

# 마찰을 고려한 접시 스프링의 하중 변위 곡선 예측 Prediction of Load-displacement of the Disc Spring with the Friction

신 동 호\* · 이 정 윤† · 오 재 응\*\*

Dong Ho Shin, Jung Youn Lee and Jae-Eung Oh

(2012년 1월 3일 접수 ; 2012년 3월 14일 심사완료)

**Key Words** : Load-displacement Curve(하중 변위 곡선), Disc Spring(접시 스프링), Friction(마찰), Energy Method(에너지법)

## ABSTRACT

A disc spring consists of a conical disc. A load-displacement formula was newly developed in the form of energy method to consider both rigid and friction. The cross section of the disc spring has identical slope angles at the bottom of conical. To solve such a problem, an energy method calculation is proposed. To achieve the goal of this study, the proposed calculation is extended to a disc spring with friction. A firm basis background study based on Almen's work is presented in developing a new numerical approach to predict the available formulation for a disc spring with friction.

## 1. 서 론

1867년 Belleville가 프랑스에서 국제 특허를 받은 접시 스프링은 선형성을 가지는 일반 코일 스프링과는 달리 비선형성을 지니고 있다. 접시 스프링은 Fig. 1에서와 같이 중앙에 구멍이 있는 원판을 원추 형상으로 가공하고 상하방향에 하중이 작용하도록 하여 사용하는 스프링이다. 좁은 공간에서 비교적 큰 부하용량을 가지고 있어 자동차 클러치<sup>(1,2)</sup> 부분에 많이 사용되며 원추 높이와 판 두께의 비에 따라 특성이 다르기 때문에 이 비율에 따라 활용도가 넓은 비선형 스프링 특성을 얻을 수 있다.

구조물의 진동 해석에 있어 강성을 파악하는 것은 매우 중요하므로, 접시 스프링의 경우 하중-변위 곡선을 이용하여 강성을 예측할 필요가 있다. 접시

스프링에 대한 연구는 Almen과 Laszlo<sup>(3)</sup>가 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 계산하는 Almen-Laszlo 방정식을 처음 발표하였고, 이후 Curti와 Olando<sup>(4)</sup>는 Almen-Laszlo 방정식을 토대로 하중-변위 곡선뿐만 아니라 radial 하중을 계산하는 방법을 제시하였다. 방승우 등<sup>(5)</sup>은 기계 시스템의 수직 방향에 대한 접시 스프링의 완충기 설계를 위해 충격에 대한 접시 스프링의 비선형성 응답을 수치 해석에 의해 구하였고 Shcnorr 회사<sup>(6)</sup>에서 하중-변위 곡선의 방정식을 마찰이 없는 경우에 대하여 방정식을 유도한 후 단순하게 마찰계수에 따른 하중을 계산하였다.

그러나 기존의 연구는 접시 스프링이 처짐이 발생할 때 두께에 변화에 따른 스프링의 내경과 외경의 변화를 고려하지 않았으며 접지면 사이의 마찰을 변위와 상관없이 계산하여 실험 또는 유한요소 해석 결과와 차이가 있었다.

이 연구에서는 Almen-Laszlo 방정식을 토대로 내경과 외경의 변화에 따라 하중-변위 곡선을 예측하였고, 에너지법을 이용하여 접시 스프링과 접지면의 마찰과 접시 스프링의 변위를 동시에 고려한 접

† 교신저자; 정회원, 경기대학교 기계시스템공학과

E-mail : jylee@kgu.ac.kr

Tel : (031)249-9811, Fax : (031)244-6300

\* 경기대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 한양대학교 기계공학부

시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측하였다. 이의 검증을 위하여 제안한 방정식을 이용하여 예측한 하중-변위 곡선과 상용 모델<sup>(7)</sup>을 사용한 유한요소해석의 결과와 비교하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 Almen-Laszlo 방정식

Fig. 2에서 접시 스프링의 처짐  $\delta$ 에 대하여 하중  $P$ 는 접시 스프링의 외주의 가장자리에서 균일하게 작용하고, 하중이 작용하면 단면은  $O$ 점을 중심으로 회전하며 단면 형상이 변하지 않는다고 가정한다. 변형 전 접시 스프링 위에 미소부분  $BC$ 의 길이를  $l$ , 변형 후의 길이를  $l'$ 이라 하면  $l$ 과  $l'$ 은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l &= (s - x \cos \beta) d\theta \\ l' &= \{s - x \cos(\beta - \phi)\} d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\beta$ 는 변형 전 스프링의 각도이고,  $\phi$ 는 변형 후 스프링의 변위 각이다.

