한국초등수학교육학회지 16(2) 295-320.
2012. 08. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 16(2) 295-320.
August 31. 2012.

분수의 나눗셈에 대한 학습자의 인지구조[1]

이영주[2] · 이광호[3] · 이효진[4]

본 연구는 분수의 나눗셈 학습 전에 어떠한 인지구조를 가지고 있으며 학습 후, 분수의 나눗셈 문제를 해결할 때 사전 인지구조에서 개념을 어떻게 연결하는지 알아보기 위해 초등학교 6학년 3명을 대상으로 임상면담을 실시하였다. 면담자료를 개념도로 구조화시켜서 분수의 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 드러나는 학생들의 사고 기제를 분석하였으며 이를 통해 분수의 나눗셈 지도에 대한 시사점을 제안하였다.

주제어: 분수의 나눗셈, 인지구조, 개념도

Ⅰ. 서　론

수학은 추상적인 학문이다. ‘추상’은 몇 개 또는 무한히 많은 사물의 공통성이나 본질을 추출하여 파악하는 사고 작용이다. 그리고 분류된 사물들의 공통적인 속성을 추상화하고 분류된 것들에 이름을 붙인다. 이러한 일련의 과정이 바로 개념(concept)이 형성되는 과정이며 수학자가 수학을 하는 과정이다. 그리고 이 개념들은 여러 가지 모양으로 결합하여 스키마(schema)라고 부르는 개념 구조를 형성하게 되는데, 이 스키마는 수학적 사고를 하는데 매우 중요한 역할을 한다.

수학의 여러 개념 중에서 분수는 현행 초등학교에서 학습하는 가장 복잡하고 중요한 개념 중이 하나이다. 특히 분수의 나눗셈은 분수 영역의 최상위 내용으로 비율에 의한 양의 비교와 같은 곱셈적 사고와 비례적 사고 및 역연산과 역수 개념을 다루면서 궁극적으로 대수적 사고를 개발할 수 있는 기회를 가질 수 있는 중요한 주제임에도 불구하고 여러 가지 지식을 복합적으로 이용해야 하기 때문에 개념적으로 이해하기 어려우며 결과적으로 가르치기 어려운 것으로 인식되어 왔다(Flores, 2002; Ma, 1999) 분수의 나눗셈에 대한 학생들의 이해가 부족하며(김경미, 황우형, 2011, 2012; 김민경, 2009; 방정숙, 이지영, 2009b) 예비교사의 20% 정도가 분수의 나눗셈이 가지는 기본적인 의미를 이해하지 못하고 있다(방정숙, Li, 2008)는 연구 결과가 그것을 확인시켜준다.

Howard(1987)에 의하면 이해한다는 것은 자료에 적합한 스키마를 선택하는 것이라고 말하고 있다. 반대로 우리가 어떤 개념을 이해할 수 없다는 것은 적절한 스키마를 갖지 못했

---

1) 본 논문은 이영주의 석사논문을 요약한 것임.
2) 대구 죽전초등학교
3) [교신저자] 한국교원대학교 수학교육과
4) 강원도 근화초등학교

을 때, 스키마는 있지만 그것을 불러낼 수 있는 적절한 단서를 갖지 못했을 때, 그리고 잘못된 스키마를 가지고 이해하려고 할 때 일어난다. 이에 비추어 본다면 분수 나눗셈을 의미 있게 이해하지 못하는 학생들은 분수 나눗셈 학습에 필요한 사전 개념에 대해 적절한 스키마를 갖지 못했거나, 스키마는 있지만 그것을 불러낼 수 있는 적절한 단서를 갖지 못했거나, 잘못된 스키마를 가지고 이해하려고 하기 때문일 것이다. 또한 새로운 지식을 받아들이는데 부적절한 기존의 인지 구조에 대하여 조절작용을 가해야 하나 기존의 인지 구조의 변화는 쉽게 일어나지 않기 때문에(김미영, 백석윤, 2010) 학생들이 기존에 어떠한 인지구조를 가지고 있는지를 파악하는 것은 중요하다.

본 연구에서는 분수의 나눗셈 학습을 하기 전에 학생들이 분수의 나눗셈 학습에 필요한 사전개념에 대해 어떤 인지구조를 가지고 있으며 분수의 나눗셈 학습 후에 분수의 나눗셈을 해결할 때 사전 개념을 어떻게 연결하는지를 개별 면담을 통해 알아봄으로써 분수의 나눗셈 지도 방법이나 내용에 대한 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 인지적 구성주의와 인지구조

인지적 구성주의 입장에서 이 세상은 객관적으로 존재하고 학습자에 의해 발견되는 것이 아니라, 학습자 개인의 경험에 의해 주관적으로 구성된다. 같은 맥락에서 지식은 객관적으로 존재하기 때문에 학습자가 그대로 수용해야 할 대상이 아니라 학습 개개인의 인지구조 속에서 재구성되고 재조직되어야 할 대상이다. 즉 인지적 구성주의 입장에서 ‘이해’란 단순히 정확하거나 빠른 대답이 아니라 여러 영역의 지식을 의미 있게 상호 연결시킬 수 있는 것을 의미하고 ‘학습’은 이해를 통한 학습자의 인지구조 변화를 초래하는 과정을 의미한다. 이러한 인지구조를 심리학자들은 ‘스키마(schema)’ 라고 부른다.

스키마란 기억 속에 저장되어 있는 포괄적인 개념들을 표상하기 위해 조직화된 사전 지식으로 이루어져 있는 인지구조이다(Rumelhart, 1976). 스키마는 어떤 개념과 관련된 정보를 망으로 구성한다. 따라서 우리는 우리의 지식을 스키마, 즉 관념의 망으로 조직한다(Cornbleth, 1985). 스키마는 우리 머리 안에 있는 지식에 대한 정신적 표상이라 할 수 있다. 이러한 스키마는 마디(nodes:개념, 사건, 대상들)와 고리(links:마디사이의 관계)로 이루어진 망이나 맵으로서 대개 묘사되는 수정 가능한 정보 구조이다.

스키마에 대한 정의는 학자마다 약간의 차이를 보이고 있으나, 스키마는 기억 속에 저장된 발생적 개념을 표상하기 위해 이용되는 추론적인 인지구조라는 데는 공통적으로 동의하고 있다. 그것은 들어오는 정보를 해석하고 장기기억 속에서 정보를 회수하고 정보와 행위를 통합된 유의미한 망으로 조직할 때 활성화된다. 즉 스키마는 선언적 지식의 조직적 표상 이상의 것, 절차적 지식을 의미한다. 따라서 스키마는 추론과 비판적 사고에 중요한 역할을 한다.

