

Two-Pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 시스템 기반의 힐버트 변환을 활용한 2-D 인코히어런트 이미징 구현

Implementation of 2-D Incoherent Imaging using Hilbert Transform based on Two-Pupil Optical Heterodyne Scanning System

경민구*, 도규봉*

Min-Gu Kyung*, Kyu-Bong Doh*

요 약

지금까지의 힐버트 변환은 대부분 코히어런트 이미징에서만 활용되어 왔을 뿐 인코히어런트 이미징에 대해서는 그 적용이 미비했다. 본래의 광원 영역에서는 인코히어런트 물체의 힐버트 변환이 일정하게 중첩되는 문제가 발생하기 때문이다. 본 논문에서는 음이 아닌 강도(intensity) 분포 함수의 합성을 수행함으로써 인코히어런트 이미징의 문제점을 보완한 two-pupil 시스템을 적극 활용하여 코히어런트 이미징 대비 낮은 노이즈 특성, 물체의 위상 변화에 대한 강건함, 유연한 필터의 설계 등의 장점을 극대화한다. 제안하는 이미징 방식은 공간 영역에서 광학 전달 함수를 분할하여 필터링한 후 인코히어런트 물체의 힐버트 변환을 수행한다. 이를 바탕으로 광학 시스템에서의 두 pupil을 수학적으로 분석하고 디자인하여 two-pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 시스템을 구현할 수 있다. 모의실험을 통해 제안하는 시스템을 바탕으로 2-D 홀로그램을 도출함으로써 인코히어런트 이미징에서도 힐버트 변환의 적용이 유효함을 확인할 수 있다. 또한 복소홀로그램의 복원을 통해 힐버트 변환만을 이용한 홀로그램에 비해 공간 영역에서 선명도가 개선된 홀로그램 영상도 획득할 수 있다.

Abstract

The Hilbert transform, which has been hitherto discussed in coherent imaging, is for the first time investigated in the context of incoherent imaging. Because the Hilbert transform of the information is superposed coherently with the original light field. We present a two-pupil optical heterodyne scanning system and analyze mathematically the design of its two pupils such that the optical system can perform the Hilbert transform on incoherent objects. In this paper, we review and formulate the definition of an analytic signal of a function and from which we can obtain the Hilbert transform of the function. and we analyze the design of pupils so as to obtain the Hilbert transform and show some 2-D simulations. Computer simulation results of the idea clarify the theoretical results.

Key words : Incoherent scanning, hologram, Hilbert transform, OTF, OSH

I. 서 론

기존의 힐버트 변환은 위상 복원 문제의 해결뿐만 아니라 이미지 프로세싱 분야에서도 큰 주목을 받

* 한국항공대학교 정보통신공학과 (Information & Telecommunication Engineering, Korea Aerospace University)

· 제1저자 (First Author) : 경민구

· 투고일자 : 2012년 3월 9일

· 심사(수정)일자 : 2012년 3월 10일 (수정일자 : 2012년 4월 22일)

· 게재일자 : 2012년 4월 30일

고 있다 [1,2]. 광학 코히어런트 시스템에서의 일반적인 힐버트 변환 적용은 푸리에 평면에서 π 위상 이동을 통해 가능하다 [3]. 또한, 코히어런트 시스템의 푸리에 평면에서 2분할 필터링을 통해 본래의 광원 영역에서의 힐버트 변환을 얻을 수 있다 [4,5]. 하지만 힐버트 변환은 본래의 광원 영역에서 일정하게 중첩된다. 이는 위상 추출 방식을 통한 코히어런트 이미징과 인코히어런트 이미징이란 두 영역의 분리가 가능하지 않는 한, 본래의 광원 영역에서의 힐버트 변환은 구현이 불가능하다는 것을 말한다. 결과적으로 지금까지 광학시스템에서의 인코히어런트 이미지 프로세싱에서 인코히어런트 물체들의 힐버트 변환 정보를 추출할 수 없었다.

그럼에도 불구하고 광학 인코히어런트 스캐닝 시스템은 낮은 노이즈 특성, 물체의 위상 변화에 대해 강건함, 유연한 필터의 설계라는 측면에서 이미지 스캐닝에서 각광을 받고 있다.

