한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제1호 (2012년 2월), 71–88

GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 개념이미지 형성 학습 개선방안

A study for Build the Concept Image about Natural Logarithm under GeoGebra Environment

이정곤 Jeong Gon Lee

정적분을 이용한 자연로그 학습은 구체적인 개념이미지 형성이 어려운 부분이 존재하기에 역동적인 프로그램을 이용하여 시각적 추론의 과정을 거치는 접근방법이 개념이미지를 형성하는데 중요한 역할을 한다. 즉, 역동적인 프로그램 환경에서 학습하는 것은 학생들에게 수학적 개념을 구체적으로 인식하게 하는 유용한 교수・학습 방법이 될 것이다. 이에 본 연구는 전공학부 학생들이 역동적 프로그램이며 시각적 도구인 GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그 그래프를 이해하는 과정을 탐구하고 분석하여 그 특징을 알아보았다. 그 결과, GeoGebra 프로그램 환경을 바탕으로 학습하는 것은 학생들 스스로 오류를 수정하고 조작하는 활동을 행할 수 있어서 주어진 문제에 대한 해결과정을 직접 관찰・분석할 수 있다는 장점이 있다는 것을 알게 되었다. 또한, 역동적인 프로그램인 GeoGebra를 이용하는 것은 정적분을 이용한 자연로그 그래프를 보다 구체적으로 인식・이해 할 수 있고 개념이미지를 효과적으로 형성할 수 있다는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 역동적인 프로그램 환경을 활용하는 것은 단순한 암기・주입식 교육환경에서 경험할 수 없었던 실체적인 수학개념에 대하여 접근할 수 있는 기회를 제공한다는 교육적 시사점을 제시하였다.

The purpose of this study is to find the way to build the concept image about natural logarithm and the method is using definite integral in calculus under GeoGebra environment. When the students approach to natural logarithm, need to use dynamic program about the definite integral in calculus. Visible reasoning process through using dynamic program(GeoGebra) is the most important part that make the concept image to students. Also, for understand mathematical concept to students, using GeoGebra environment in dynamic program is not only useful but helpful method of teaching and studying. In this article, about graph of natural logarithm using the definite integral, to explore process of understand and to find special feature under GeoGebra environment. And it was obtained from a survey of undergraduate students of mathmatics. Also, relate to this process, examine an aspect of students, how understand about connection between natural logarithm and the definite integral, definition of natural logarithm and mathematical link of

이 논문은 2012년도 원광대학교 교비 지원에 의하여 연구되었음.
MSC: 97D40 ZDM: C35
제출일: 10월 13일 수정일: 1월 25일 게재확정일: 2월 3일

e. As a result, we found that undergraduate students of mathmatics can understand clearly more about the graph of natural logarithm using the definite integral when using GeoGebra environment. Futhermore, in process of handling the dynamic program that provide opportunity that to observe and analysis about process for problem solving and real concept of mathematics.

Keywords: 자연로그(Natural Logarithm), 정적분(Definite Integral in Calculus), 개념 형성(Build the Concept), 개념 이미지(Concept Image), GeoGebra.

1 서론

1.1 연구의 목적과 필요성

수학교육에서 가장 중요하게 생각되는 목표 중 하나는 학습자가 단순하게 공식을 적용하거나 부호를 나열하는 것이 아니라 실제적인 수학적 개념을 형성하고 명확하게 이해하도록 하는 것이다[17]. 즉, 수학이라는 학문에서 수학적 이론의 확고한 기초를 마련하기 위해 개념을 구체적이고 정확하게 정의하는 것은 가장 필요한 부분이다[9].

그러나 현재의 수학교육환경은 공식을 암기하여 단편적으로 적용되는 경우가 대부분이어서 많은 개념들이 기호와 부호의 나열처럼 느껴지고 인식되는 경우가 많다. 이 때문에 수학적인 개념들이 구체적인 맥락에서 이해하기가 어려워 추상화의 과정까지 이르기 힘든 부분이 존재한다. 따라서 시각적인 접근을 통하고 구체적으로 경험하고 사용하는 과정을 수행하여 수학적 개념들을 이해할 수 있는 역동적인 프로그램을 사용하는 것은 구체적인 수학개념을 형성하는데 효과적인 방법이 될 것이다.

Tall 과 Vinner[14]는 저술을 통하여 구체적인 개념형성을 위하여 수학적 개념을 시각화하고 개념을 이미지 형태를 형성하는 것에 대하여 말한 바 있다. 즉, 개념이미지는 개념을 구체적인 이미지의 형태로 이해하는 것이며 개념이미지는 개념과 관련되어 있는 모든 인지 구조를 나타내며 개념과 관련된 여러 경험과 활동을 통해서 개념이미지가 학습자의 마음속에 자리 잡게 되어 구체적인 개념을 형성할 수 있도록 한다고 설명했다.

따라서 역동적인 프로그램을 활용하면 눈에 보이지 않는 추상적인 수학적 개념들을 직접 볼 수 있는 형태로 만들어 제공할 수 있게 되어 구체적인 개념을 형성하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 즉, 복잡하고 추상적인 수학적 아이디어나 개념들도 시각화를 통해 손쉽게 이해할 수 있게 되고 수학적 아이디어에 대한 구체적이고 직관적인 조작을 통하여 개념이미지를 구축하게 되면 구체적인 개념형성에 도움을 주게 된다[13].

구체적인 개념을 생성하는 것은 문자와 수식을 통한 암기와 숙달만으로는 형성되기 어려운 것임에도 불구하고, 지필환경이 큰 비중을 차지하는 현재의 수학교육환경은 단면적이고 문자 위주로만 표현 되므로 입체적·공간적일 수 없으며 모델링 할 수 있는 상황도

매우 제한되어 있다. 따라서 수학 자체가 갖는 형식적인 특성을 극복하고 정적인 언어 중심으로 구성되어 있는 수학환경의 문제점을 보완하기 위해서는 역동적인 프로그램을 이용하여 구체적이고 도식화된 형태를 제공하고 학생들이 수학적 개념들을 시각화할 수 있도록 도움을 주는 것이 바람직한 수학교육의 모델이라고 될 수 있을 것이다[18].

현재 전공학부생들은 미적분학 수업을 통하여 정적분을 통한 자연로그를 접하게 되는데 정적분을 통한 자연로그의 형식적 정의와 로그의 몇 가지 성질만을 알아본 후 공식화하여 암기하는 형태로 이루어져 있다. 따라서 자연로그의 개념지도는 그 실체적인 부분에 대한 구체적이고 근본적인 설명 없이 학생들에게 교육되고 있는 실정이다. 즉, 단순한 공식형태의 암기와 숙달반복을 종용하게 되어 구체적인 개념을 형성하기 어렵게 되어 자연로그가 정의되는 이유를 학생들이 이해하기 힘든 부분이 존재한다. 위와 같은 이유로, 자연로그는 미적분학 부분에서 이해하기 어려운 부분 중 하나로 여겨지고 있다[16].