Howard(1987)는 스키마의 역할로 지각, 이해, 기억, 학습의 기능을 이야기하는데 이와 비슷하게 Rumelhart(1980)도 스키마의 역할을 세 가지로 이야기한다. 첫째, 스키마는 구두담론이나 서술담론을 이해하도록 돕는 기능을 한다. 우리는 이미 알고 있는 것(스키마)에 비추어 새로운 경험을 이해하려고 시도한다. 의미는 교재나 상황에 있는 것이 아니라 개개인이 그것과 상호작용 함으로써 형성된다. 이해는 특수한 교재나 상황에 대한 표상과

해석을 안내하기 위해 어떤 스키마를 선택하고 입증하는 것을 의미한다. 그때 채택된 스키마는 그 상황에 대한 해석을 형성한다. 이것을 이해하지 못하는 것은 개개인이 그 레퍼토리에 대한 적절한 스키마가 없거나 또는 적절한 스키마를 소유하고 있지만 들어오는 정보와 기존의 스키마와의 연관성을 자극하는 단서가 없거나, 아니면 그 정보에 대해 적절하지 못한 스키마 접근으로 잘못된 해석을 하게 될 때이다. 둘째, 스키마는 새로운 정보를 학습하고 기억을 촉진하는 기능을 한다. 그것은 기존의 스키마 내에 점진적으로 정보를 축적하고, 실제적인 정보와 가장 잘 어울리게 하기 위해 기존의 스키마를 조정하고, 그리고 기존의 스키마가 적합하지 못할 때 새로운 스키마를 창조하는 기능을 한다. 셋째, 스키마는 문제를 해결하고 어떤 유형의 문제에 대한 지식(절차에 대한 지식)을 저장하고 그 문제가 무엇인지에 대한 이해나 표상을 할 때 작용한다.

2. 인지구조의 검사 도구로서의 개념도

오늘날 인지구조에 관한 연구들이 해결되어야 할 주요 과제는 인지구조(스키마)의 표준평가 체제를 개발하는데 있다. 스키마를 측정하는 것은 우리가 무엇을 알고 있는가를 파악하려는 것이지, 하나의 옳은 정답을 평가하려는 것은 아니다. 우리들 각자가 공통적인 지식을 공유한다고 할지라도, 각자 알고 있는 것과 그것을 표상하는 방법은 개별적이다. 따라서 스키마를 측정하는 방법은 전통적인 측정과는 아주 다르다고 할 수 있다.

스키마를 검사할 수 있는 방법으로 개념도(concept map)가 많이 알려졌다. 왜냐하면 스키마는 어떤 지식 영역 안에서 개념들 사이의 관계를 시각적으로 기술하는 일종의 그림으로 가장 잘 묘사될 수 있기 때문이다. Novak과 Gowin(1984)에 의하면 개념도는 최상부에는 가장 포괄적이고 추상적인 개념으로 그 밑으로는 더 구체적인 개념들로 이루어지는 위계적 구조뿐만 아니라 동급수준에서 개념들 간의 수평적인 조직 등 다양하게 개념간의 상호관계를 조직해 가는 과정이다. 그런 면에서 개념도는 정적이지 않고 역동적이다. 주제가 변함에 따라서 상위개념과 하위개념들의 관계가 변할 수 있다. 학습자의 이해력이 증가되고 새로운 지식이 습득됨에 따라 개념도는 달라질 것이다.

그동안 인지구조 분석도구로서의 개념도는 비전문가와 전문가의 인지구조의 차이, 학습자가 구성한 개념도와 교수자, 혹은 다른 전문가가 구성한 개념도와의 차이를 연구하는 수단으로 사용되거나 학습과정에서 시점을 달리하여 학습자 스스로 구성한 개념도로 학습자의 인지구조 변화를 탐색하는 수단으로 사용되었다(허인숙, 2001, 2002). 이러한 선행연구들은 개념도의 전체 형태에만 관심을 갖고 다른 것과 비교하는 수단으로 개념도를 활용하였다. 정작 개념도 내부가 어떻게 구성되어 있는지를 구체적으로 분석한 연구는 극히 드물다.

3. 분수의 나눗셈과 관련된 개념

분수의 나눗셈 문제해결에 영향을 주는 인지구조를 파악하기 위하여 분수의 나눗셈과 관련된 개념으로 나눗셈, 분수, 분수의 연산에 대해서 논하고자 한다.

가. 나눗셈

나눗셈은 일반적으로 등분제와 포함제로 구분한다. 등분제는 원래 집합의 크기와 부분 집합의 수가 제시되어 있다. 문제는 부분 집합의 크기를 구하는 것이다. 포함제는 동수누

감으로 설명한다면 ‘8을 2로 몇 번 뺄 수 있는가?’ 또는 ‘사과 8개를 2개씩 몇 번 뺄 수 있는가?’로 나타낼 수 있고 곱의 의미를 생각한다면 ‘8속에 2가 몇 번 포함되어 있는가?’ 또는 ‘8은 2의 몇 배인가?’로 나타낼 수 있다. 포함제 나눗셈 상황에서는 원래 집합의 크기와 측정 단위의 크기가 제시되어 있다. 문제는 단위의 수를 구하는 것으로 측정하는 상황과 관련된다고 할 수 있다.

나. 분수

분수의 의미는 일반적으로 전체-부분, 측도, 몫, 비, 연산자의 의미로 나눈다. 전체-부분의 의미는 분수 개념에서 가장 기초적이고 중요한 개념이며 분수 개념을 도입할 때 가장 자연스러운 방법으로 여겨지고 있다. 전체에 대한 부분을 분수 기호로 나타내는 능력은 연속량이나 이산량을 같은 크기를 갖는 부분이나 집합으로 분할하는 능력과 관련되고, 이것은 나중에 분수를 읽는데 중요한 역할을 한다. 측도의 의미는 어떤 주어진 양을 측정할 때 단위의 자연수 배만큼 재고 남는 부분을 재기 위해서는 처음에 재었던 단위보다 더 작은 단위가 필요한데, 이 때 분수가 사용된다. 이산량에 대해서도 연속량과 같은 방법으로 측정할 수 있다. 몫의 의미는 분수는 나눗셈의 결과로 피제수를 제수로 나누었을 때 나누어떨어지지 않고 나머지가 발생할 경우 그 결과를 몫으로 나타내기 위해 수를 확장시킨 것이다. 즉, $\frac{a}{b}$=a÷b의 의미로 나타낼 수 있다. 비의 의미는 기준에 대한 부분의 상대적인 크기를 나타내는 것으로 실제 크기가 다르더라도 상대적인 크기가 $\frac{1}{3}$과 같다고 생각할 수 있을 때 비의 의미의 분수를 이해했다고 볼 수 있다. 연산자의 의미는 하나의 집합을 다른 집합으로 보내는 사상으로 연산자가 1보다 작을 경우 새로운 집합의 크기는 원래 집합의 크기보다 축소되고 연산자가 1보다 클 경우 새로운 집합의 크기는 원래 집합의 크기보다 확대된다.