따라서 two-pupil 시스템을 도입함으로써 인코히어런트 이미징 시스템의 제약 요소인 음이 아닌 intensity 분포 함수의 합성을 수행한다. 그리고 광학 전달 함수 (Optical Transfer Function, OTF)의 4분할 필터링을 통한 인코히어런트 물체의 힐버트 변환 추출을 제안하고 복소.홀로그램 복원에 적용, 공간 영역에서 홀로그램의 선명도를 크게 향상시킬 수 있다 [6,7].

제안된 필터링은 Poon과 Korpel에 의해 제작된 two-pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 시스템을 기반으로 수행되며 [8], 차후에 Poon에 의해 연구된 광학 전달 함수도 활용되었다 [9,10].

본 논문의 2장에서는 해석신호의 함수를 정의하고, 힐버트 변환을 통해 수식화하는 것을 목표로 한다. 3장에서는 간단하게 two-pupil 시스템에 대해 논의하고, 힐버트 변환이 본 연구에 도움이 될 수 있는지를 확인한다. 4장에서는 힐버트 변환을 얻기 위해 고안된 pupil 디자인에 대해 분석하고, 5장에서는 2차원 시뮬레이션을 통해 그 결과를 확인한다. 6장에서는 결론을 도출하고 이 논문을 마무리 짓는다.

II. 해석 신호와 힐버트 변환

실수 함수 $f(x)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 정의된다 [11].

$$F\{g(x)\} = G(k_x) \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(jk_x x) dx$$

여기에서 x 와 k_x 는 푸리에 변환의 변수들이다. 이를 적분하면

$$g_a^+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(k_x) \exp(-jk_x x) dk_x \quad (2)$$

$g(x)$ 에 관한 해석 신호로 표현 가능하다.

$$g_a^+(x) = 2 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(k_x) U(k_x) \exp(-jk_x x) dk_x \quad (3)$$

$$= 2F^{-1}\{G(k_x) U(k_x)\}$$

또한 $g_a^+(x)$ 는 푸리에 역변환으로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

아래의 $U(k_x)$ 는 단위 계단 함수이다.

$$U(k_x) = 1 \text{ for } k_x > 0 \text{ and} \quad (4)$$

$$U(k_x) = 0 \text{ for } k_x < 0$$

식 (2)에 주어진 해석 신호는 복소수으로써 식 (5)와 같이 표현 가능하다.

$$g_a^+(x) = g(x) - j\hat{g}(x) \quad (5)$$

식 (5)에서 $\hat{g}(x)$ 는 $g(x)$ 의 힐버트 변환이다.

$$\hat{g}(x) = H\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x')}{\pi(x-x')} dx' \quad (6)$$

식 (5)를 통해 정의한 $g_a^+(x)$ 의 실수부와 허수부를 분리하여 본래의 함수와 힐버트 변환의 관계를 간단하게 표현할 수 있다.

