화 할 수 있는 시험방법을 찾는 것이 중요하다.

Nelson(1985), Abernethy(2000), Yan과 Herfat(2004), Rahrough(2005), 그리고 Kwon(2006, 2008) 등은 지수분포, 와이불분포 또는 대수정규분포를 대상으로 무고장 시험데이터에 의한 신뢰성 평가와 보증을 위한 방법들을 제시하였으며, Kwon(2011)은 수명이 와이불 분포를 따르는 제품에 대해 요구수명을 규정된 신뢰수준으로 보증하기 위한 무고장 시험방법들 중 총 시험비용을 최소화하는 경제적인 시험방법을 제시하였다.

본 연구에서는 기계, 금속, 전기, 자동차 등 다양한 산업분야의 제품이나 부품의 수명분포로 널리 사용되고 있는 대수정규분포를 대상으로 규정된 요구 신뢰도를 특정 신뢰수준으로 보증하는 경제적인 신뢰성 입증시험방식을 설계한다. 무고장 합격기준을 적용하여, 시료수와 시험시간에 따라 소요되는 총 시험비용을 모형화하고 이 시험비용을 최소화 하는 경제적인 시험방식을 결정한다.

2. 무고장시험과 시험비용

2.1 대수정규분포

여기서는 부품의 수명이 대수정규분포를 따르는 경우, 즉 수명을 T라 할 때 $\ln T$가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 부품에 대한 신뢰도 입증시험을 설계한다. 대수정규분포에서 μ를 로그평균(log mean) 또는 위치모수 (location parameter), σ를 로그표준편차(log standard deviation) 또는 척도모수(scale parameter)라고 부른다. 시험 설계 시 척도모수 σ 값은 알고 있다고 가정한다. 모수 μ, σ를 갖는 대수정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t > 0 \tag{1}$$

또한 분포함수(불신뢰도) 및 신뢰도함수는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$F(t) = \Pr(T < t) = \Phi(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}) \tag{2}$$

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}) \tag{3}$$

여기서 $Z \sim N(0,\ 1)$ 즉 평균이 0, 분산이 1인 표준정규분포를 따르는 확률변수를 뜻하고 $\Phi(\bullet)$는 Z의 분포함수를 나타낸다.
대수정규분포에서 평균수명 $MTTF$와 고장률함수 $h(t)$, 그리고 백분위수명 t_p는 각각 아래와 같다.

$$MTTF = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \tag{4}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\phi[(\ln t - \mu)/\sigma]}{\sigma t\{1 - \Phi[(\ln t - \mu)/\sigma]\}} \tag{5}$$

$$t_p = \exp(\mu + \sigma z_p) \tag{6}$$

여기서 $\phi(\bullet)$는 표준정규분포 $N(0,1)$의 확률밀도함수를, z_p는 $\Phi(z) = p$를 만족하는 z값을 말한다.

2.2 무고장 시험

수명이 대수정규분포를 따르는 제품이나 부품의 신뢰도 입증을 위해 $100p\%$ 백분위 수명 B_{100p}를 주어진 신뢰수준 CL 로 보증하는 시험방식을 고려한다. 일반적으로 신뢰성 입증시험 설계에서 대수정규분포의 척도모수 σ는 대상부품에 대한 과거의 사용경험이나 시험자료로부터 추정하여 사용할 수 있다.
본 연구에서는 백분위 수명 $B_{100p} = t_0$를 주어진 신뢰수준 CL 로 보증하기 위해, 크기 n의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 시간 T동안 고장이 없으면 합격시키는 무고장 합격기준을 적용한 신뢰성 입증시험의 경제적 설계문제를 고려한다. 사용수명 $B_{100p} = t_0$를 주어진 신뢰수준 CL로 보증하는 무고장 시험에서 시료수 n과 무고장 시험시간 T의 관계는 다음과 같이 구해진다.