다. 분수의 연산

분수의 연산은 초등학교 고학년의 핵심 내용일 뿐만 아니라 초등학생들이 개념적으로 이해하기 어려워하는 대표적인 부분으로 많은 학생들이 알고리즘을 바탕으로 분수 연산을 정확하게 수행하는 반면 연산의 저변에 깔려 있는 원리는 제대로 이해하지 못하는 경우가 많다(방정숙, 이지영, 2009a). 분수의 연산을 크게 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈으로 나누어볼 수 있다. 분수의 덧셈과 뺄셈은 자연수의 경우에서와 마찬가지로 분수의 덧셈에서는 첨가와 합병, 분수의 뺄셈에서는 비교와 제거 상황이 있다. 자연수의 덧셈과 뺄셈 상황과 동일하기 때문에 다른 분수의 연산에 비하여 쉽게 인식할 수 있다. 문제는 주어진 덧셈, 뺄셈 상황의 결과를 어떻게 나타내는가 하는 것이다. 자연수의 경우에 더해지거나 빼지는 단위는 수 자체의 자릿값에 의해 결정되기 때문에 세어서 간단히 해결되지만 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 더해지거나 빼지는 단위가 분모에 의해 결정되고 같은 단위에서 더하고 빼야 하기 때문에, 특히 동치 분수에 대한 이해가 필요하다. 학생들은 먼저 단위가 무엇인지 잘 찾지는 못하더라도 크기가 같은 단위를 더하거나 빼야 한다는 것을 깨달아야 한다.

분수의 곱셈이 가지는 의미는 자연수의 곱셈이 가지는 의미와 약간의 차이가 있다. 분수의 곱셈은 동치묶음과 곱셈적 비교로 구분(Xin, 2008)하기도 하고 부분 중의 부분, 곱셈

적 비교, 비율, 동치묶음, 직사각형의 넓이로 구분(김경미, 황우형, 2011)하기도 한다. 본 연구에서는 초등학교 5학년 분수의 곱셈단원에서 많이 나타나는 부분 중의 부분, 동치묶음, 직사각형의 넓이로 구분하였다. 부분 중의 부분은 도서관 책의 $\frac{2}{3}$는 아동 도서이고 그 중에서 $\frac{1}{4}$은 동화책이라고 할 때, 동화책은 도서관에 있는 책 전체의 몇 분의 몇인지를 묻는 문제와 같이 전체 집합의 부분에서 부분을 찾는 방법이다. 동치묶음은 한 사람에게 피자 한 판의 $\frac{3}{8}$씩 나누어 주려고 하는데 16명에게 나누어 주려면 피자는 모두 몇 판 필요한지를 묻는 문제로 자연수의 곱셈에서 자주 등장하는 상황이다. 직사각형의 넓이는 가로 9cm, 세로$3\frac{5}{6}$cm인 직사각형 모양의 색종이 넓이를 구하는 문제로 직사각형의 넓이를 통해 분수의 곱셈을 지도하는 것이다.

분수의 나눗셈을 구분은 연구자들마다 표현상의 차이가 있지만 일반적으로 포함제, 등분제, 단위 비율의 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역의 다섯 가지 유형으로 구분한다(박교식, 송상헌, 임재훈, 2004; Sinicrope, Mick & Kolb, 2002). 포함제는 한 수에 다른 수가 몇 번 포함되는지 또는 몇 번 들어가는지를 묻는 경우로 '물이 $1\frac{3}{4}$L 있습니다. 한 사람이 $\frac{1}{2}$L씩 마신다면 모두 몇 사람이 마실 수 있습니까?' 와 같이 몫이 이산량으로 주어지는 경우, 분수의 해는 인정할 수 없음을 염두에 두어야 한다. 등분제는 '사과가 $\frac{1}{2}$개를 4 사람이 똑같이 나누어 먹는다면 한 사람은 몇 조각씩 먹을 수 있을까?' 와 같이 주어진 양을 그 양과는 다른 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. 단위 비율 결정은 '무게가 $1\frac{3}{4}$kg인 철봉의 길이가 $\frac{1}{2}$m일 때, 이 철봉의 1m의 무게는 몇 kg인가?' 와 같이 불특정한 비율(분수)로 주어진 값을 기본 단위에 해당하는 값으로 환산한 양을 구하는 경우다. 곱셈의 역은 뺄셈이 덧셈의 역연산인 것처럼 나눗셈은 곱셈의 역연산임을 이용하는 것으로 '피자를 좋아하는 학생은 48명은 샐러드를 좋아하는 학생 수의 $1\frac{1}{2}$배라고 할 때, 샐러드를 좋아하는 학생은 몇 명인가?(Sinicrope, Mick & Kolb, 2002)' 와 같은 문제가 이에 해당된다. 카테시안 곱의 역은 '넓이가 $1\frac{3}{4}$㎡인 직사각형의 가로의 길이가 $\frac{1}{2}$m 일 때, 세로의 길이는 몇 m인가?(박교식, 송상헌, 임재훈, 2004)' 의 경우가 이에 해당한다. 직사각형의 넓이를 나타내기 위한 상황 외에도, 밑넓이와 높이의 관계를 통해 부피를 구하는 상황, 농도 등이 카테시안 곱의 역 상황으로 제시될 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구방법 및 대상

본 연구는 눈으로 직접 관찰가능하지 않은 학생들의 인지구조를 분석하는 연구로써 학생들의 인지구조를 간접적으로 관찰하기 위해 임상면담을 활용한 질적 사례연구방법으로 연구를 진행하였다.

임상면담은 연구자가 몇 가지 기본적인 질문으로 시작하지만 피면담자가 말한 것에 대한 반응을 바탕으로 원래의 질문을 수정하고, 후속 질문을 하고, 다양한 문제를 어떻게 풀었는지 또한 특정한 진술과 응답이 무슨 뜻인지 물어볼 수 있기 때문에(Ginsburg, 1997) 학생들의 사고를 자세히 분석하는데 유용하다.

본 연구의 연구대상은 <표 1>에서와 같이 대구광역시에 소재한 C 초등학교 6학년 1개반 학생들(25명) 중 3월에 실시한 수학 교과학습 진단평가에서 100점을 받은 5명을 1차 선발하고 학생들의 반응을 고려하여 최종적으로 3명을 선정하였다.

<표 1> 연구대상

학생	학년	성별	학업성취도	특징
Y	6	여	상	자신의 의견을 말로 풍부하게 표현할 수 있음.
M	6	여	상	
W	6	남	상	

2. 면담

본 연구는 분수 나눗셈 학습 전과 후에 학생들이 이해하고 있는 개념들의 연결망을 그려 학생들의 인지구조를 분석하는 연구로써 면담은 크게 6학년 분수의 나눗셈 학습 전에 실시한 1차면담과 2007 개정 6학년 수학과 지도서에 근거하여 교과시간에 이루어지는 분수의 나눗셈 학습 후 실시한 2차면담으로 나누어 이루어졌다.