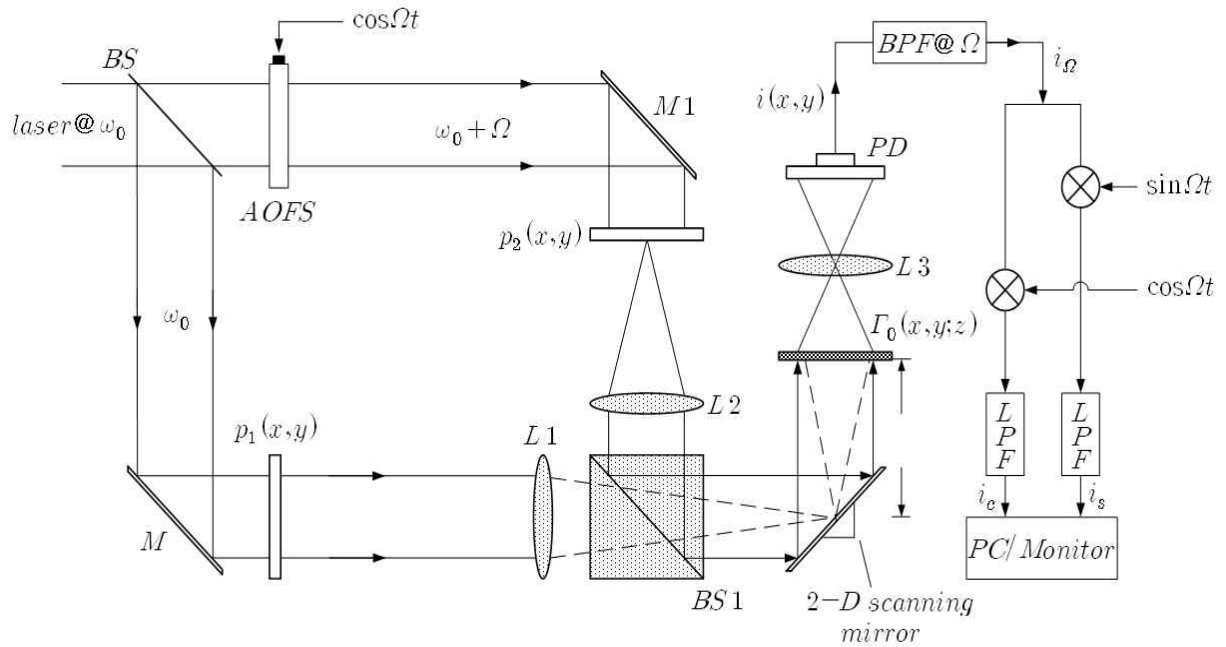


그림 1. Two-pupil 광학 헤테로다인 이미지 프로세서의 구조
 Fig. 1. Typical two-pupil optical heterodyne image processor

$$\begin{aligned} g(x) &= \text{Re}\{g_a^+(x)\} \\ \hat{g}(x) &= -\text{Im}\{g_a^+(x)\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\text{Re}\left[F^{-1}\{G(k_x)U(-k_x)\}\right] \\ \hat{g}(x) &= 2\text{Im}\left[F^{-1}\{G(k_x)U(-k_x)\}\right] \end{aligned} \quad (10)$$

식 (3)을 이용하여 식 (7)을 다시 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\text{Re}\left[F^{-1}\{G(k_x)U(k_x)\}\right] \\ \hat{g}(x) &= -2\text{Im}\left[F^{-1}\{G(k_x)U(k_x)\}\right] \end{aligned} \quad (8)$$

또한 음의 주파수 영역만을 포함한 해석 신호를 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} g_a^-(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 G(k_x) \exp(-jk_x x) dk_x \\ &= 2F^{-1}\{G(k_x)U(-k_x)\} \\ &= g(x) + j\hat{g}(x) \end{aligned} \quad (9)$$

그 신호는 다음과 같이 표현할 수 있으며, 식 (2)와 그 형태가 유사하다. 그리고 식 (9)의 $g_a^-(x)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

본 논문에서는 식 (10)에 기인하여 two-pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 시스템의 pupil을 디자인할 것이다.

III. Two-Pupil 옵티컬 헤테로다인 스캐닝 프로세서

그림 1은 Poon에 의해 고안된 전형적인 two-pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 이미지 프로세서를 보여준다 [9]. 다음은 two-pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 이미지 프로세서의 동작원리에 대한 설명이다.

빔스플리터 BS와 BS1, 미러 M과 M1은 Mach-Zehnder 간섭계를 바탕으로 구현하였다. Pupil $p_1(x,y)$ 은 임의의 주파수 ω_0 로 평행한 레이저를 비춘다. 또 다른 pupil $p_2(x,y)$ 는 임의의 주파수 $\omega_0 + \Omega$ 로 레이저를 비춘다. 레이저의 임의 주파수

오프셋 Ω 는 그림 1에서 보인 AOFS (Acousto-Optic Frequency Shifter)에 의해 생성된 것이다. 초점거리가 f 인 두 pupil은 렌즈 L1과 L2의 초점 평면의 전면부에 위치해 있다. 두 pupil은 2-D 광학 스캐너로 입사되는 광원의 초점을 맞추기 위해 렌즈 L1과 L2의 초점 평면 후면부에 위치한 빔스플리터 BS1에서 결합된다. 결합된 광학빔은 물체의 진폭 분포 $\Gamma_0(x, y; z)$ 로 스캔되어 두 렌즈의 초점 평면으로부터 z 만큼 떨어진 2-D 레스터에 사용된다. 렌즈 L3는 Photo-Detector(PD)로 전송되는 모든 빛 (물체로부터 확산 후 반사되어 발생한 산란광 포함)을 규합하고, 그 출력은 $i(x, y)$ 로 표현한다. 또한, $i(x, y)$ 는 헤테로다인 주파수 Ω 로 조절된 전자 대역통과필터(BPF)를 통과하여 그 출력으로 $i_\Omega(x, y)$ 을 갖는다.