따라서 본 연구는 이러한 문제점을 인식하여 정적분을 이용한 자연로그를 이해하고 이에 대한 구체적인 개념을 형성할 수 있는 효율적이고 적절한 수학교육방법을 제시하고자 한다. 즉, 지필환경이 중심이 되는 기존의 교육방식을 지양하고 역동적인 수학 프로그램인 GeoGebra 환경에서 정적분에 대한 개념이미지를 구축하여 관련 개념들을 구체적으로 형성해가는 과정을 알아보고자 한다.

이제 이하에서는 전공학부생들을 대상으로 역동적인 프로그램이며 시각적 도구인 GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그 그래프를 그려보고 문제를 해결하는 과정을 탐구·분석하여 개념이미지를 형성해가는 양태를 알아보고자 한다. 이를 통하여 학습자에게 정적분을 이용한 자연로그에 대하여 구체적인 개념을 형성하도록 하는 효과적이고 효율적인 교수학적 전략을 제공하고 학생 스스로 구체적인 개념을 형성해가는 교육적 시사점도 제시하고자 한다.

1.2 연구문제

본 연구에서는 전공학부생들이 정적분을 이용한 자연로그에 대한 구체적인 개념형성을 위한 방법으로 역동적 프로그램인 GeoGebra 환경을 통해 접근하고자 하며 이 과정을 분석하고 탐구한다. 또한, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = 1$인 $x = e$라는 개념을 도입하여 이를 GeoGebra 환경을 통해서 확인하며 이를 통하여 학생들이 자연로그에 대한 올바른 개념이미지를 구축하고 구체적인 개념을 형성해 나가는 과정을 살펴보며 그 특징을 알아보고자 한다.

2 이론적 배경

2.1 개념이미지와 개념학습

개념이란 특정 사물이나 사건의 상징적 인상들이 공통적인 속성 혹은 특성을 기초로 하여 고유한 이름이나 기호로 나타내어 질 수 있도록 한 덩어리로 뭉쳐질 수 있는 총체로서 개개의 대상에서 특수성은 버리고 공통적인 속성 혹은 특성을 추상화하여 만들어낸 것이다[5]. 따라서 학문분야에서 개념이라는 것은 해당 학문 분야의 원리와 함께 기본 구조를 구성하는 것이며 교과학습에 있어서 반드시 학습되어야 하는 것이다.

교과를 학습할 때 교과의 기본적인 개념형성이 선행되지 않으면 그 교과의 구조와 특징짓는 원리 그리고 법칙 및 이론들을 이해할 수 없게 되고 효과적인 학습이 이루어 질 수 없다[17]. 즉, 구체적이고 적절한 개념을 형성하는 것은 매우 중요한 부분임에도 불구하고 수학의 추상적인 특성과 지필환경이 중심이 되는 단면적인 교육환경의 영향으로 학습자가 개념을 형성하지 못하거나 잘못된 개념이미지를 갖게 되는 등의 어려움이 존재하게 된다.

여러 선행연구들을 통하여 실제적인 개념 정의와 학습자에게 생성되는 개념 이미지 사이에는 일치하지 않는 점이 있음을 보여주고 있으며 이는 Tall과 Vinner[14]가 저술한 극한의 표기법에 관한 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등에 관한 연구, Dreyfus 와 Vinner[22]의 함수의 개념정의와 개념이미지에 관한 연구, Norman[11]의 교사들의 함수 개념 이미지에 대한 연구 등을 통해서 확인할 수 있다.

특히, Tall과 Vinner[14]는 개념과 관련된 전체적인 인지구조를 설명하기 위하여 개념이미지라는 용어를 사용했으며 개념이미지에는 모든 정신적인 그림과 그와 관련된 성질이나 과정이 포함되며 모든 종류의 경험을 통해 오랜 기간을 거쳐 형성되는 것이고 개개인이 새로운 자극에 부딪히거나 성숙해 감에 따라 변화하게 된다고 설명하였다.

수학교과에서 흔히 사용되고 있는 개념들 중에는 처음부터 공식적으로 정의된 경우도 있으나 학생들의 일상생활에서의 경험, 다른 교과에서 사용되는 유사한 개념 및 이전의 수학 학습을 바탕으로 새로운 개념을 습득하게 되는 경우도 있다. 이러한 과정에서 수학의 공식적인 개념 정의와 학습자의 인지과정 사이에는 차이가 발생 하게 되며[17], 대다수의 학생들은 개념학습을 할 때 개념 정의와 개념 이미지 사이의 격차를 느끼게 되고 인지갈등을 겪게 되어 새로운 수학적 개념을 받아들이는 데 어려움을 느끼게 된다.

그럼에도 불구에도 현재 우리나라의 수학교과 개념 이미지 연구는 본격적으로 이루어지지 못하고 있는 실정이며 학생들은 잘못된 개념이미지로 인하여 인지갈등을 겪고 있다. 따라서 잘못된 개념이미지를 갖게 되는 부분에 대하여 구제척인 개념을 형성하도록 하는 것이 필요하지만 이에 대응하는 지도법과 교육방법이 부족하다[6].

특히, 수학 개념 학습에 있어서 발생하는 인지적 갈등 즉, 개념 정의와 개념 이미지간의 간격에서 발생하는 문제들은 수학학습능력의 격차와는 상관없이 발생[4]하므로 이러한 인지적 갈등과 갈등이 생기는 원인부터 접근해야 할 것이다. 즉, 지필환경의 단면적인 속성이 중심이 되는 수학환경에서 어려움이 따르는 시각화에 대한 구체적인 접근이 있어야만 효과적인 개념이미지 학습방법을 찾을 수 있게 될 것이다.

2.2 개념정의와 개념이미지

Tall과 Vinner[14]는 개념을 명확하게 하기 위해 사용된 말의 형태를 개념정의로 간주하였으며 순환의 오류를 범하지 않으면서 개념을 정확하게 설명하는 언어적 정의를 의미한다고 했으며 한길준과 우호식[7]은 개념정의에 관하여 개념은 주로 정의에 의해 생성되는 것이며 학생들은 정의를 이용해서 문제를 풀고 정리를 증명하기도 한다고 하였다.

개념 정의를 할 때 그 정의는 학생들이 이해하기 쉬운 것으로 정하는 것이 바람직하며 학생들의 명확한 개념정의가 이루어질 수 있도록 형식적 정의를 해야 한다. 이는 받아들이기는 어렵지만 문제에 적용되어 문제를 해결해나가는 단계에서 반드시 필요하므로 학생들에게 제시되고 설명되어야 한다[17].