먼저 보증수명 $B_{100p} = t_0$ 일 때 위치모수를 μ_0라 하면

$$F(t_0) = \Phi(\frac{\ln t_0 - \mu_0}{\sigma}) = p \tag{7}$$

로부터

$$\mu_0 = \ln t_0 - \sigma z_p \tag{8}$$

관계가 얻어진다. 또한 보증수명이 $B_{100p} = t_0$이고 신뢰수준이 CL인 무고장 합격기준 시험방식 $(n,\ T)$는 다음 식을 만족한다.

$$[R(T)]^n = 1 - CL \tag{9}$$

이 식으로부터 시료수 n과 시험시간 T의 관계식이 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi(\frac{\ln T - \mu_0}{\sigma}) = 1 - (1 - CL)^{1/n} \tag{10}$$

또는

$$T = e^{\mu_0 + z_{\triangle(n)}\sigma} = t_0 e^{(z_{\triangle(n)} - z_p)\sigma}. \tag{11}$$

단 여기서

$$\triangle(n) = 1 - (1 - CL)^{\frac{1}{n}} \tag{12}$$

을 말한다. 위 식에서 규정된 보증수명 $B_{100p} = t_0$ 와 신뢰수준 CL을 만족하는 다양한 (n, T) 조합이 존재함을 알 수 있다.
만약 시험시간이 보증수명과 동일하다면, 즉 $T = t_0$이면 식 (11)에서

$$\triangle(n) = 1 - (1 - CL)^{\frac{1}{n}} = p \tag{13}$$

로부터

$$n = \frac{\ln(1 - CL)}{\ln(1 - p)} \tag{14}$$

이 되어 시험방식 (n, T)가 σ의 영향을 받지 않는다.
실제 백분위 수명이 $B_{100p} = t$인 제품이 이 시험에 합격될 확률은 다음과 같이 구해진다.

$$Pa(B_{100p} = t) = \left[1 - \Phi(z_{\triangle(n)} + \frac{\ln(t_0/t)}{\sigma})\right]^n \tag{15}$$

2.3 시험비용

무고장 시험을 수행하는데 소요되는 비용으로서 다음의 항목들을 고려한다.

c_f : 고정비용
c_s : 샘플링 비용
c_o : 시료당 시험 진행 비용
c_t : 단위시간당 시험비용

여기서 c_f는 시험 시료수나 시간과는 무관한 고정비용을 말하며, c_s는 시료 1개의 가격, 시료당 시험지그 비용 등 시료수 n에 비례하는 비용항목을 의미한다. c_o는 시료수 n과 시험시간 T에 비례하는 비용으로서 시험에 소요되는 에너지, 소모성 부재료, 시험장비 사용 등과 관련된 비용을 뜻한다. 끝으로 c_t는 시료수 n과는 무관하게 시험시간 T에만 비례하는 비용으로 시험 담당요원의 인건비, 시험시간과 관련된 각종 간접비 등으로 구성된다.
무고장 시험의 수행에 있어서 이들 비용으로 구성되는 총 비용은

$$C(n, T) = c_f + c_s n + c_o n T + c_t T \tag{16}$$

로 표현되며, 식 (16)에 식 (11)을 적용하면 다음과 같이 구해진다.

$$C(n) = c_f + c_s n + (c_o n + c_t) t_0 e^{-z_p \sigma} e^{z_{\triangle(n)} \sigma} \tag{17}$$

3. 적용예제

수명이 척도모수 값이 $\sigma=0.20$인 대수정규 분포를 따르는 부품에 대해, $B_{10}=1{,}000$시간 ($t_o=1{,}000$)을 신뢰수준 90% ($CL=0.90$)로 보증하는 무고장 시험방식을 설계하는 문제를 고려한다. <그림 1>은 위 보증조건을 만족하는 무고장 시험의 $(n, T/t_o)$ 조합을 나타낸 것이다. 여기서 T/t_o는 시험시간과 보증수명의 비율을 나타낸다.