만약 빔의 스캐닝 속도가 v 라면 $i(x, y)$ 와 $i_\Omega(x, y)$, $x = x(t) = vt$ 와 $y = y(t) = vt$ 는 일정하다. $i_\Omega(x, y)$ 는 그림 1에서 보인 것과 같이 전기적 처리과정을 거쳐 두 출력 $i_c(x, y)$, $i_s(x, y)$ 을 나타내고 그 수식은 다음과 같이 표현된다 [12].

$$\begin{aligned} i_c(x, y) &= \text{Re} [F^{-1} \{F\{|\Gamma_0(x, y; z)|^2\} \cdot \text{OTF}_\Omega\}] \quad (11) \\ i_s(x, y) &= \text{Im} [F^{-1} \{F\{|\Gamma_0(x, y; z)|^2\} \cdot \text{OTF}_\Omega\}] \end{aligned}$$

여기서 $|\Gamma_0(x, y; z)|^2$ 는 물체 $\Gamma_0(x, y; z)$ 의 intensity 분포이고, OTF_Ω 는 빛의 파장수가 k_0 인 광학 시스템의 광학 전달 함수를 나타낸다 [9,12].

$$\begin{aligned} \text{OTF}_\Omega &= \exp \left[j \frac{z}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \right] \quad (12) \\ &\times \iint p_1^*(x', y') p_2 \left(x' + \frac{f}{k_0} k_x, y' + \frac{f}{k_0} k_y \right) \\ &\times \exp \left[j \frac{z}{f} (x' k_x + y' k_y) \right] dx' dy' \end{aligned}$$

식 (11)은 오직 인코히어런트 광학 시스템에서 프로세싱된 물체의 intensity와 이로 인한 시스템에 국한된다.

IV. Pupil 함수 디자인

식 (12)로 주어진 프로세싱 OTF의 적절한 수식적 변형을 통해 pupil의 함수 디자인을 할 수 있다. 여기서 주목할 점은 주어진 식 (11)과 식 (10)의 형태가 유사하다는 것이다. $|\Gamma_0(x, y; z)|^2$ 의 스펙트럼은 $G(k_x)$ 에 해당하고, 주어진 $U(-k_x)U(-k_y)$ 과 같이 OTF_Ω 에서 두 평면에서 $|\Gamma_0(x, y; z)|^2$ 의 힐버트 변환의 구현이 필요하다.

$p_2(x, y) = \delta(x, y)$ 와 $p_1(x, y) = U(x)U(y)$ 라 하고, 이를 바탕으로 pupil을 디자인하면 식 (12)의 OTF는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{OTF}_\Omega &= \exp \left[-j \frac{z}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \right] \quad (13) \\ &\cdot U(-k_x)U(-k_y) \end{aligned}$$

OTF는 $U(-k_x)U(-k_y)$ 에 의해 마스크되고, 그로 인해 4분할 필터링이 취해진다. 따라서 식 (11)로 표현된 OTF는 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{re}(x, y) &= \text{Re} [F^{-1} \{F\{|\Gamma_0|^2\} \cdot \exp \left[-j \frac{z}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \right] \cdot U(-k_x)U(-k_y)\}] \quad (14-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{im}(x, y) &= \text{Im} [F^{-1} \{F\{|\Gamma_0|^2\} \cdot \exp \left[-j \frac{z}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \right] \cdot U(-k_x)U(-k_y)\}] \quad (14-b) \end{aligned}$$

z 가 0이라면 주어진 식 (14)의 출력은 식 (10)과의 비교를 통해서 본래의 인코히어런트 물체의 분포 $|\Gamma_0(x, y; z)|^2$ 와 힐버트 변환의 복원을 나타낸다. z 가 0이 아니라면 식 (14-a), (14-b)는 2-D 컨볼루션 연산을 거쳐 공간 영역에서 식 (15-a)와 (15-b)로 각각 표현할 수 있다.

$$H_{re}(x,y) = |\Gamma_0(x,y;z)|^2 \quad (15-a)$$

$$\times \frac{k_0}{2\pi z} \sin\left[\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

$$+ H\{|\Gamma_0(x,y;z)|^2\}$$

$$\times \frac{k_0}{2\pi z} \cos\left[\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

$$H_{im}(x,y) = H\{|\Gamma_0(x,y;z)|^2\} \quad (15-b)$$

$$\times \frac{k_0}{2\pi z} \sin\left[\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

$$- |\Gamma_0(x,y;z)|^2$$

$$\times \frac{k_0}{2\pi z} \cos\left[\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

임의의 물체를 $f(x,y)$ 라면, $f(x,y) \times \sin\left[\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$ 는 광학 스캐닝 홀로그래피 (OSH) 환경에서 $f(x,y)$ 의 sine-FZP 홀로그램, $f(x,y) \times \cos\left[\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$ 는 $f(x,y)$ 의 cosine-FZP 홀로그램을 표현한다.