개념형성과 관련된 개념이미지에 관하여 Tall과 Vinner[14]는 다음과 같이 말한 바 있다. 개념이미지는 개념과 관련된 전체적인 인지구조를 설명하기 위해 필요한 용어로서 모든 종류의 경험을 통해 오랜 기간을 거쳐 형성되며 개개인이 새로운 자극에 부딪히거나 성숙해 감에 따라 변화하게 된다고 설명했다. 예를 들어 수학 수업 중에 한 학생에게 절댓값을 설명하라고 하면 학생은 단호하게 부호를 없앤 값이라고 하면서 $|-20| = 20$이라고 답하는 경우를 종종 볼 수 있다. 학생의 답의 결과로는 옳은 대답일 수 있지만 정확한 절댓값의 정의가 부호를 없앤 값이라고 설명될 수는 없다. 위의 학생에게 $|-x|$를 물어보면 당연히 x라고 대답할 가능성이 있기 때문이다. 이 학생은 절댓값 개념에 대하여 자신이 가지고 있는 개념 이미지에 근거하여 진정으로 옳게 답을 낸 것이라고 생각하고 있는 경우이지만, 사실은 절댓값 개념에 대한 오개념을 가지고 있는 경우이다. 즉, 학생이 말한 절댓값에 대한 개념은 형식적인 수학적 개념의 정의와는 일치하지 않으며 오히려 개념정의와 개념 이미지 사이의 인지갈등이 일어나는 경우에 해당한다. 즉, 학생들의 이미지는 그 개념에 적절한 예와 부적절한 예를 접하면서 형성된 결과라고 할 수 있으며 이 과정에서 잘못된 개념이미지를 갖게 되는 경우가 많기 때문에 적절한 교육방법과 지도를 통하여 잘못된 개념이미지를 바로잡고 올바른 개념형성을 할 수 있도록 해야 한다.

2.3 정적분을 이용한 자연로그와 역동적 프로그램의 적용

자연로그는 전공학부생들이 구체적인 개념 형성이 어려워 개념이미지와 개념정의가 명확하지 않은 부분 중 하나이며 마치 임의로 정해진 약속인 것처럼 느껴지는 경우가 많다. 이러한 상황은 정적분을 통한 자연로그에 대한 구체적인 개념이미지 형성과 개념 정의를 하는 것 역시 어렵게 하는 원인이 되고 있다[8].

현재 학교수학에서 로그는 지수의 역으로 도입되어 있고 로그의 모든 성질은 이러한 정의를 통해서만 유도되고 있어서 $2^{\sqrt{3}}$과 같이 지수가 무리수인 경우는 그 의미를 살리기 어렵다[5]. 따라서 정적분을 이용하여 자연로그에 접근하는 것은 엄밀성의 수준에서 뒤지지 않으며 간결함과 명료함에 있어서 나은 방법이다. 즉, 지수함수의 역으로서 로그를 도입하는 것보다 학생이 이미 알고 있는 곡선과 관련지어 로그를 직관적으로 이해할 수 있는 기회를 준다[2].

그러나 지필환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 형식적 정의에 따른 접근을 하게 되면 적분의 대수적인 계산을 계속하여 반복하는 과정을 거쳐야 하고 정의역 값의 변화에 따른 대응점을 찾아서 자연로그의 그래프를 그려서 확인하게 된다. 즉, 자연로그의 그래프를 직관적으로 예상하기가 어렵고 기하학적인 의미파악이 쉽지 않아서 실체적인 개념이미지와 개념을 형성하는데 어려움이 따르게 된다. 따라서 컴퓨터 등의 도구를 통한 시각적인 효과를 이용하여 접근하는 지도법이 학생들이 자연로그를 보다 쉽게 이해할 수 있게 해줄 수 있을 것이다. 특히, 컴퓨터를 사용하여 역동적인 시각효과를 보여주는 것은 학습자(그리고 수학자)가 자연로그의 개념을 이해할 수 있게 해준다. 이와 관련된 많은 프로그램들이 개발되고 발전되고 있으며 이와 같은 상황을 바탕으로 자연로그에 대하여 효과적인 개념형성이 가능한 지도방법은 무엇이며 어떻게 발전시켜 나갈 것인지 생각해야 한다[18].

또, 자연로그를 학습하며 구체적인 개념을 정립하고 개념이미지를 형성하는 방법으로서 시각적인 요소를 최대한 활용하여 자연스럽게 파악할 수 있도록 하고 프로그램을 바탕으로 한 기호화된 연산과 조작을 통해 변환하고 수행하는 행위를 통하여 논리적인 정의를 형태화하고 증명의 구조를 발전시키는 것이 바람직 할 것이다[18].

즉, 정적분을 이용한 자연로그를 학습할 때는 학습자가 이해하기 어렵다고 하여 간단하게 만들어진 수학적 공식을 제공하는 것보다 명확한 수학적 정의와 증명을 포함하는 사고의 발전을 유도하는 것이 중요하다. 따라서 현상에 대한 개념과 지각적인 부분을 계속 키워가며 생각을 표현하고 이에 역동적인 프로그램을 활용하여 접근을 시도하는 것이 자연스럽고 정교한 발전을 이끌 수 있을 것이며 자연로그에 대한 개념이미지를 형성하는데 도움이 될 것이다[19].

2.4 기하와 대수분야를 역동적으로 연결하는 GeoGebra

근래에 수학 교육 프로그램들이 기하적 영역 또는 대수적 영역의 대상만을 다룰 수 있는 것들이 대부분인 반면에 GeoGebra는 이 두 가지 영역의 것을 서로 연결시켜 함께 탐구할 수 있도록 시도한 프로그램이다[23].

GeoGebra는 사용자가 즉각적으로 기하적 대상과 대수적 대상을 변경할 수 있고 한 가지 대상을 변경하면 자동적으로 다른 대상도 함께 변경되기 때문에 학습자는 기하적 대상과 대수적 대상이 서로 연결되어 있는 것처럼 생각할 수 있다. 이러한 수학적 대상들의 역동적인 연결성은 학생과 교사에게 새로운 수학적인 접근을 가능하게 해 주며 기존에 생각하지 못했던 수학적 탐구 기회를 얻을 수 있게 해준다. 이와 같이 GeoGebra가 학교 수업에 투입되었을 때 가질 수 있는 가장 큰 의의는 수학적 탐구 도구로서 기존의 수학 프로그램이나 지필환경에서 생각할 수 없었던 새로운 시도가 가능하게 해주었다는 점[10]이 있으며 다음과 같은 장점들이 있다. 첫째, 학교 수학의 교과과정에서 제시되는 수학적 개념을 다룰 수 있는 대수, 기하, 미적분, 통계, 논리 등 모든 기능을 제공하고 있다[10]. 둘째, 무료로 제공되는 Java 소프트웨어이며 국제적인 사용자 커뮤니티를 제공한다. 셋째, 기능을 쉽게 익힐 수 있다. 즉, 도구나 명령의 사용법이 다른 수학 소프트웨어보다 쉽고 절차가 간편하다. 대부분의 절차가 복잡한 설정이 필요 없게 되어 있으며 간혹 필요한 최소한의 입력만 사용자로부터 받아들이게 된다.