$\beta$ 와  $\phi$ 가 미소하다고 가정하면 변형률을  $\varepsilon$ 은 식 (2)와 같이 구할 수 있다.

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{-x\phi\left(\beta - \frac{1}{2}\phi\right)}{s - x} \quad (2)$$

여기서,  $\beta = \frac{H}{r_2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$ ,  $\phi = \frac{\delta}{r_2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$ ,  $\alpha = r_2/r_1$ 이며  $t$ 는 스프링의 두께이다.

접시 스프링의 반지름 방향 단면상에 있어서 접선방향에 작용하는 압축응력  $\sigma_c$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma_c = \frac{\varepsilon E}{1 - \nu^2} = \frac{-x\phi\left(\beta - \frac{\phi}{2}\right)E}{(1 - \nu^2)(s - x)} \quad (3)$$

여기서  $E$ 는 탄성계수  $\nu$ 는 푸아송비이다.

Fig. 3에서 변형 전의 접시 스프링의 곡률을  $\rho$ , 변형 후의 곡률을  $\rho'$ 이라하면 곡률의 변화량은 식 (4)와 같다.

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{\phi}{s - x} \quad (4)$$

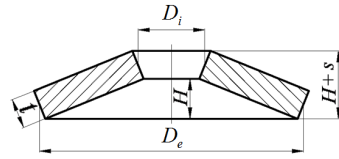


Fig. 1 Cross-sectional shape of the disc spring

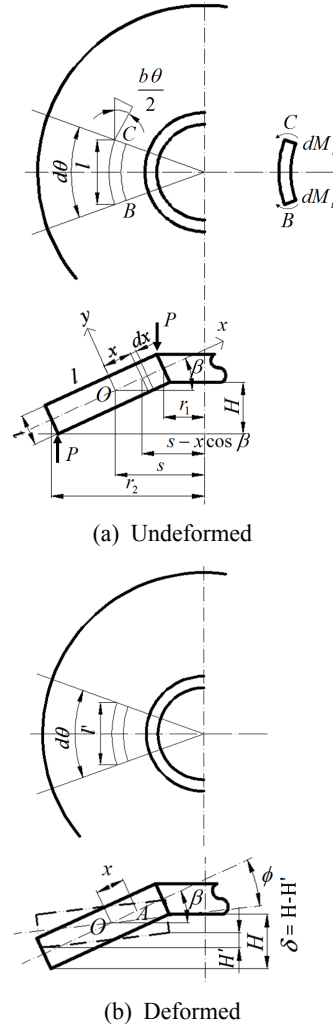


Fig. 2 Before and after deformation of the cross-sectional shape of the disc spring

Fig. 2의  $BC$ 부분에 작용하는 굽힘 모멘트  $dM_t$ 라 하면  $dM_t$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$dM_t = \frac{\phi}{s - x} \cdot \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} dx \quad (5)$$

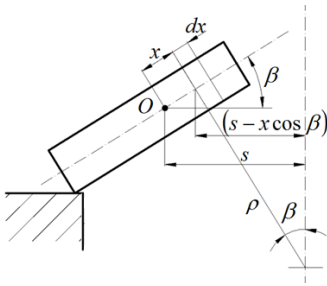


Fig. 3 Radius of tangential curvature of the disc spring

접시 스프링의 단면 중심축  $x$ 로부터 위쪽  $y$ 의 거리에 작용하는 접선방향의 굽힘 응력  $\sigma_b$ 는 다음과 같다.