<그림 1> 무고장 시험방식의 $(n, T/t_0)$ 조합

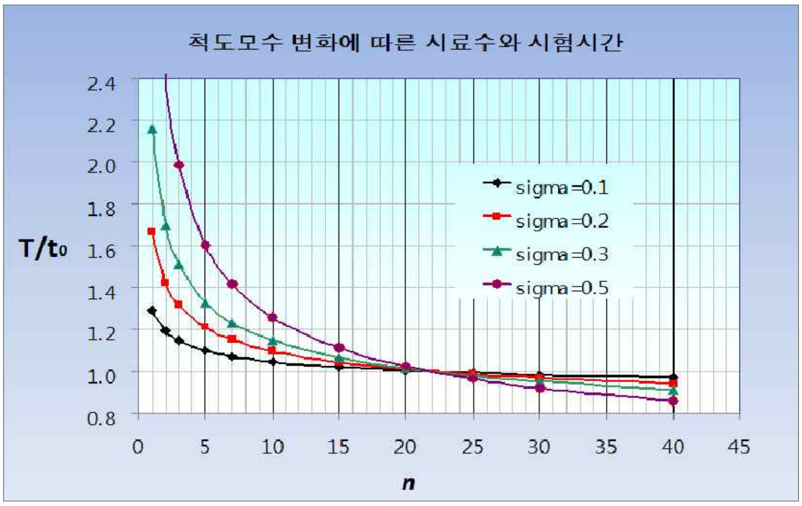
예를 들어 시료수가 $n=10$이면 $T/t_o=1.0964$, 즉 시험시간은 $T=1{,}096.4$ 시간이 된다. 즉 10개의 시료를 1,096.4 시간동안 시험하여 고장이 없으면 B_{10}수명 1,000시간을 신뢰수준 90%로 보증할 수 있다. 만약 시료수의 제약으로 $n=3$개의 시료를 사용한다면 시험시간은 $T=1{,}315.6$ 시간으로 증가하게 된다.

<그림 2>는 대수정규분포의 척도모수 변화에 따른 시료수와 시험시간의 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 척도모수값이 클수록 시료수에 따른 시험시간의 변화도 크게 나타남을 볼 수 있다.

다음 <그림 3>은 시험수행과 관련된 비용항목들이 $c_s=5.0$, $c_o=0.2$, $c_t=1.2$ 일 때 B_{10}수명 1,000시간을 신뢰수준 90%로 보증하는 시험에서 시료수 n에 따른 총 시험비용을 나타낸 것이다. 여기서 고정비용 c_f는 최적시험방식 결정에 영향을 미치지 않으므로 총 시험비용에서는 제외하였다. 총 시험비용이 최소가 되는 시료수와 시험시간은

$$n^*=4, \quad T^*=1{,}252.2$$

이며, 이 시험방식을 적용하면 고정비용을 제외한 총 시험비용은 $C(n^*)=3{,}025.4$이다.



<그림 2> 척도모수 변화에 따른 시료수와 시험시간의 관계

<그림 3> 시료수 n과 총 시험비용 $C(n)$의 관계

<표 1>은 시료수 n에 따라 최소시험비용($n^* = 4$) 대비 총 시험비용의 증가율을 나타낸 것이다. 시료수가 n일 때의 총 시험비용을 $C(n)$, 최소시험비용을 $C(n^*)$라 할 때 증가율 ΔC는 다음과 같다.

$$\Delta C = 100 \times \frac{C(n) - C(n^*)}{C(n^*)} \quad (\%) \tag{18}$$

<표 1> 시료수 n에 따른 최소시험비용 대비 총 시험비용의 증가율

n	$C(n)$	ΔC %
1	3,511.28	16.1
2	3,138.08	3.7
3	3,040.91	0.5
4	3,025.36	0.0
5	3,046.40	0.7
6	3,087.38	2.1
7	3,140.51	3.8
8	3,201.66	5.8
9	3,268.37	8.0
10	3,339.10	10.4
12	3,488.86	15.3
15	3,726.24	23.2
20	4,138.86	36.8
25	4,560.93	50.8

<표 2>는 시험설계 시 사용한 척도모수 값의 오류에 대한 영향을 알아보기 위해 작성하였으며, 실제 척도모수 값이 $\sigma = 0.20$일 때 이를 σ'로 잘못 채택한 경우의 분석결과이다.

<표 2> 척도모수 값의 오류에 의한 영향분석

σ'	n'	T'	CL'	$\Delta C'$ %
1.6	3	1,245.4	0.81	−4.8
1.7	3	1,262.6	0.84	−3.5
1.8	4	1,224.4	0.87	−2.2
1.9	4	1,238.2	0.88	−1.1
2.0	4	1,252.2	0.90	0.0
2.1	4	1,266.4	0.91	1.1
2.2	4	1,280.7	0.93	2.3
2.3	4	1,295.2	0.94	3.4
2.4	5	1,255.2	0.95	4.6