3 연구 방법 및 절차

3.1 연구 방법

본 연구는 전공학부생들이 GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그함수 $y = \ln x$의 그래프를 그리는 과정을 살펴보고 분석한다. 특히 정적분을 통한 자연로그를 이용하여 넓이가 $\int_1^x \frac{1}{t}dt = 1$인 x가 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$임을 자연로그 그래프를 통하여 동적으로 인식하게 하고자 한다. 이를 통하여 정적분을 이용한 자연로그의 수학적 개념 정의와 학생들이 가지고 있는 개념 이미지 사이의 상호작용을 알아보고 명확한 개념을 형성해나가는 과정을 분석하고자 하며 방법으로는 질적 사례 연구 방법을 선택하였다.

3.2 연구대상

본 연구 대상으로는 익산시 소재 A대학교 자연과학대학 수학과에 재학 중인 1학년 여학생 2명(S1, S2)을 선정하였고 두 학생의 전 학기 수학성적은 보통이었다. 표본이 되는 대상학생의 선정에 있어서는 성적보다 본인의 의사를 명료하게 진술하고 설명할 수 있는 것과 연구에 적극 참여할 수 있는지를 우선으로 고려했다. 두 학생은 이미 로

그함수를 지수함수의 역함수로 배웠고 자연로그 또한 $y = e^x$ 의 역함수에 의해 얻어진 그래프라는 점을 인식하고 있었으며 두 학생 모두 고등학교에서 자연계열 학생이었다.

정적분에 관해서는 이전 학기에 미적분학 시간을 통해 학습하여 미적분의 기본정리와 성질들을 이해하고 있었다. 또한, 함수의 정의역을 분할해서 얻어진 무한급수와 정적분의 관계인 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$ 을 활용할 수 있고 다항함수 뿐만 아니라 초월함수에 대한 넓이를 구할 수 있었다.

이전 학기에 미적분학을 학습하면서 컴퓨터를 통하여 수업을 진행했거나 컴퓨터 프로그램을 다뤄본 경험은 없으며, GeoGebra 프로그램은 처음 접하는 상황이었고 컴퓨터를 이용한 학습에 매우 큰 관심과 기대를 보였다.

3.3 연구절차 및 자료수집

본 연구는 정규수업시간에 실시하기에는 어려움이 있어 방과 후에 학과 전산실에서 이루어졌다. 교사는 메인 컴퓨터를 프로젝트 화면과 연결하여 학생들이 교사의 활동을 볼 수 있도록 하였다. 수업은 예비수업 1차시와 본 수업 2차시로 진행되어 총 3차시의 수업이 이루어졌으며, 학생 2명 각자 개인별 컴퓨터와 활동지를 사용하였다.

예비수업 1차시에서는 정적분과 관련된 학생들의 지식에 대한 개인적인 경험과 생각들을 알아보았다. 또한, 본 수업에 필요한 GeoGebra의 사용방법에 관하여 오리엔테이션을 하고 이에 대한 질의 응답시간을 갖는 예비 수업이 진행되었다.

본 수업의 첫 번째 시간에는 먼저 활동지를 통해 이루어졌으며 함수 $y = \frac{1}{x}$ 에 관하여 $x = 1$ 에서 임의의 양의 실수 x 까지의 자연로그 그래프를 정적분의 정의를 이용하여 형식적 개념정의를 했다. 다음으로 GeoGebra 환경을 이용하여 자연로그 그래프를 알아보고 정적분과의 연관성을 통해 자연로그 그래프를 작성하는 과정을 거친다. 이를 통하여 정적분을 이용한 자연로그의 개념형성을 유도하는 활동을 하는 것으로 50분간 진행되었다.

두 번째 시간에는 이미 학습한 극한에 의한 e 값과 자연로그의 정적분에 의한 정의를 이용하여 $x = 1$ 에서 임의의 양의 실수 x 까지의 넓이가 1 인 x 의 값을 활동지를 통해 찾아보고 자연로그 그래프와 연관지어 e 값을 자연로그로 도입하는 과정을 관찰하는 방식으로 50분간 진행되었다.

관찰 자료는 학생의 컴퓨터에 자동 녹화 프로그램을 설치하여 학생들의 문제해결 과정을 녹화하였으며 전체적인 수업 촬영을 위해 교실 맨 뒤편에 캠코더를 설치하여 수업을 녹화하였다. 문서자료는 학생들이 기록한 자료와 연구자가 연구를 진행하면서 기록한 자료로 구성하였다.

4 결과 분석

4.1 GeoGebra환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 학습을 통한 개념형성

가. GeoGebra환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 그래프를 그리는 과정을 통한 구체적인 개념의 형성 유도

정적분을 이용하여 자연로그 그래프의 개념을 형성하는 방법이 좀 더 명확하고 효과적이라는 것은 우선 자연로그의 정의를 통해서 확인 할 수 있다. $(0,\infty)$를 정의역으로 하는 함수 L이 미분 가능하고 상수함수가 아니며 임의의 $x, y \in (0,\infty)$에 대하여, $L(xy) = L(x) + L(y)$를 만족할 때 L을 로그함수라고 한다[1]. 정의에 의해 로그함수는 미분 가능한 함수이므로,

$$L'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{L(x+h)-L(x)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{L(1+\frac{h}{x})-L(1)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}L'(1)$$

이다.

이제 로그함수L의 정의와 $L'(1) = 1$이라 하여 자연로그를 정의하면 다음과 같다.

$L'(x)$는 $\frac{1}{x}$의 역도함수가 되므로 결국 $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt + C$이고 $C = 0$이므로 자연로그는 $L'(1) = 1$인 특수한 로그함수이며 구체적으로 다음과 같이 정의한다. 임의의 $x \in (0,\infty)$에서 정의된 $\ln x$를 자연로그라 하고

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

이다[1].

그러므로 자연로그에 정적분의 개념을 도입한다는 것은 $x = 1$에서 임의의 양의 실수 x까지의 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 아래의 넓이를 구하는 것을 의미한다. 따라서 본 연구의 자연로그 함수 학습은 지수의 역으로 도입되어 있는 일반적인 방법과는 다르게 정적분의 형태로 정의되는 것이며 과정은 다음과 같다.

먼저 학생들은 함수 $y = \frac{1}{x}$에 대해 $x = 1$에서 임의의 양의 실수 x까지를 분할한 개수 n에 대하여 x의 연속적인 변화에 따른 정적분을 확인하였다. [그림1]은 정적분의 형식적인 개념 정의에 의해 연결된 정적분을 활동지에 표시하여 x값에 따른 정적분으로 자연로그의 함수 값을 구하고자 시도하였다.