$$\sigma_b = \pm \frac{E\phi y}{(1-\nu^2)(s-x)} \quad (6)$$

식 (3)과 식 (6)으로 합성응력  $\sigma$ 를 구하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma = -\frac{E\phi}{(1-\nu^2)(s-x)} \left\{ x \left( \beta - \frac{\phi}{2} \right) \mp y \right\} \quad (7)$$

식 (7)에 식 (2)의  $\beta$ 와  $\phi$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sigma = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)(s-x)r_2} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \times \left\{ \frac{2H-\delta}{2r_2} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) x \mp y \right\} \quad (8)$$

접시스프링 중심축선에서 회전중심  $O$ 까지의 거리  $s$ 는 접선방향에 작용하는 힘이 0이 된다는 조건으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{s-r_2}^{s-r_1} \sigma_t dx = 0 \quad (9)$$

식 (9)를 이용하여  $s$ 와  $x$ 를 식 (10)과 같이 구할 수 있다.

$$s = \frac{r_2 - r_1}{\ln \alpha} \quad x = r_1 \left( \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha} - 1 \right) \quad (10)$$

Fig. 2(a)에서 BC부분에 압축응력  $\sigma_c$ 에 의한 반지름 방향의 굽힘 모멘트를  $dM_r'$ 이라 하면 다음과

같다.

$$dM_r' = x(\beta - \phi)\sigma_t t dx d\theta \quad (11)$$

식 (11)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 식 (12)가 된다.

$$M_r' = \frac{E\phi \left( \beta - \frac{\phi}{2} \right) (\beta - \phi) t d\theta}{(1-\nu^2)} \times \left\{ \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) - 2s(r_2 - r_1) + s^2 \ln \alpha \right\} \quad (12)$$

또한, BC부분에 굽힘 응력  $\sigma_b$ 에 의하여 반지름방향에 굽힘 모멘트  $dM_r''$ 가 발생하므로  $M_r'$ 과 동일한 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$M_r'' = \frac{E t^3 \phi d\theta}{12(1-\nu^2)} \ln \alpha \quad (13)$$

접시스프링의 반지름 방향에 작용하는 전체 굽힘 모멘트  $M_r$ 은 식 (14)와 같다.

$$M_r = \frac{E\delta d\theta}{2r_2(1-\nu^2)} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \times \left\{ (H-\delta) \left( H - \frac{\delta}{2} \right) t \cdot \left( \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2}{\ln \alpha} \right) + \frac{t^3 \ln \alpha}{6} \right\} \quad (14)$$

회전중심  $O$ 에서는 하중  $P$ 에 의한 굽힘 모멘트가  $M_r$ 과 같으므로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$M_r = P \frac{d\theta}{2\pi} (r_2 - r_1) \quad (15)$$

식 (15)로부터 하중  $P$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P = \frac{C_4 E \delta t^4}{r_2^2 (1-\nu^2) t} \left\{ \left( \frac{H}{t} - \frac{\delta}{t} \right) \left( \frac{H}{t} - \frac{\delta}{2t} \right) + 1 \right\} \quad (16)$$

여기서,  $C_4 = \pi \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 \left( \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2}{\ln \alpha} \right)$ 이다.

## 2.2 수정한 Almen-Laszlo 방정식

(1) 두께 변경에 따른 하중 - 변위 방정식

기존의 Almen-Laszlo 방정식은 치짐이 일어나도 접시 스프링의 내경과 외경은 변하지 않는다는 가정

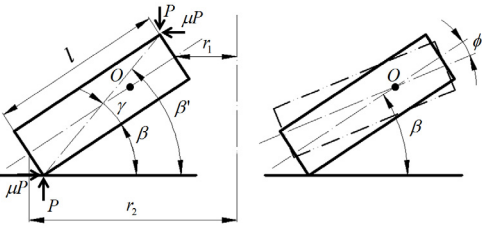


Fig. 4 Changed variables for proposal equation

아래 방정식을 유도하였다. 그러나 Fig. 2(b)에서 하중에 의해 처짐  $\delta$ 가 발생하면 스프링의 내경은  $\delta$ 가  $H$ 가 될 때까지 감소하다  $\delta$ 가  $H$ 보다 커지면 다시 증가하며, 외경은 이와 반대의 형태를 보인다. 따라서 Fig. 4와 같이 두께를 고려하여 식 (15)의 하중  $P$ 에 의한 회전 중심  $O$ 에서의 굽힘 모멘트를 수정하면 다음과 같다.