연구자가 작성한 면담 문항이 연구검사 도구로 적절한지 알아보기 위하여 2011년 2월 10일부터 2월 24일까지 대구광역시에 소재한 C초등학교 5학년(예비 6학년) 학생 2명을 대상으로 분수 나눗셈 학습 전에 학생들이 갖고 있는 개념에 대해 면담하고 인지구조(개념들간의 연결망)를 분석하는 예비 연구를 실시하였다. 이 과정에서 초안으로 작성한 면담내용의 오류를 수정하고 수학교육 전문가의 조언을 통하여 면담내용을 확정하였다.

가. 1차면담

1차면담은 분수의 나눗셈 문제해결에 영향을 주는 나눗셈, 분수, 분수의 연산으로 구분하여 면담준거를 설정하였다(<표 2>).

<표 2> 1차면담 항목 및 면담준거

<table>
<tr><th colspan="3">1차면담 항목</th><th colspan="2">면담준거</th></tr>
<tr><td rowspan="4">나눗셈</td><td colspan="2" rowspan="2">몫이 자연수인 나눗셈</td><td colspan="2">등분제</td></tr>
<tr><td colspan="2">포함제</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">몫이 분수인 나눗셈</td><td colspan="2">등분제</td></tr>
<tr><td colspan="2">포함제</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="6">분수</td><td rowspan="2">전체-부분의 관계</td><td>전체가 1인 연속량</td></tr>
<tr><td>이산량과 1이 아닌 연속량</td></tr>
<tr><td colspan="2">비의 의미</td></tr>
<tr><td colspan="2">연산자의 의미</td></tr>
<tr><td colspan="2">몫의 의미</td></tr>
<tr><td colspan="2">측도의 의미</td></tr>
<tr><td rowspan="11">분수의 연산</td><td rowspan="4">분수의 덧셈</td><td rowspan="2">동분모 분수의 덧셈</td><td colspan="2">첨가</td></tr>
<tr><td colspan="2">합병</td></tr>
<tr><td rowspan="2">이분모 분수의 덧셈</td><td colspan="2">첨가</td></tr>
<tr><td colspan="2">합병</td></tr>
<tr><td rowspan="4">분수의 뺄셈</td><td rowspan="2">동분모 분수의 뺄셈</td><td colspan="2">구잔</td></tr>
<tr><td colspan="2">비교</td></tr>
<tr><td rowspan="2">이분모 분수의 뺄셈</td><td colspan="2">구잔</td></tr>
<tr><td colspan="2">비교</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">분수의 곱셈</td><td colspan="2">동치묶음</td></tr>
<tr><td colspan="2">부분 중의 부분</td></tr>
<tr><td colspan="2">직사각형의 넓이</td></tr>
</table>

나눗셈 개념에 대한 구체적인 면담문항은 나눗셈을 지도하는 2학년과 3학년 교과서 문항과 존 반 드 월르의 ‘수학을 어떻게 가르칠 것인가’ 중 10장 ‘연산의 의미’ 에서 곱셈과 나눗셈 지도 활동지를 수정하여 구성하였다. 분수 개념에 대한 면담문항은 김경미, 황우형(2009)의 ‘분수의 하위개념 이해가 문제해결에 미치는 영향’의 평가지를 활용하여 면담 내용을 구성하였다. 분수의 연산에 대한 면담문항은 분수 연산을 지도하는 4학년과 5학년 교과서 문항과 존 반 드 월르의 ‘수학을 어떻게 가르칠 것인가’ 중 ‘ 16장 분수의 연산’에서 분수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈 상황을 수정하여 구성하였다.

나. 2차면담

2차면담은 6학년 분수의 나눗셈에 관련된 것으로만 이루어졌으며 <표 3>과 같이 면담준거 및 내용을 설정하였다.

<표 3> 2차면담 항목 및 면담준거

2차면담 항목	면담준거
분수의 나눗셈	포함제
	등분제
	단위 비율의 결정
	곱셈의 역
	카테시안 곱의 역

분수의 나눗셈 개념에 대한 구체적인 면담문항은 방정숙, 이지영(2009)의 '사례 연구를 통한 분수 나눗셈 연산 감각 분석' 의 면담내용 및 면담 과제를 활용하였다.

3. 인지구조 표현

본 연구에서도 학생들의 인지구조를 분석하기 위해서 면담한 결과를 바탕으로 학생이 이해하고 있는 개념과 개념들 간의 연결망을 그림으로 표현한다. Jonassen, Beissner & Yacci(1993) 이 제시한 개념도 작성과정을 참고하여 연결망을 그리는 과정을 다음과 같이 설정하였다.

① 가장 중요하고 포괄적인 개념을 가지고 시작한다. 종이에 그 개념 단어를 쓰고 그것 둘레에 사각형을 그린다. 다른 중심 개념들과의 구분을 위해 음영처리를 한다.
② 학생이 문제를 해결하면서 첫 번째 개념과 연결 지어 생각하는 두 번째 개념을 종이에 쓰고 사각형을 그린다. 두 개념 사이에 선을 그린다. 두 번째 개념을 바르게 이해하고 있고 이것을 첫 번째 개념과 연결 지어 생각하고 있다면 실선으로 연결하고, 두 번째 개념에 대한 부족하거나 잘못된 이해를 바탕으로 첫 번째 개념과 연결 지어 생각하고 있거나 적절하지 못한 개념의 연결일 경우는 점선으로 연결한다.
③ 학생이 이해하고 있는 또 다른 개념을 종이에 쓰고 그것에 사각형을 그린다. 세 번째 개념이 첫 번째 개념과 두 번째 개념 중 어느 것과 관련지어 생각하는지 면담 결과를 바탕으로 판단한다. 연결 지어 생각하는 개념들 각각 사이에 실선 또는 점선을 그린다.
④ 중심 개념인 분수, 나눗셈, 분수의 덧셈, 분수의 뺄셈, 분수의 곱셈, 분수의 나눗셈 순으로 개념의 기호를 각각 A, B, C, D, E, F 순으로 붙이고 각각의 하위 개념은 기호 뒤에 숫자를 붙여 표현한다.
⑤ 학생이 갖고 있는 개념 모두가 포함될 때까지 이 과정을 계속한다.
⑥ 전체적인 연결망의 조직을 점검한다. 개념도가 혼란스러운 것 같다면 혼란을 최소화하기 위해 연결망을 다시 수정하지만 관계를 묘사했던 모든 선은 보유한다.

Ⅳ. 연구결과

1. 분수의 나눗셈 학습 전, 학생들의 인지구조

나눗셈, 분수, 분수의 연산에 관한 1차면담 자료를 분석한 결과는 다른 개념과 연결되지 않는 분수의 의미에 대한 면담자료 분석 결과를 우선 진술하고 나눗셈, 분수의 연산 순서로 연구 결과를 진술하였다.

가. 분수와 관련된 사전 연결망

분수의 의미와 관련된 문제를 해결하게 하고 왜 그렇게 해결했는지 설명을 요구하여 학생들의 이해정도를 파악하여 분수에 대한 개념도를 그려보았다.