이 활동지를 작성하는 과정에서 학생 S2의 경우, 자연로그를 정적분 기호를 이용하여 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$로 작성할 수는 있었으나 정적분의 형식적 개념정의를 이용하여 표현하는 것은 명확하게 해내지 못했다. 즉, 학생 S2는 정적분을 극한값으로 나타내는 것에 어려움을 겪고 있다는 것을 보여주는 것으로 $x = 1$에서 임의의 양의 실수 x까지의 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 아래의 n등분한 사각형들의 급수로 나타내지 못했다. 이는 정적분을 이용

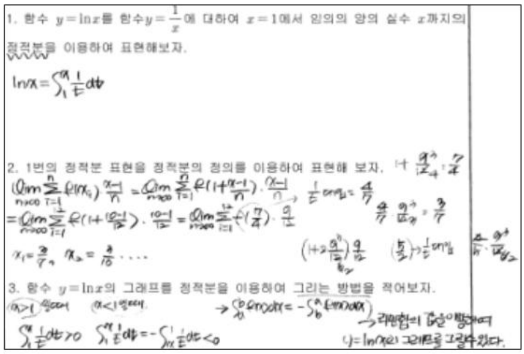

그림 1: S2의 정적분 값과 자연로그 그래프 추론 활동

한 자연로그의 개념정의와 개념 형성이 명확하지 않다는 것을 보여주는 것이다. 따라서 GeoGebra 환경에서 자연로그의 그래프를 직접 확인해보는 방식을 통하여 자연로그의 시각적인 개념이미지 형성을 시도하여 명확한 개념 형성을 유도하였다.

다음은 학생들이 활동지를 통해 확인 했던 정적분을 이용하여 GeoGebra 환경에서 자연로그 함수 $y=\ln x$의 그래프를 그리는 과정이다.

S2는 함수 $y=\frac{1}{x}$을 입력하고 $x=1$에서 양의실수 x까지의 정적분을 구하기 위해서 GeoGebra의 슬라이더 기능을 이용하여 구간 $(0,x]$의 분할 수(n)와 범위를 만들었다. 정적분의 범위를 지정하기 위하여 먼저 구간을 변화시킬 변수(x)를 슬라이더로 만들었는데, 이 과정에서 정적분의 상한 변수 x와 범위의 변수(x) 사이에 오류가 발생했다[그림2].

S2는 정적분 $\int_1^x \frac{1}{t}dt$의 값을 얻기 위하여 함수를 '$f(x)=\frac{1}{x}$'로 입력하였다. 또한, 정적분의 상한 x는 슬라이더 도구를 통해 변수 이름을 'x'로 정의하여 x의 연속적인 변화에 따른 정적분을 구하고자 하였다. 그러나 함수의 변수 x와 상한의 변수사이에서 중복이 발생하여 타당하지 않다는 오류 메시지가 나타났고, '확인'을 클릭하니 슬라이

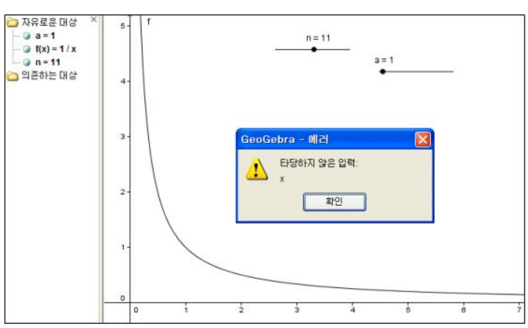

그림 2: S2의 정적분 상한 변수에 대한 오류

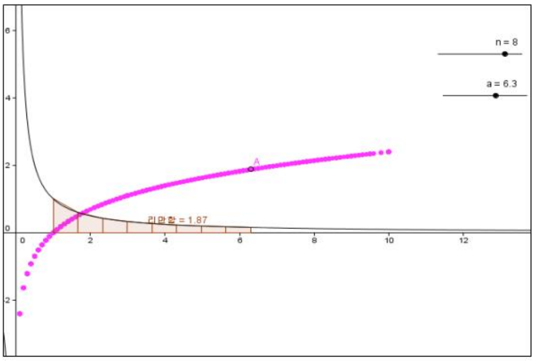

그림 3: S2의 GeoGebra 환경에서 함수 $y = \ln x$ 그래프를 통한 개념형성 활동

더의 변수 이름이 'a' 로 설정되었다. S2는 슬라이더의 설정사항에서 이름을 다시 x로 고치려 하였으나 같은 결과만 반복되었고 오류를 수정하지 못했다.

<대화 발췌문>

S2 : 교수님, 근데 왜 상한 변수가 x로 입력이 안 되지요? 중복되었다고 오류 메시지만 나오는데요.
T : 뭔가 잘못했겠지. 다시 한 번 해 보렴.
S2 : 아니요, 제대로 한 것 같은데..
이거 한번 봐주시면 안 될까요? (다시 오류 메시지 창이 나옴)
T : 이 부분에 대해서 어려움을 겪고 있었구나.
정적분에 상한(x)와 함수에서 변수(x)가 같아서 오류가 나오는 상황이야.
자동으로 상한이 'a' 변수로 바뀐 거니까 그대로 사용하면 된단다.

S2는 정적분 $\int_1^x \frac{1}{t}dt$의 적분변수를 x로 지정하였음에도 적분의 상한을 같은 변수 x로 다시 정하여 오류가 발생했다. 위와 같은 상황은 상한을 변수로 나타낼 때 일반적으로 발생할 수 있는 오류이지만, '상한이 적분변수와 같은 x로 입력되어 에러가 생겼으므로 다른 이름의 변수로 정의해야 한다' 는 교사의 설명을 듣고 오류를 수정할 수 있었으며 수업에서는 정적분의 상한을 변수 'a' 로 수정하였다. 변수 a가 정적분의 상한임을 인식함으로서 정적분을 구하기 위한 명령어의 형식 $[f(x), 1, a, n]$은 쉽게 이해할 수 있게 되었으며 다음 활동을 순조롭게 할 수 있었다.

위와 같은 과정을 거쳐 정적분$\int_1^x \frac{1}{t}dt$을 구하고 x 즉, a의 연속적인 변화에 따른 정적분의 변화과정을 좌표 $A(a$, 리만합$)$로 설정하였다. GeoGebra의 자취그리기 기능을 이용하여 자연로그 $y = \ln x$의 그래프를 점A의 자취로 관찰하였다[그림3].