$$M_r = P \frac{d\theta}{2\pi} \frac{r_2 - r_1}{\cos \beta'} \cos(\beta' - \phi) \quad (17)$$

여기서,

$$\beta' = \beta + \gamma, \quad \phi = \beta - \sin^{-1} \left\{ \frac{(H - \delta)}{l} \right\}$$

$$\gamma = \tan^{-1}(l/t)$$

이다.

식 (17)을  $P$ 에 대하여 정리하면 식 (18)과 같다.

$$P = \frac{C_4 E \delta t^4 \cos \beta'}{r_2^2 (1 - \nu^2) t \cos(\beta' - \phi)} \times \left\{ \left( \frac{H - \delta}{t} - \frac{\delta}{t} \right) \left( \frac{H - \delta}{t} - \frac{\delta}{2t} \right) + 1 \right\} \quad (18)$$

(2) 마찰을 고려한 기존의 방정식(SCHNORR)<sup>(6)</sup>

Fig. 5는 접시 스프링과 구조물 사이에서 발생하는 마찰을 표시한 것이다. Fig. 5의 ①은 접시 스프링과 구조물 사이에서 일어나는 반경방향의 접선 마찰이며 ②는 접시 스프링이 병렬로 연결된 경우 접시 스프링 사이의 접시면에서 일어나는 표면 마찰로 SCHNORR에서 제시한 기존의 마찰을 고려한 방정식은 식 (19)와 같다.

$$P_f = P \frac{n}{1 \pm \mu_m (n-1) \pm \mu_r} \quad (19)$$

여기서,  $P_f$ 는 마찰을 고려한 하중,  $\mu_m$ 은 표면마찰계수,  $\mu_r$ 은 접선마찰계수,  $n$ 은 접시 스프링의 개수이다.

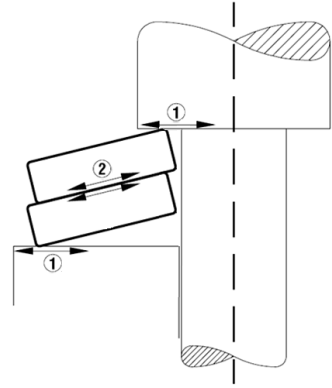


Fig. 5 Friction in disc spring

(3) 마찰을 고려하여 제안한 방정식

Fig. 4에서 하중이 작용하는 부분에 접촉하는 구조물이 존재하고, 이로 인해 접시 스프링이 하중  $P$ 를 받으면 구조물과 접시 스프링 사이에서 마찰이 발생하게 된다. 따라서 회전중심  $O$ 에서는 하중  $P$ 와 마찰력  $\mu P$ 에 의한 굽힘 모멘트가 동시에 발생하게 된다.

이 논문에서는 단일 접시 스프링에 대하여 방정식을 유도하므로 표면 마찰계수는 고려하지 않고 접선 마찰계수만을 고려하고 수정된 Almen-Laszlo 방정식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_r = P \frac{d\theta}{2\pi} \frac{r_2 - r_1}{\cos \beta'} \cos(\beta' - \phi) - \mu P \frac{r_2 - r_1}{\cos \beta'} \sin(\beta' - \phi) \quad (20)$$

여기서,  $\mu$ 는 접선 마찰계수이다.