각 σ' 값에 대해 얻어진 시료수 n'와 시험시간 T', 그리고 이 시험방식을 적용할 경우 동일한 B_{10}수명 1,000시간을 보증할 때의 실제 신뢰수준 CL'와 총 시험비용의 증가 또는 감소량 $\Delta C'$(%)을 나타내고 있다. $\Delta C'$은 $\sigma = 0.20$일 때 설계된 시험방식의 총비용에 비하여 σ'를

적용하여 얻어진 시험방식의 총비용의 증가 또는 감소 금액을 퍼센트로 나타낸 것이다.
표에서 실제 척도모수가 $\sigma = 0.20$인 제품에 대해 B_{10}수명 1,000시간을 $CL = 0.90$으로 보증하는 시험에서, 형상모수를 $\sigma' = 0.18$로 잘못 적용하는 경우 신뢰수준은 $CL' = 0.87$로 설계조건 $CL = 0.90$보다 다소 감소하며 동시에 총 시험비용도 2.2% 감소함을 볼 수 있다. 또한 형상모수를 $\sigma' = 0.22$로 실제보다 크게 적용하는 경우 신뢰수준은 $CL' = 0.93$으로 설계조건 $CL = 0.90$보다 다소 증가하며 총 시험비용도 2.3% 증가함을 나타낸다. 전반적으로 척도모수 값을 실제보다 크게 적용할수록 신뢰수준이 증가함과 동시에 총 시험비용도 증가하며, 반대로 실제보다 작은 값을 적용할 경우 신뢰수준과 함께 총비용도 감소하는 경향을 보이고 있다. 표에서 척도모수 값의 오류가 크지 않은 경우($\pm 10\%$ 이내)에는 신뢰수준이나 총 비용의 변화가 비교적 미미함을 나타내고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 제품이나 부품의 수명이 대수정규분포를 따르는 경우에 대해 신뢰성 평가나 입증을 위해 시험에 널리 사용되고 있는 무고장 합격기준에 의한 경제적인 수명시험방식을 제안하였다. 규정된 백분위수명을 특정 신뢰수준으로 보증하는 시험에서 총 시험비용을 최소화 하는 시험방식을 결정하고 예제를 통해 그 적용방법을 예시하였다. 또한 시험설계에서 중요한 요소의 하나인 대수정규분포의 척도모수 값을 결정함에 있어서, 실제와 다른 척도모수 값을 잘못 적용할 경우 그 결과가 시험방식과 신뢰수준, 그리고 시험비용에 미치는 영향을 분석하였다. 척도모수에 대한 민감도 분석에서 시험 설계 시 실제 척도모수 값과 다소 다른 값이 적용되더라도 시험방식의 신뢰수준이나 총 시험비용에는 큰 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다.
경제성 면에서 효율적으로 설계된 본 시험방법을 시료수와 시험시간에 따라 높은 비용이 소요되는 기계/금속, 자동차, 전기, 화학소재나 부품 등의 신뢰성 입증시험에 적용함으로써 고가의 시험비용 절감에 기여할 수 있을 것으로 기대한다.

참고문헌

[1] 권영일(2006), “기계류부품 신뢰성보증을 위한 2단계 시험방식 설계”, 한국품질경영학회지, 제34권, 제1호, pp. 20-26.

[2] 권영일(2008), “양산제품에 대한 신뢰성보증 시험방식의 설계”, 산업과학연구, 제26권, 제1호, pp. 237-244.

[3] 권영일(2011), “경제적인 무고장 신뢰성인증시험 설계”, 한국품질경영학회지, 제39권, 제1호, pp. 71-77.

[4] Abernethy R.B.(2000), The New Weibull Han-dbook, Williams Enterprises.

[5] Nelson W.(1985), "Weibull Analysis of Reliability Data with Few or No Failures", Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 3, pp. 140-146.

[6] Rahrough, M.(2005), "Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration", Ph.D. Thesis, University of Durham, U.K.

[7] Schneider, H.(1989), "Failure Censored Variable Sampling plans for Lognormal and Weibull Distributions", Technometrics, Vol. 31, No. 2, pp 199-206.

[8] Yan W. and Herfat A.T.(2004), "Design Criteria Evaluation Using Field Test Data and Reliability Test Improvement Based on Statistical Analysis", *IEEE RAMS 2004*, pp. 168-172.