위와 같이, GeoGebra 환경에서 정적분을 이용하여 자연로그를 학습하는 과정은 시각적인 이해가 가능하게 해주어 구체적인 개념을 형성하는 데 도움을 줄 수 있으며 형식

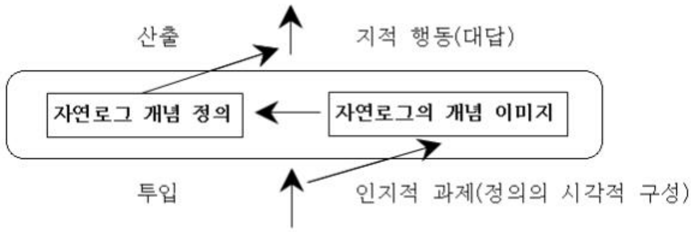

그림 4: 개념정의와 개념이미지 사이의 직관적 사고를 따르는 연역

적인 수학적 개념 정의와 학생들이 가지고 있는 개념 이미지를 비교 연구한 Vinner[21]의 모델을 통해 분석해 볼 수 있다.

고등 수학적 사고 과정으로서의 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용은 [그림4]와 같은 모델링 과정을 따라서 진행되게 되며 위와 같은 개념형성 활동을 통하여 정적분을 이용한 자연로그에 대한 구체적인 개념형성이 가능하게 된다. 즉, [그림4]의 경우와 같이 새로운 형식적 개념 정의를 먼저 한 후, 구체적인 개념 형성을 유도하기 위하여 역동적 프로그램인 GeoGebra 환경을 활용하였고 이를 통해 시각적인 이해를 가능하게 하여 구체적이고 실제적인 개념이 형성되고 개념이미지가 생성될 수 있도록 하였다.

나. GeoGebra환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 그래프를 통하여 오개념을 극복

학생들은 자연로그의 정적분에 의한 정의 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ 에서 $x > 1$ 이면 정적분 값이 양수이므로 자연로그의 점 A 의 자취는 양의 값을 갖게 되고 넓이인 양수라는 것을 인식하였다[그림5].

그러나, 이 과정에서 S1은 x 가 $0 < x < 1$ 인 경우에서 자연로그 그래프와 정적분의 값인 점A의 자취가 음수에 나타난 것을 보고 교사에게 다음과 같이 질문하였다[그림 6].

<대화 발췌문>

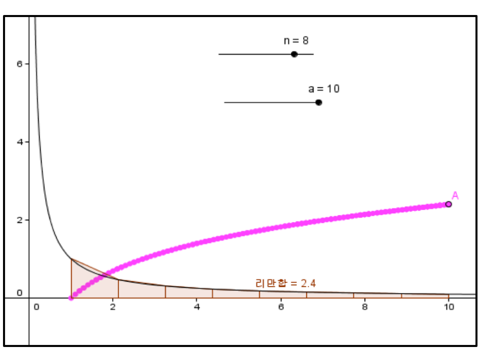

그림 5: S1의 $x > 1$ 일 때 자연로그

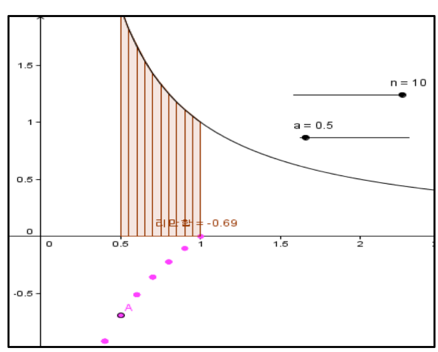

그림 6: S1의 $0 < x < 1$ 일 때 자연로그

S1 : (화면을 가리키며) 교수님, 리만합을 이용한 정적분은 넓이 인데 값이 왜 음수로 나온 거죠?

T : 자연로그의 정적분 정의에서 상한과 하한을 자세히 관찰해 보면 그 이유를 알 수 있을 거야.

S1 : 아하! 상한과 하한을 바꾸면 정적분 값의 부호가 바뀌는 거네요.

학생 S1은 교사와의 문답을 통하여 $0 < x < 1$이면 정적분 값은 $\ln x = \int_x^1 \frac{1}{t}dt - \int_1^x \frac{1}{t}dt$값은 이 되어 정적분의 상한과 하한이 바뀐다는 사실을 깨닫게 되었고, GeoGebra 환경에서 얻은 자연로그 값인 점A의 자취가 음수로 나타 난 것을 비교하여 자신의 오류를 극복할 수 있었다. 위와 같은 경우는 정적분과 관련된 명확하지 않은 개념 때문에 인지갈등을 겪고 오개념이 발생했지만, 교사와의 상호작용과 Geogebra 프로그램 활용을 통하여 이를 극복하는 과정을 보여주는 것이다.

이와 같은 활동 과정도 Vinner[21]의 모델을 통해 분석해 볼 수 있다. 실제 수업 상황에서 개념 형성 과정, 문제 해결과 과제 수행 과정에서도 실제로 일어나는 사고 과정을 분석한 결과 [그림7] 에서와 같이 개념 정의를 소홀히 하여 오개념이 발생하는 경우가 많았다. 즉, 직관적 반응을 보이는 과정에서 정확하지 않은 사고과정이 발생하여 개념 정의와 개념이미지 사이에서 갈등이 생기고 오개념을 불러일으키게 한다고 할 수 있다.

따라서, 수학 교사는 개념 형성 과정뿐만 아니라 문제 해결이나 과제 수행 과정에서도 개념 정의를 소홀하게 생각하여 발생할 수 있는 오류들을 간과해서는 안 될 것이다. 또한, [그림7]에서와 같이 오개념을 갖고 있는 학생에 대하여는 [그림4]의 경우처럼 학생들의 행동을 바로잡아가는 지도가 요구된다.

위의 사례를 통하여 알 수 있듯이 새롭게 개념 정의를 한 후에는 GeoGebra 환경을 통해 다양한 문제를 다루어보게 하여 올바른 개념 형성이 가능하도록 지도하는 것이 올바른 개념이미지를 생성하는 좋은 방법이 될 것이다. 즉, 개념 정의를 다시 언급하고 확인하여 구체적인 개념이 형성되게 하여 개념 정의와 개념이미지 사이에 오류가 없이 명확한 개념을 형성할 수 있도록 해야 할 것이다.

따라서 개념 정의와 개념 이미지 사이의 상호작용에 대하여 Vinner[21]의 모델인 [그

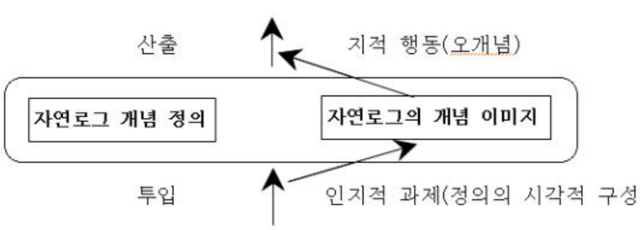

그림 7: 개념정의와 개념이미지 사이의 갈등에 의한 직관적 반응

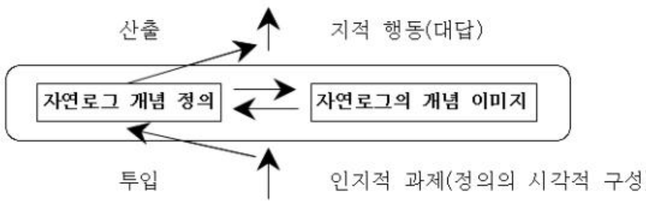

그림 8: 개념정의와 개념이미지 사이의 상호작용

림8]과 같이 교사가 학생들과 상호 작용하는 형태의 사고 과정을 거치는 학습방법이 바람직한 방안이 될 것이며 이를 통하여 학생들의 올바른 사고과정을 유도하고 구체적인 개념형성이 가능하도록 지도해야 할 것이다.