식 (20)을  $P$ 에 대하여 정리하면 마찰을 고려한 수정된 Almen-Laszlo 방정식을 식 (21)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$P = \frac{C_4 E \delta t^4 \cos \beta'}{r_2^2 (1 - \nu^2) t \{ \cos(\beta' - \phi) - \mu \sin(\beta' - \phi) \}} \times \left\{ \left( \frac{H - \delta}{t} - \frac{\delta}{t} \right) \left( \frac{H - \delta}{t} - \frac{\delta}{2t} \right) + 1 \right\} \quad (21)$$

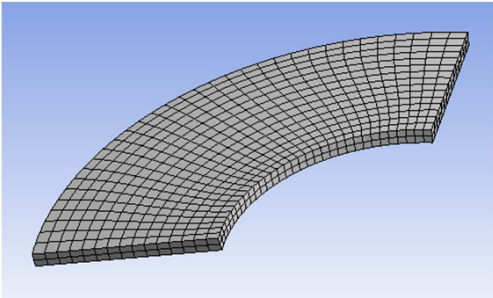
### 3. 컴퓨터 시뮬레이션

#### 3.1 두께에 변경에 따른 모델링

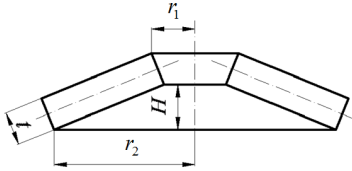
기존의 Almen-Laszlo 방정식과 여기서 제안한

**Table 1** Parameters of disc spring for analysis

Case	$r_1$ (mm)	$r_2$ (mm)	$\alpha$	$H$ (mm)	$t$ (mm)	$E$ (MPa)	$\nu$
1	A	6.1	12.5	2.05	0.5	206000	0.3
	B				0.7		
	C				0.9		
2	A	9.2	25.0	2.71	1.0		
	B				1.25		
	C				1.5		



(a) Disc spring model of case 1( $t=0.5$  mm)



(b) Parameters of disc spring for FEM

**Fig. 6** Model of disc spring for midas NFX

방정식을 이용하여 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측하였다.

Table 1에서 내경에 대한 외경비  $\alpha$ 가 서로 다른 두 가지 모델을 이용하여  $\alpha$ 에 따른 하중-변위 곡선과 각각의 스프링의 두께를 변화시키면서 두께에 따른 하중-변위 곡선을 예측하였다. 제안한 방정식을 이용하여 예측한 하중-변위 곡선의 타당성을 검증하기 위하여 midas NFX<sup>(7)</sup>를 이용한 유한요소해석의 결과와 비교하였다.

Fig. 6(a)는 유한요소해석을 수행하기 위하여 case 1A( $t=0.5$ )를 모델링한 것으로 symmetric이어서 1/4 모델로 모델링하였다. 하중은 변위하중으로 Almen과 Laszlo<sup>(3)</sup>와 같이 처짐  $\delta$ 가 최대  $2H$ 가 될 때 까지  $r_1$ 에 주었으며, 경계조건은 스프링 밑면을 연직방향인  $z$ 방향으로 구속하였다. 총 질점 개수는 5834개, 요소 개수는 990개이다. Fig. 6(b)는 해석 모델의 변수

들을 나타내었다.

### 3.2 마찰을 고려할 경우 모델링

식 (19)와 이 논문에서 제시한 방정식을 이용하여 마찰을 고려하였을 경우의 하중-변위 곡선을 예측하였다. 여기서 고려한 접시 스프링의 개수는 한 개이므로 스프링과 스프링사이의 표면에 의한 마찰은 발생하지 않으므로 식 (19)에서 스프링과 스프링 표면마찰계수  $\mu_m$ 은 고려하지 않았다.

접시 스프링의 재질은 50CrV4이고 접시 스프링과 접하는 면의 재질은 구조용강이다. 접시 스프링의 효율을 높이기 위하여 윤활을 하여 접시 스프링과 구조물 사이의 마찰 계수가 감소하므로 이 논문에서는 Table 1에 제시한 모델을 이용하여 마찰계수  $\mu$ 를 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4의 다섯 가지로 하였으며 하중 변위 곡선을 예측하였다. 예측한 결과의 타당성을 검증하기 위하여 midas NFX<sup>(7)</sup>를 이용하여 유한요소해석을 수행한 결과와 비교하였다.