V. 모의실험 및 결과

그림 2와 3은 인코더러턴트 스캐닝을 통해 도출된 $|\Gamma_0(x,y;z)|^2$ 에 힐버트 변환을 취한 $H_{re}(x,y)$ 와 $H_{im}(x,y)$ 의 출력이다.

만약 복소홀로그램 $H_C(x,y)$ 를 $H_{re}(x,y) + jH_{im}(x,y)$ 과 같이 복원할 수 있다면 식 (16)을 유도할 수 있다.

$$H_C(x,y) = [-j|\Gamma_0(x,y;z)|^2 \quad (16)$$

$$+ H\{|\Gamma_0(x,y;z)|^2\}]$$

$$\times \exp\left[j\frac{k_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$$

식 (16)은 복소영역의 복소홀로그램으로써 $-j|\Gamma_0(x,y;z)|^2 + H\{|\Gamma_0(x,y;z)|^2\}$ 과 같이 해석할 수 있으며, 이 복소홀로그램은 컨볼루션 연산을 거침으로써 인코더러턴트 이미지의 디지털 복원이 가능하게 한다.

$$H_C(x,y) \times h(x,y;z) \quad (17)$$

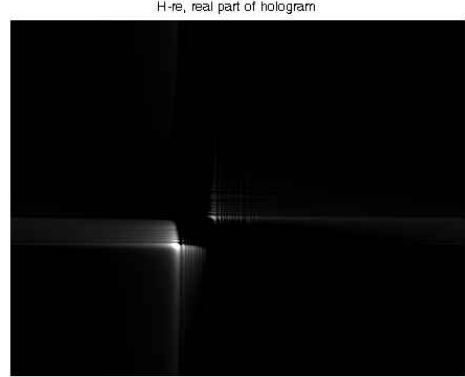


그림 2. 홀로그램의 실수부
Fig. 2. Real part of hologram



그림 3. 홀로그램의 허수부
Fig. 3. Image part of hologram

식 (17)에서의 전달 함수 $h(x,y;z)$ 는 $\frac{jk_0}{2\pi z} \exp\left[-\frac{jk_0}{2z}(x^2 + y^2)\right]$ 과 같고, 이는 디지털 복원을 위한 홀로그램 중 평판 파장 광원의 프레즈넬 회절이다.

그림 4와 5는 OTF합성 후 디자인한 pupil의 실수부와 허수부의 홀로그램을 디지털 복원한 결과이다. 디지털 복원 전 후의 실수부, 허수부의 홀로그램인 그림 2와 4, 그림 3과 5를 각각 비교하였을 때 공간영역에서의 홀로그램 표현이 보다 정확해짐을 알 수 있다. 그리고 힐버트 변환을 활용하여 sine-FZP 홀로그램과 cosine-FZP 홀로그램을 도출 후 조합한 복소홀로그램을 통해 실수부, 허수부 홀로그램의 선명도 또한 크게 개선됨을 확인할 수 있다.