전체-부분의 의미를 이해하고 있는지 알아보기 위해 크기와 모양이 다른 두 도형의 $\frac{2}{4}$ 만큼 색칠해보라고 한 후 둘 다 $\frac{2}{4}$인데 왜 색칠된 크기가 서로 다른지 설명해보라고 하자 세 학생의 표현의 차이는 있었지만 공통적으로 '기준량이 달라서'라고 설명했다. 색칠된 크기가 서로 다른데 어떻게 둘 다 $\frac{2}{4}$라고 할 수 있느냐는 질문에 '둘 다 4개로 나눈 것 중에서 2개니까요' 라고 설명하며 분수의 '전체-부분의 의미'와 연결 지어 생각했다.

비의 의미를 이해하고 있는지 알아보기 위해 10과 15를 비교하는 문제를 제시하자 10과 15를 둘 다 5개씩 묶으면 각각 2묶음, 3묶음이 나오므로 10은 15의 $\frac{2}{3}$라고 설명하였다. 또한 자연수가 아닌 분수로 표현된 두 양을 비교하는데 있어서도 큰 어려움 없이 $\frac{2}{3}$와 $1\frac{2}{3}$를 비교하기 위하여 $1\frac{2}{3}$를 $\frac{2}{3}$씩 등분한 후 $\frac{2}{3}$가 2번 들어가고 $\frac{2}{3}$의 절반이 남은 것을 확인 후 $1\frac{2}{3}$는 $\frac{2}{3}$의 $2\frac{1}{2}$이라고 설명했다. 역으로 $\frac{2}{3}$가 $1\frac{2}{3}$의 얼마인지 질문하자 두 분수를 그림으로 나타낸 후 $1\frac{2}{3}$를 전체로 보고 $\frac{2}{3}$는 $1\frac{2}{3}$를 5등분 한 것 중에 2와 같다고 설명했다. 이를 통해 세 명의 학생 모두 두 양을 비교하는데 있어서 기준에 대한 부분의 상대적인 크기를 분수로 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있었다.

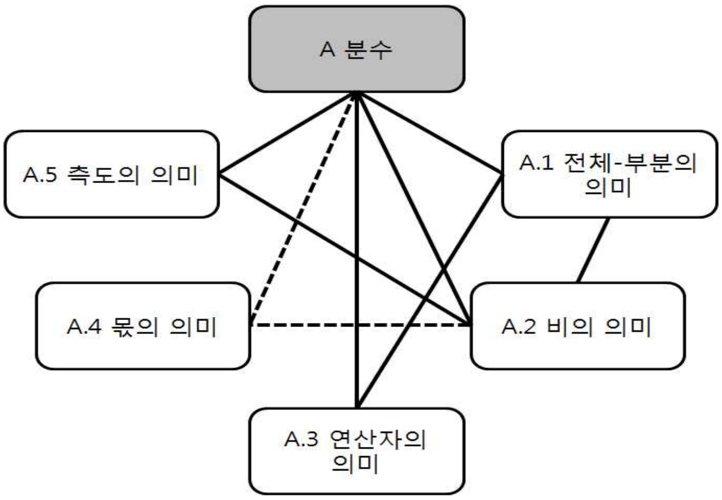
연산자의 의미를 이해하고 있는지 알아보기 위해 철사 12m의 $\frac{2}{3}$를 구하는 문제를 제시하자 12m를 전체로 봤을 때 그것을 3묶음 한 것 중에서 2라고 설명하며 12m의 $\frac{2}{3}$는 8m라고 답했다. 이를 통해 3명의 학생 모두 분수의 연산자의 의미를 이해하고 있다는 것을 알 수 있었다.

몫의 의미를 이해하고 있는지 알아보기 위해 $8 \div 3$ 문제를 제시하자 식으로 구할 때는 '$8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$' 의 과정을 거쳐 몫이 $2\frac{2}{3}$임을 잘 구해 냈다. 하지만 그렇게 생각한 까닭

을 그림을 이용하여 다시 설명해 보도록 요구하자 8에서 3의 배수만큼 뺀 나머지 2를 다시 3등분하여 $\frac{2}{3}$가 아닌 $\frac{1}{3}$로 생각하는 오류를 보였다. 세 명의 학생은 무엇을 기준량으로 놓아야할지 찾지 못하고 혼란스러워하는 것을 통해 몫의 의미를 잘 이해하고 있지 않으며 이 때 비의 의미와도 잘 연결되지 않고 있음을 알 수 있었다.

측도의 의미를 이해하고 있는지 알아보기 위해 단위 길이로 막대 길이를 측정하는 과제를 제시하자 학생 W는 막대에서 단위의 자연수 배만큼 재고 남는 부분을 오려서 3등분하여 접은 후 그것이 단위 안에 4번 들어감을 확인하는 조작 활동을 통해, 막대를 3등분한 것이 단위 안에 4번 들어갈 수 있으므로 막대가 단위의 '$\frac{3}{4}$' 이라고 표현했다. 학생 M과 학생 Y는 어떤 막대의 길이를 재기 위해 단위를 반복적으로 사용하여 단위의 자연수 배만큼 재고 남는 부분을 재기 위해서 처음에 재었던 단위보다 더 작은 단위로 나누어 막대의 길이를 재었다. 이를 통해 3명의 학생은 측도의 의미를 잘 이해하고 있음을 알 수 있다.

위 면담결과를 종합한 결과 세 명의 학생들이 가지고 있는 분수의 의미에 대한 연결망은 [그림 1]과 같다. 각각의 분수의 의미들은 다른 분수의 의미와 연결되어 있는 것을 관찰할 수 있다. 주목할 것은 비의 의미 자체에 대한 이해는 잘 하고 있는 학생들이 몫의 의미와 연결될 때는 비의 의미에 대한 이해가 정확하지 않았다는 것이다. 분수의 의미에 대한 지도는 분수의 의미 각각을 구분하여 지도하더라도 관련이 되는 분수의 의미와 연결하여 지도함으로써 서로 유기적으로 연결될 수 있도록 지도할 필요가 있으며 특히 몫의 의미와 비의 의미를 함께 지도하는 것이 중요함을 알 수 있다.