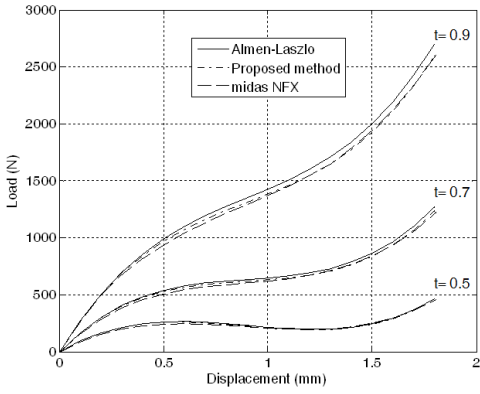
## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 내경과 외경 비에 따른 하중-변위 곡선

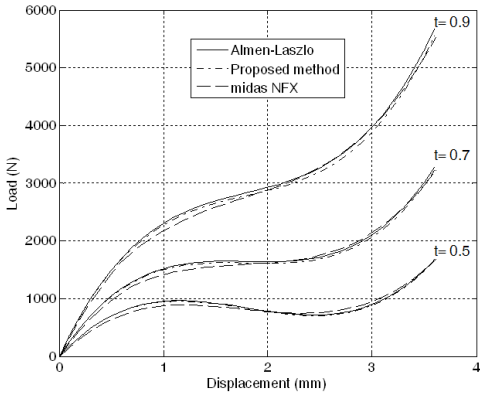
Fig. 7(a)와 (b)는 각각의 접시 스프링의 두께에 따라 기존의 Almen-Laszlo 방정식과 접시 스프링의 두께를 고려하여 제안한 방정식을 Table 1에 있는 여섯 가지 모델에 대하여 하중-변위 곡선을 예측한 그래프이다.

이 그래프와 유한요소해석(midas NFX) 결과를 같이 나타내었다. 하중은 변위가 접시 스프링의 높이  $H$ 의 2배가 될 때 까지 가하였다. 이는 대부분의 접시 스프링이 처짐  $d$ (델타)를  $H$ (높이)이내에서 사용하지만 일부 경우 자동차 클러치<sup>(2)</sup> 및 공작기계 스핀들<sup>(3)</sup>에서는 처짐  $d$ (델타)를  $2H$ 까지 사용하기 때문이다. 접시 스프링의 두께가 증가함에 따라 하중이 증가하였으며 유한요소해석으로 비교한 결과 기존의 방정식 보다 새로 제안한 방정식이 잘 일치하였다.

기존의 방정식과 제안한 방정식의 결과를 유한요소해석의 결과와 비교하여 보면 두께가 증가할수록 새로 제안한 방법이 기존의 방법보다 오차가 감소함을 알 수 있었다. 이는 새로 제안한 방법이 두께의 영향을 고려하여 하중 변위 곡선을 예측하였기 때문이다.



(a) Case 1



(b) Case 2

Fig. 7 Load-displacement curve for analysis method

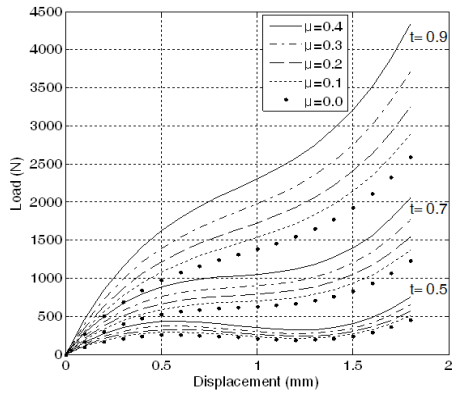
#### 4.2 마찰계수에 따른 하중-변위 곡선

Fig. 8은 Table 1의 case 1, Fig. 9는 Table 2의 case 1로 두께와 마찰계수의 변화에 따른 하중-변위 곡선을 나타낸 그림이다. 제안한 방법과 유한요소해석의 결과와 잘 일치하였지만 기존의 방정식<sup>(6)</sup>은 변위가 증가할수록 오차가 커지는 것을 알 수 있었다. 마찰계수가 증가함에 따라 하중이 증가하는 것을 알 수 있었고, 최대 변위 지점에서는 마찰계수에 따른 하중의 차이가 크지 않았다.