H-re, real part of hologram using H-c

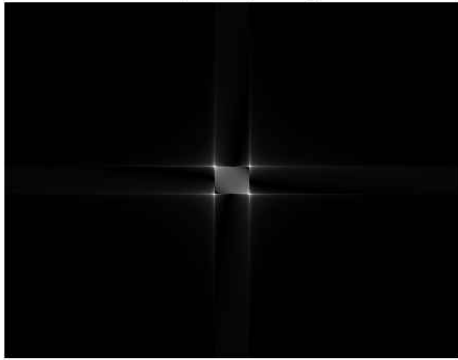


그림 4. 복소홀로그램을 활용한 홀로그램의 실수부
Fig. 4. Real part of hologram using H-c

H-im, imag part of hologram using H-c

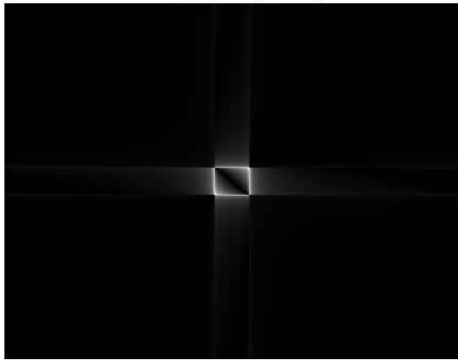


그림 5. 복소홀로그램을 활용한 홀로그램의 허수부
Fig. 5. Image part of hologram using H-c

VI. 결 론

본 논문에서는 지금까지 인코히어런트 물체의 힐버트 변환 추출을 바탕으로 pupil을 디자인하고 two-pupil 광학 헤테로다인 스캐닝 시스템을 수학적으로 분석하였다. 인코히어런트 이미징 시스템에 있어서 공간필터링된 일반적인 OTF 합성을 위해 해석 함수의 정의와 힐버트 변환을 활용하여 sine-FZP 홀로그램과 cosine-FZP 홀로그램을 도출할 수 있었다. 또한 이를 전자적으로 조합하여 복소홀로그램을 적용함으로써 공간 영역에서의 홀로그램 표현 성능이 개선되었기에, 인코히어런트 이미징에서 힐버트 변환의 활용이 효과적임을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] A. Sagan, S. Nowicki, R. Buczynski, M. Kowalczyk, and T. Szoplik, "Imaging phase objects with square-root, Foucault, and Hoffman real filters: a comparison," *Appl. Opt.* 42, 5816-5824 (2003).
- [2] A. W. Lohmann, E. Tepichin, and J. G. Ramirez, "Optical implementation of the fractional Hilbert transform for two-dimensional objects," *Appl. Opt.* 36, 6620-6626 (1997).
- [3] S. Lowenthal and Y. Belvaux, "Observation of phase objects by optically processed Hilbert transform," *Appl. Phys. Lett.* 11, 49-51 (1967).
- [4] R. Gale Wilson, "Wavefront-error evaluation by mathematical analysis of experimental Foucault-test data," *Appl. Opt.* 14, 2286-2297 (1975).
- [5] G. Cochran, "New method of making Fresnel transforms with incoherent light," *J. Opt. Soc. Am.* vol. 56, pp. 1513-1517 (1966).
- [6] A. W. Lohmann, "Incoherent optical processing of complex data," *Appl. Opt.* vol. 16, pp. 261-263 (1977).
- [7] S.-G. Kim, B. Lee, and E.-S. Kim, "Removal of bias and the conjugate image in incoherent on-axis triangular holography and real-time reconstruction of the complex hologram," *Appl. Opt.* vol. 36, no. 20, pp. 4784-4791 (1997).
- [8] T.-C. Poon and A. Korpel, "Optical transfer function of an acousto-optic heterodyning image processor," *Opt. Lett.* 4, 317-319 (1979).
- [9] T.-C. Poon, "Scanning holography and two-dimensional image processing by acousto-optic two-pupil synthesis," *J. Opt. Soc. Am.* 2, 521-527 (1985).
- [10] A. W. Lohmann and W. T. Rhodes, "Two-pupil synthesis of optical transfer function," *Appl. Opt.* vol. 17, no. 7, pp. 1141-1151 (1978).
- [11] T.-C. Poon and T. Kim, *Engineering Optics with MATLAB*, World Scientific (2006).
- [12] T.-C. Poon and T. Kim, "Optical image recognition of three-dimensional objects," *Appl. Opt.* 38, 370-381 (1999).

경민구 (慶旻九)



2010년 8월 : 한국항공대학교
정보통신공학과 (공학사)

2010년 9월 ~ 현재 : 한국항공
대학교 정보통신공학과 석사
과정

관심분야 : 광통신, 3-D 전자
홀로그램, 무선통신, 디지털
신호처리

도규봉 (都圭峯)



1988년 : 미국 Virginia Polytechnic
Institute & State Univ. 전기공학과
(공학사)

1992년 : 미국 Virginia Polytechnic
Institute & State Univ. 전기공학과
(공학석사)

1996년 : 미국 Virginia Polytechnic
Institute & State Univ. ~~전기공학과~~(공학박사)

1997년 3월 ~ 현재 : 한국항공대학교 항공전자 및 정보통신
공학부 교수

관심분야 : 광통신, 광 정보처리, 3-D 전자 홀로그램, 광센서