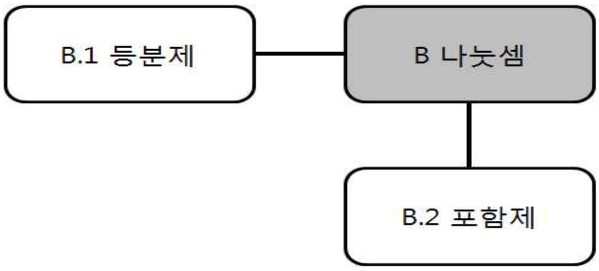


[그림 1] 분수의 의미에 대한 학생들의 연결망

나. 나눗셈과 관련된 사전 연결망

나눗셈은 몫이 자연수인 나눗셈과 몫이 분수인 나눗셈으로 구분하여 면담을 진행하였다. 몫이 자연수인 나눗셈 문제를 잘 해결할 수 있는지 알아보기 위해 공깃돌 20개를 5명에게 똑같이 나눠주는 등분제 상황과 장미 20송이를 화병 1개에 5송이씩 꽂으려고 할 때

필요한 화병의 개수를 구하는 포함제 상황을 제시한 결과, 세 명의 학생 모두 정확한 답을 구할 수 있을 뿐만 아니라 몫을 ‘한 명이 가질 수 있는 공깃돌의 개수’ 및 ‘묶음의 수’로 잘 설명하였다. 몫이 자연수인 나눗셈에서의 학생들의 연결망을 그려보면 [그림 2]와 같다.



[그림 2] 몫이 자연수인 나눗셈에서의 학생들의 연결망

몫이 분수인 나눗셈 문제를 잘 해결할 수 있는지 알아보기 위해 8L 우유를 3사람에게 나누어줄 때, 한 사람이 마시게 되는 우유의 양을 구하는 피제수가 자연수인 등분제 상황, $3\frac{1}{2}$m짜리 색테이프를 4사람에게 똑같이 나누어 주려고 할 때, 한 사람에게 돌아가는 테이프의 길이를 구하는 피제수가 분수인 등분제 상황, 한 시간에 6km를 걷는 속도로 13km를 걷는데 걸린 시간을 구하는 문제와 한 시간에 4km를 걷는 속도로 $9\frac{1}{2}$km를 걷는데 걸린 시간을 구하는 포함제 상황을 제시하였다. 피제수가 자연수인 등분제 상황에서 세 명의 학생 모두 식을 만들어 계산한 후에는 몫이 $2\frac{2}{3}$임을 잘 구해 냈지만 그렇게 생각한 까닭을 그림을 이용하여 다시 설명해보도록 요구했을 때, 8L를 3사람에게 2L씩 나눠주고 남은 2L를 다시 3등분하면서 그 양을 $\frac{1}{3}$L로 생각하는 오류를 보였다.

피제수가 분수인 등분제 상황에서 학생M과 W는 자연수 부분 3은 $\frac{24}{8}$와 같고 $\frac{1}{2}$은 $\frac{4}{8}$와 같음을 이용하여 먼저 3(=$\frac{24}{8}$)을 4등분하여 $\frac{6}{8}$씩 나누어 주고, 남은 $\frac{4}{8}$를 4등분하여 $\frac{1}{8}$씩 나누어 주는 조작활동을 통해 $\frac{7}{8}$을 구했다. 즉 학생M과 W는 3을 4등분할 수 있고 $\frac{1}{2}$을 4등분할 수 있는 측정단위로 $\frac{1}{8}$을 찾음으로써 문제를 해결하였다. 그러나 학생Y는 동치분수를 이용하여 $3\frac{1}{2}$을 $3\frac{4}{8}$로 고치고 $3\frac{4}{8}$는 $\frac{28}{8}$로 바꾼 후 어림으로 몫을 $\frac{6}{8}$으로 정한 후, $\frac{6}{8}$씩 4등분 했다. $\frac{6}{8}$씩 4등분 한 후에도 $\frac{4}{8}$가 남자 난처해하며 $\frac{4}{8}$를 어떻게 처리해야 할지 몰라 더 이상 해결을 하지 못했다. 이것은 처음엔 $3\frac{1}{2}$을 4등분할 수 있는 측정단위를 찾으려고 하였으나 대분수를 가분수로 바꾸었음에도 불구하고 $\frac{7}{8}$이라는 측정단위를 한

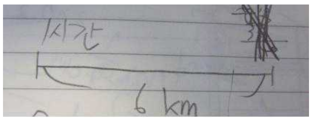
번에 찾지 못하고 $\frac{4}{8}$를 $\frac{1}{8}$로 4등분하지 못한 것은 $\frac{4}{8}$를 $\frac{1}{8}$이라는 단위가 4개 있는 수로 인식하지 못했기 때문이다. 즉 측정에 대한 이해가 정확하지 않은데서 비롯된 것이다.

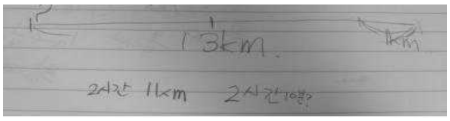
몫이 분수인 포함제 상황에서는 세 학생 모두 분수의 비의 의미를 이용하여 문제를 잘 해결하였다(<에피소드 1>).

< 에피소드 1: 분수의 '비의 의미'를 이용하여 포함제 나눗셈 해결 >

연구자 (중략) 2시간 10분이 걸린다고 했는데 2시간은 어떻게 해서 나왔어요?

학생Y





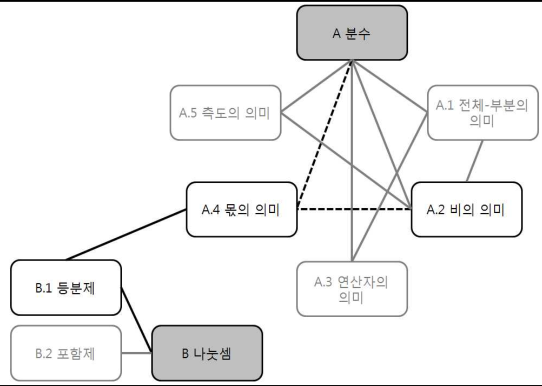
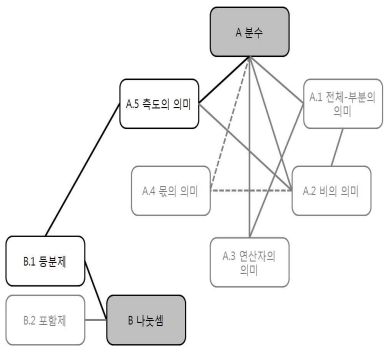
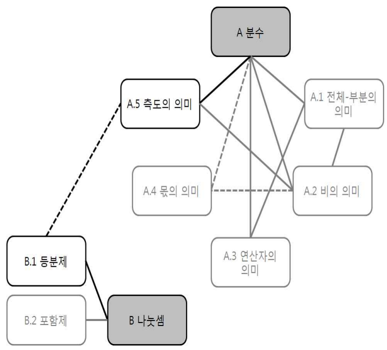
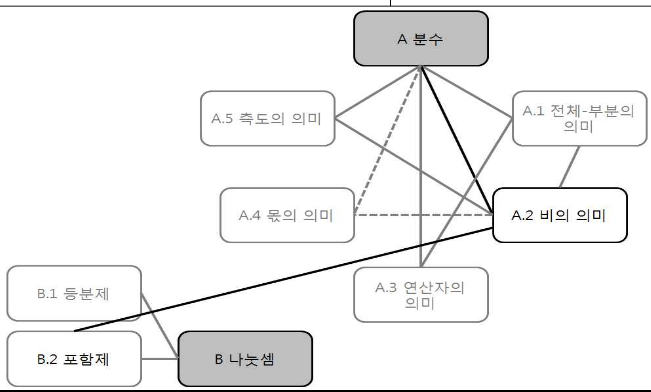
일단 6km를 가는데 1시간이 걸렸다고 했는데 13안에는 6이 두 번 들어가니까 2시간 하고 나머지 1km가 남는데, 이 1km가 참... 헷갈려서.. 한 시간이 60분이고 한 시간에 6km 걷는다고 했으니까 6나눠서 10.