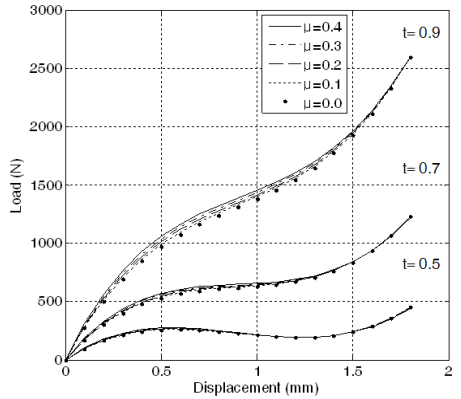
#### 4.3 제안한 방정식의 타당성 검증

Fig. 10(a), (b)는 제안한 방정식과 유한요소해석의 결과의 타당성을 검증하기 위해 Table 1에 있는 case 2( $t=1.25$  mm)를 택하여 예측한 하중을 마찰계수가 0일 때 하중을 기준으로 나누어 나타낸 그림이다.

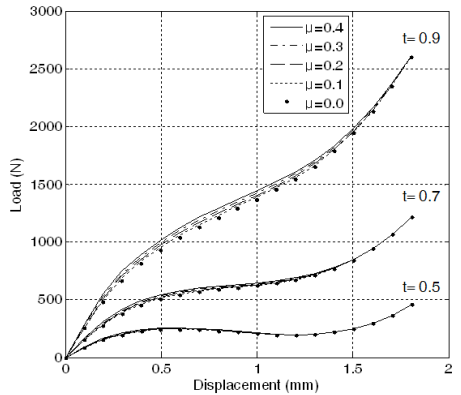
Fig. 10(a)는 유한요소로 해석한 결과를 나타낸



(a) SCHNORR



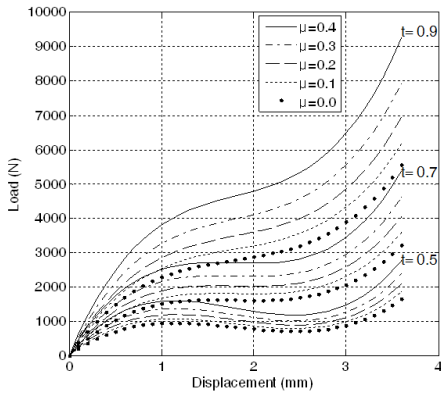
(b) Proposed method



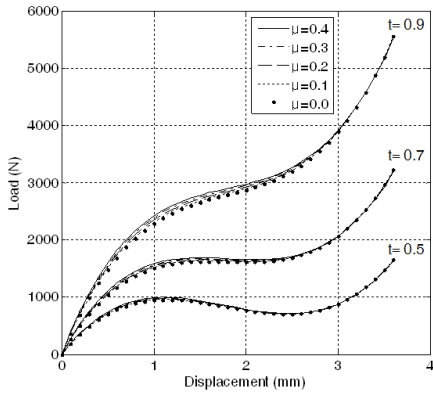
(c) Midas NFX

Fig. 8 Compare load-displacement curve acc. to friction(case 1)

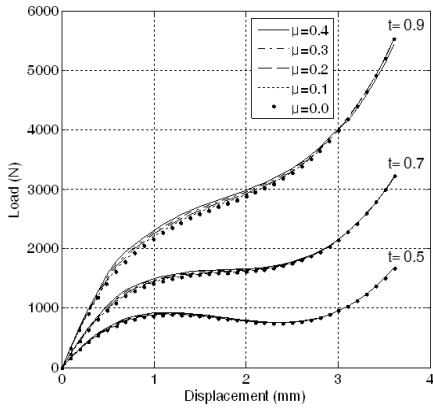
그림으로 마찰계수가 증가할수록 하중이 증가하였으며 마찰계수가 0.4일 때 하중은 최대 8% 증가하였다. 변위가 약 0.7 mm까지 변위가 증가할수록 하중이 증가한 것은 하중이 가해지는 부분과 경계조건