4.2 GeoGebra 환경에서 e의 기하학적인 도입

현재 학교 수학에서는 e를 도입할 때, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$로 정의하고 자연로그를 도입하지만, 본 연구에서는 정적분에 의해 자연로그를 정의하였다. 즉, $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$인 $f(x) = \ln x$라는 것을 뜻하며, 이 $f(x)$는 로그의 성질을 만족하고 그 밑이 e라는 것을 의미한다. 따라서 $f(x)$는 자연로그이고 이것의 밑을 찾는 것은 넓이가 1이 되게 하는 x를 찾는 것이라는 것을 알 수 있었다. 이 사고과정은 GeoGebra 환경에서 정적분의 값을 통해 얻은 자연로그 그래프 중 넓이가 1이 되는 x를 찾는 문제로 환원될 수 있으며 이하에서는 x를 자연로그 그래프를 통해 도입하는 것을 시도한 과정을 기술한 것이다.

다음은 학생들이 이전의 수학학습에서 배운 지식을 바탕으로 활동지에 기록한 내용의 일부이다.[그림9]

S1은 e를 도입할 때, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$라고 정의하고 자연로그의 연속성을 이용하여 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$의 넓이가 1이 되는 값을 활동지([그림9], 3번)를 통해 개념적으로 예측해 보았다. 또, 그 값을 자연로그 그래프를 통해 상한(a)과 구간$[1, a]$의 분할개수(n)

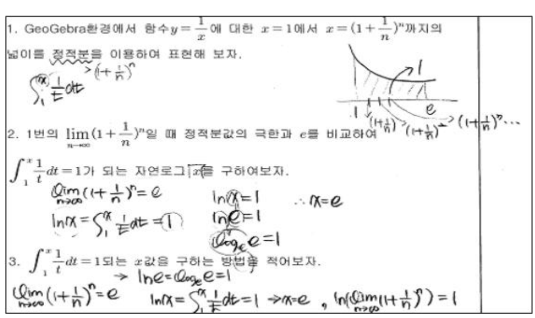

그림 9: S1의 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = 1$의 x값을 활동지에서 찾는 과정

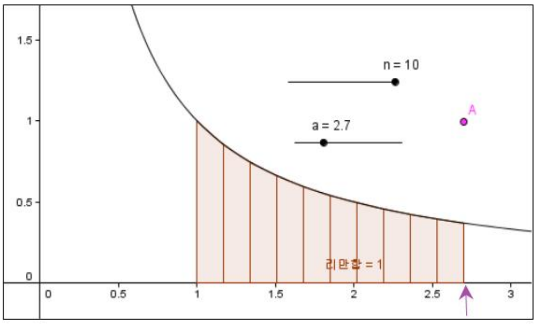

그림 10: S1의 정적분(리만합) $\int_1^x \frac{1}{t}dt = 1$인 x의 위치관찰 활동

를 확인하고 슬라이더 조작을 통하여 변화시켜 $x = e$의 값에 대한 개념 이미지를 얻을 수 있었다.

위와 같이 자연로그 그래프에서 $\ln x = 1$이 되는 넓이, 다시 말해서 정적분이 1인 x를 찾는 기하적인 접근이 e에 대한 직관적 이해를 향상시킬 수 있으며 개념형성을 명확하게 할 수 있다는 것을 알게 되었다[그림 10].

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$의 값을 구할 때, 학생들은 $1+\frac{1}{n}$의 값에 초점을 맞추어 1에 가까이 간다고 생각하거나 1보다 큰 것을 무한히 n제곱하는 것에 초점을 맞추어 무한히 증가할 것이라고 생각하는 장애가 빈번하게 발생한다[3]. 따라서 정적분의 값이 1이 되는 x값으로 e를 도입한 방식은 위의 장애들과 발생할 수 있는 문제들을 극복하게 해준다. 즉, $x = 1$에서 임의의 양의 실수 x까지의 함수 $y = \frac{1}{x}$ 아래의 넓이가 1이 되는 지점이 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$이 된다는 올바른 개념 이미지를 형성하게 해주어 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$이 1이 된다거나 무한대가 된다고 보는 오류를 자연스럽게 극복할 수 있었으며 정적분에 의해 정의된 자연로그의 그래프를 그리는 과정에서 e를 찾을 수 있었다.

5 결론 및 제언

본 연구의 목적은 자연로그를 배우는 전공학부생들이 시각적 도구이며 역동적 프로그램인 GeoGebra 환경에서 정적분을 이용하여 자연로그 그래프를 그려보고 이를 통하여 자연로그의 올바른 개념을 형성하는 과정을 알아보는 것이다. 또한, 자연로그 그래프를 이용하여 e의 개념을 대수적 접근이 아닌 기하학적으로 접근하는 방법을 도입하여 학생들이 GeoGebra 환경에서 개념 정의와 개념 이미지가 상호작용하는 형태로 학습할 수 있게 하고 구체적인 개념을 형성할 수 있도록 하며 자연로그의 지도가 가질 수 있는 수학 교육적 의의에 대해서 살펴보는 것이기도 하다.

단순하게 공식을 암기하여 단편적으로 이해하는 것이 아니라 GeoGebra 환경을 통한 시각적인 이해과정을 바탕으로 구체적인 개념이 형성되고 실제적인 이해가 이루어지도

록 학습하고 지도하는 것이 필요한 부분이다. 따라서 학생들이 자연로그에 대한 구체적인 개념을 형성하고 이에 대한 개념이미지를 생성하여 올바른 개념 사고 과정을 진행해 갈 수 있도록 지도하고자 하였다. 이를 위하여 전공학부 1학년 학생 2명을 대상으로 3회에 걸친 수업을 진행하였으며 활동 과정을 관찰하고 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 학생들은 활동 초기 정적분 상한의 변수와 슬라이더 변수를 동일하게 입력하는 오류를 겪었다. 그러나 학생과 교사와의 상호작용을 통해 오류를 수정하고 조작하는 활동을 거쳐 문제를 해결하였고 그 과정 속에서 슬라이더에 나타나는 변수의 관계를 이해하고 완성할 수 있었다.