연구자 60 나누기 6을 하면 10이 나오기는 하는데, 60 나누기 6을 한 게 왜 1km가는데 걸린 시간이 되나요?

학생Y 음.. 1km 되려면 6km를 6으로 나눠야 1km가 되니까.. 어. 1시간이 기준이니까 1시간은 60분이니까 60분을 나누기 6했어요.

몫이 분수인 나눗셈에서의 학생들의 연결망을 그려보면 <표 4>와 같다. 피제수가 분수인 같은 등분제 문제를 세 명의 학생 모두 측도의 의미를 이용하려고 시도하였다. 학생M과 W는 어떤 대상에 4개의 단위가 포함되기 위해 측정단위를 자유롭게 설정할 수 있었으나 학생Y는 측정단위를 찾는데 미숙하고 단위 분수를 측정의 단위로 인식하지 못하여 문제해결을 어려워하였다. 이것은 분수의 의미 중 측도의 의미를 잘 알고 있다는 것이 어떤 상황에서의 문제 해결도 보장하는 것은 아니며 주어진 측정단위로 측정하는 것뿐만 아니라 학생들이 스스로 측정단위를 설정하여 측정하는 과정도 학습의 중요한 부분이 되어야 함을 알 수 있다.

<표 4> 몫이 분수인 나눗셈에서의 학생들의 연결망

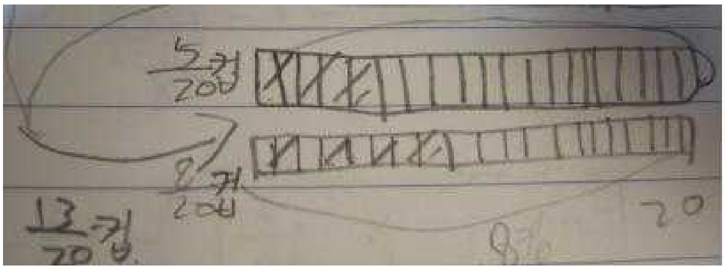
<table>
<tr><td rowspan="3">등분제</td><td>피제수가 자연수인 경우</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">피제수가 분수인 경우</td><td>학생M, W</td><td>학생Y</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>포함제</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

다. 분수의 연산과 관련된 사전 연결망

분수의 덧셈(합병과 첨가)과 뺄셈(구잔과 비교), 곱셈(동치묶음, 부분 중의 부분, 직사각형의 넓이)과 관련된 문제를 해결하게 하고 왜 그렇게 해결했는지 설명을 요구하여 학생들의 이해정도를 파악하여 분수의 연산에 대한 연결망을 그려보았다.

분수의 덧셈에 대한 이해를 파악하기 위해 밀가루 $1\frac{1}{4}$컵과 $1\frac{2}{5}$컵을 가진 두 사람의 밀

가루를 합한 양을 구하는 합병문제와 리본 $\frac{7}{9}$m를 가진 어린이에게 $\frac{2}{3}$m를 더 주었을 때 리본의 길이를 구하는 첨가문제를 제시하였다. 합병문제와 첨가문제에서 모두 [그림 3]과 같이 통분하는 과정에서 분수의 비의 의미와 연결 짓고 있음을 확인할 수 있었으나 ‘분모 20은 같으니까 8칸과 5칸을 더하면 13칸. 그러니까 $\frac{13}{20}$이 된다’ 라는 설명을 통해 분수의 측도의 의미와 연결 짓기보다는 단순한 분수의 덧셈 알고리즘에 의해 문제를 해결함을 확인할 수 있었다.

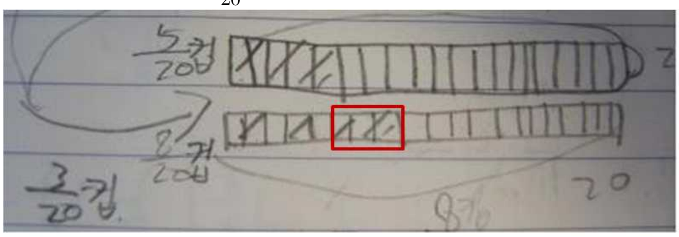


[그림 3] $\frac{1}{4}$과 $\frac{2}{5}$를 통분하는 과정에 대한 학생 W의 설명

분수의 뺄셈에 대한 이해를 파악하기 위해 위에서 제시한 문제를 약간 변형하여 리본 $\frac{7}{9}$m를 가진 어린이가 친구에게 $\frac{2}{3}$m를 주었을 때 남은 리본의 길이를 구하는 구잔 문제와 밀가루 $1\frac{1}{4}$컵을 가진 친구와 $1\frac{2}{5}$컵을 가진 친구 중 누가 얼마나 더 많이 가지고 있는지를 구하는 비교문제를 제시하였다. 구잔 문제와 비교문제에서 모두 위와 같이 통분하는 과정에서 비의 의미를 잘 연결하고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 구한 답의 의미를 설명하는 과정에서 분수의 전체-부분의 의미와 연결 지어 설명함을 확인할 수 있었다(<에피소드 2>).

<에피소드 2> 분수의 뺄셈 문제 해결 후, 답을 전체-부분의 의미로 설명하는 학생W

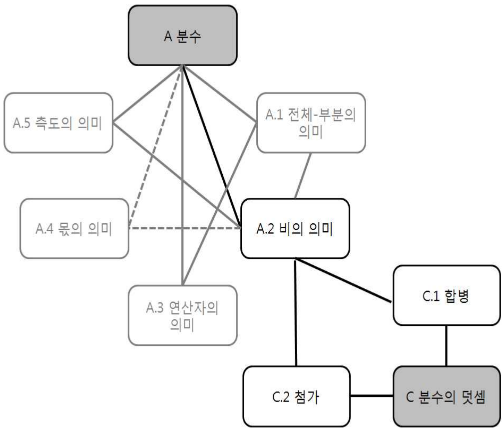
학생W 3칸이 더 많으니까 $\frac{3}{20}$컵을 더 많이 갖고 있습니다.