(a) SCHNORR



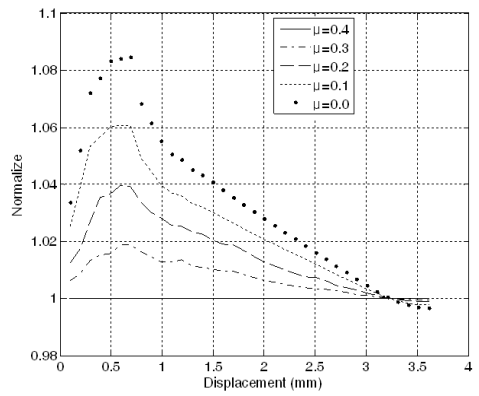
(b) Proposed method



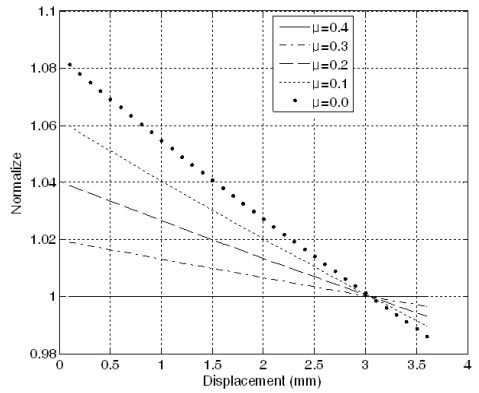
(c) Midas NFX

Fig. 9 Compare load-displacement curve acc. to friction(case 2)

부분에서 국부 변형이 발생하였기 때문으로 생각된다. 변위가 0.7 mm를 넘어 증가할수록 하중 증가비가 감소하여 변위가 약 3.1 mm일 때는 마찰 계수에 의한 영향이 없었다. 이는 접시스프링의 높이



(a) Normalize load using midas NFX



(b) Normalize load using proposed method

Fig. 10 Compare normalized load of case 2( $t=1.25$  mm)

1.8 mm에 스프링의 두께 1.25 mm를 더한 거리로 하중이 수평면까지 오는 경우이며 이때 반경 방향으로 변위가 발생하지 않아 마찰에 의한 영향이 없기 때문이다.

Fig. 10(b)는 새로 제안한 방법의 결과를 나타낸 그림으로 유한요소해석 결과와 마찬가지로 변위가 증가할수록 하중 증가비가 감소하였으며 새로 제안한 방법의 결과와 유한요소해석의 결과가 비교적 잘 일치하였다.

## 5. 결 론

제안한 방정식을 이용하여 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측한 결과 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 기존의 Almen-Laszlo 방정식에 두께를 고려하여 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측하는 방정식을 제안하였다.

(2) 유한요소해석의 결과와 비교하였을 때 기존의 방정식보다 두께를 고려하여 제안한 방법이 좀 더 유한요소해석의 결과와 잘 일치하였다.

(3) 마찰을 고려하여 접시 스프링의 하중 변위 곡선식을 예측하였으며 제안한 방법과 유한요소해석을 수행하여 얻은 하중-변위 곡선을 normalize한 결과 비교적 잘 일치하여 제안한 방법의 타당성을 검증하였다.

## 참 고 문 헌

(1) Shen, W. and Fanf, W., 2007, Design of a Friction Clutch Using Dual Belleville Structures, Journal of Mechanical Design, Vol. 129, pp. 986-990.

(2) Society of Automotive Engineers, 1982, Design and Manufacture of Coned Disc Springs(Belleville

Springs) and Spring Washer, SAE HS-1582.

(3) Almen, J. O. and Laszlo, A., 1936, The Uniform Section Disk Spring, Trans. ASME, Vol. 58, No. 4, pp. 305~314.

(4) Curti, G. and Orlando, M., 1979, A New Calculation of Coned Annular Disk Springs, Wire, Vol. 28, No. 5, pp. 199~204.

(5) Bang, S. W., Lee, H. J., Shim, H. J., Park, S. G., Lee, J. Y. and Oh, J. E., 2007, Non-linearity Characteristics Consideration of the Disc Spring Under Shock Using Numerical Analysis, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 2, pp. 153~159.

(6) SCHNORR, 2003, Handbook for disc springs, Schnorr Corporation.

(7) Midas IT., 2010, Midas NFX Analysis Manual, Midas Information Technology.