둘째, GeoGebra 환경에서 슬라이더의 애니메이션 기능을 이용하여 분할한 개수 n에 대한 x의 연속적인 변화에 따른 정적분의 변화와 이것과 연결된 자연로그의 역동적 그래프를 이해하고 지필환경에서 얻을 수 없었던 구체적인 개념을 형성할 수 있게 되었다.

셋째, GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 그래프를 그리면서 정적분과 넓이의 관계를 알게 되었고 정적분의 성질을 인식하여 수학적 개념을 구체적으로 형성할 수 있었고 시각적인 이해를 통하여 개념이미지를 효과적으로 생성하는데 도움이 되었다.

넷째, 학생들은 정적분과 넓이의 관계에서 인지갈등과 오개념이 발생했지만, GeoGebra 환경에서 자연로그 그래프를 그려보는 활동을 통해 인지갈등과 오개념을 극복하게 되었고 올바른 개념을 형성할 수 있었다.

다섯째, 학생들은 정적분을 통해 자연로그를 정의하는 과정에서 e를 기하학적으로 도입할 수 있었고 이를 통하여 e에 대한 직관적 이해를 향상시킬 수 있었으며 개념형성도 명확하게 할 수 있었다.

위와 같은 연구 결과를 통하여 역동적 프로그램인 GeoGebra 환경에서 정적분을 이용하여 접근하는 것은 자연로그를 보다 구체적이고 명확하게 이해할 수 있고 올바른 개념을 형성할 수 있으며 엄밀성의 수준에 있어서 간결하고 효과적인 방법이 된다는 것을 알 수 있었다. 또한, GeoGebra 환경에서 오류를 수정하고 조작하는 활동은 문제해결 과정을 관찰하고 분석할 수 있는 기회를 제공하여 개념정의와 개념이미지 사이의 상호작용에 대한 올바른 사고과정을 가능하게 하고 명확한 개념을 형성하는데 도움을 준다는 것을 알 수 있었다.

따라서 자연로그 뿐 만 아니라 지수함수와 일반로그함수 그리고 다른 부분의 교수・학습 방법에 있어서도 교수학적 전략의 신장과 확립을 위해서 역동적 프로그램 특히 GeoGebra 환경에 대한 보다 구체적이고 실제적인 연구가 이루어져야 할 것이다.

덧붙여, 학생들에게 실제적인 개념이미지 형성이 쉽지 않은 형식적 개념 정의에 관하여 명확한 개념을 형성할 수 있도록 역동적인 프로그램의 효과적이고 적절한 활용이 있어야 할 것이고 이를 위해 시각적이고 역동적인 프로그램의 개발과 연구도 계속되어

야 할 것이다. 또한, 역동적인 활동 과정을 통하는 방법이 개념 정의와 개념 이미지간의 상호작용을 가능하게 할 것이고 올바른 개념적 사고로 이르게 하는 교수・학습이 이루어지는 수학교육이 될 수 있을 것이라는 교육적 시사점도 얻을 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 김권욱 외 12인, 『미분적분학』, 서울: 경문사, 2010.
2. 민세영・박선용, 「쌍곡선의 구적법에 의한 자연로그의 도입에 관한 고찰」, 수학교육학연구 12(2002), No. 1, pp. 81–93.
3. 박선화, 「개념학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰—개념 정의와 개념 이미지 관계를 중심으로-」, 대한수학교육학회 논문집 3(1993), No. 1, pp. 185–194.
4. 신보미, 「구분구적법과 정적분의 개념 분석」, 한국학교수학회논문집 11(2008), No. 3, pp. 421–438.
5. 우정호, 『수학 학습-지도 원리와 방법』, 서울대학교출판부, 2000.
6. 이남숙, 「개념 정의와 개념 이미지 간의 격차 발생 원인에 관한 고찰. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문」, 1997.
7. 최승현, 「수학적 오개념 발생에 관한 일 고찰—극한 개념을 중심으로」, 교육과정평가연구 2(1999), No.1, pp. 59–73.
8. 한길준・우호식, 「고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색」, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 40(2001), No. 2, pp. 241–252.
9. Christian, Robert R., “Effective Way to Introduce Natural Logarithms and e”, *Two-Year College Mathematics journal*, 14 (2005), No. 5, pp. 424–426.
10. Freudenthal, H., 『수학교육론』, (우정호 외 5인 공역) 서울: 경문사, 2008.
11. Hohenwarter. J. & Hohenwarter. M., “Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra”, *Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28 (2008), No. 2, pp. 135–146
12. Norman, F. A.. “Teachers’ Mathematical Knowledge of the Concept of Function”, *The Concept of Function: Aspect of Epistemology and Pedagogy*, 25(1991), pp. 215–232.
13. Resslan, S. & Tall, D. O., “Definitions and images for the definite integral concept”, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education*, 4(2002), pp. 89–96.
14. Tall, D. O., “A long-term learning schema for calculus/analysis”, *Mathematical Education for Teaching*, 2(1975), No. 5, pp. 3–16.
15. Tall, D. O. & Vinner, S., “Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity”, *Educational Studies in Mathematics*, 12(1981), No. 2, pp. 151–169.
16. Tall, D. O., “The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Function, Limits, infinity, and Proof”, *Handbook of Research on Teaching and Learning*, *ed*, *by Grouws*, D. A. New york: Macmillan, (1992), pp. 495–514.
17. Tall, D. O., McGowen M. & DeMarois, P, “The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept”, Proceedings of PME-NA, 1(2000), pp. 255–261.

18. Tall, D. O., 『고등수학적 사고』(류희찬 외 2인 공역), 서울: 경문사(영어 원작은 1991 출판), 2003.
19. Tall, D. O., "The Transition to Formal Thinking in Mathematics", *Mathematics Education Research Journal*, 20(2008), No.2, pp. 5–24.
20. Tall, D. O., *A Sensible Approach to the Calculus*, Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus, 23–25th September 2010, Puebla, Mexico, 2010.
21. Vinner, S., "Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent", *Proceedings of PME 6*, *Antwerp*, (1982), pp. 24–28.
22. Vinner. S., "Concept definition, concept image and the notion of function", *Intuitional Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(1983), pp. 239–305.
23. Vinner, S., & Dreyfus, T., "Images and Definitions for the Concept of Function", *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1989), No. 4., pp. 356–366.
24. West, R. E., & Graham, C. R., "Benefits and Challenges of Using Live Modeling to Help Preservice Teachers Transfer Technology Integration Principles", *Journal of Computing in Teacher Education*, 23(2007). No. 4, pp. 131–141.
25. http://www.geogebra.org/cms/

이정곤 원광대학교 수학정보통계학부
Division of Mathematics and Infomational Statistics, Wonkwang University
E-mail: jukolee@wonkwang.ac.kr