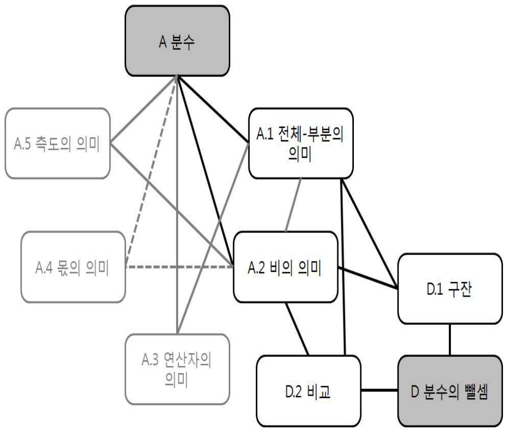
연구자 3칸이 더 많다고 했으니까 3컵이 더 많은 것 아닌가요?

학생W 3컵이 많으려면 1컵을 나타내는 이 한 도막이 3개가 있어야 하는데, 이것은 20칸 중에서 3칸이기 때문에 $\frac{3}{20}$이 됩니다.

분수의 덧셈 문제 해결과정에서는 분수의 ‘비의 의미’만 연결 짓는 것을 확인할 수 있었으나 분수의 뺄셈 문제에서는 분수의 ‘비의 의미’뿐만 아니라 ‘전체-부분의 의미’까지 연결 지어 설명할 수 있었다([그림 4], [그림 5]). 이것은 분수의 뺄셈 문제를 해결한 결과가 학생들이 많이 보아왔던 전체-부분의 관계가 드러나는 형태로 나타나는 반면 분수의 덧셈 문제를 해결한 결과는 전체-부분의 의미로 설명할 수 없기 때문에 분수의 의미와 연결하여 설명하지 못하고 기계적으로 답을 구하는 것으로 판단된다.



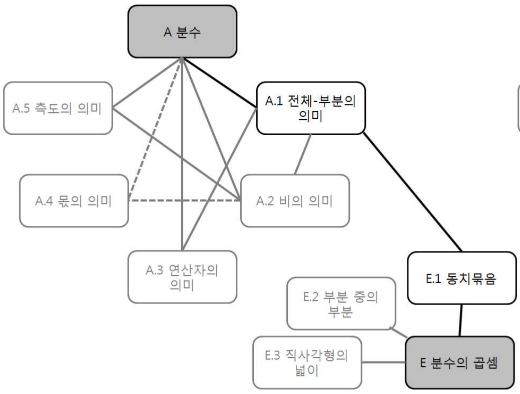
[그림 4] 분수의 덧셈에 대한 학생들의 연결망



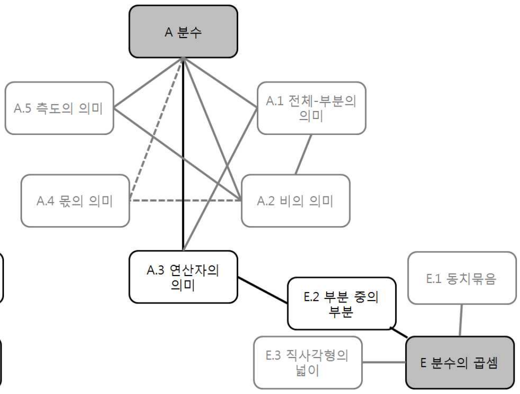
[그림 5] 분수의 뺄셈에 대한 학생들의 연결망

분수의 곱셈에 대한 이해를 파악하기 위해 피자 한 판의 $\frac{3}{8}$씩 놓여 있는 접시가 5개 있는데 접시에 있는 피자를 모두 모았을 때의 양을 구하는 동치묶음문제, 미술시간에 사용할 12m 철사의 $\frac{2}{3}$를 사용하였을 때, 사용한 철사의 길이를 구하는 부분 중의 부분 문제, 한 변의 길이가 $2\frac{1}{4}$cm인 정사각형의 넓이를 구하는 직사각형의 넓이 문제를 제시하였다.

동치묶음의 문제에서 ‘$\frac{3}{8}$씩이 놓여있는 접시가 5개 있다고 했으니까 $\frac{3}{8}$씩 놓여있는 접시 5개를 몇 판인지 알아보기 위해서 곱하기를 했습니다.’는 설명을 통해 동치묶음 분수의 곱셈의 의미를 알고 있으며 ‘$\frac{3}{8}$이 다섯 개가 있으면 한 판이 만들어지고 한판에서 8등분 한 것 중에서 7개가 더 있기 때문에 $1\frac{7}{8}$판이다’라는 설명을 통해 분수의 ‘전체-부분의 의미’와 연결 지을 수 있다는 것을 알 수 있었다. 부분 중의 부분 문제에서 $\frac{2}{3}$m랑 $\frac{2}{3}$의 차이를 묻자 ‘$\frac{2}{3}$m는 1m를 3등분 한 것 중에서 2칸인데, $\frac{2}{3}$는 그냥 $\frac{2}{3}$이니까 12를 3으로 나눈 것 중에서 2입니다.’라고 비교하여 설명하는 것을 통해 승수인 분수를 연산자의 의미로 이해하고 있다는 것을 알 수 있었다. 이 내용을 바탕으로 연결망을 그려보면 [그림 6], [그림 7]과 같다.



[그림 6] 동치묶음 문제 해결에 대한 학생들의 연결망



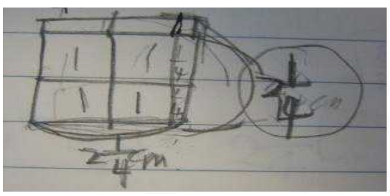
[그림 7] 부분 중의 부분 문제 해결에 대한 학생들의 연결망

직사각형의 넓이 문제에서 세 명의 학생 모두 $\frac{1}{4}$cm의 선분의 길이를 나타내기 위해서 1cm의 절반을 찾아서 다시 절반을 찾는 것을 통해서 분수로 나타난 길이의 경우 기준량을 찾고 전체와 부분의 관계에서 그것이 $\frac{1}{4}$이 되는지 설명하는 것을 통해 분수의 비의 의미와 전체-부분의 의미와 연결시키고 있음을 알 수 있었다. 그러나 학생M과 Y는 세로가 1cm, 가로가 $\frac{1}{4}$cm인 직사각형의 넓이가 1㎠의 $\frac{1}{4}$과 같다는 것이나 $5\frac{1}{16}$㎠의 넓이는 1㎠의 5배에 해당하는 넓이와 1㎠의 $\frac{1}{16}$에 해당하는 넓이를 더한 넓이라는 것을 깨닫지 못했다. 이 학생들은 분수로 표현된 넓이를 비의 의미로($\frac{1}{16}$㎠가 1㎠의 $\frac{1}{16}$에 해당하는 넓이라는 의미) 이해하지 못했다. 학생W만이 분수로 표현된 길이와 넓이를 모두 비의 의미로 이해하고 문제 해결에 활용하였다(<에피소드 3>).

<에피소드 3> 분수로 표현된 길이와 넓이를 비의 의미로 이해한 학생W의 설명

연구자 가로와 세로가 $2\frac{1}{4}$cm, $2\frac{1}{4}$cm인 정사각형이 있습니다. 정사각형의 넓이는 몇 ㎠일까요?

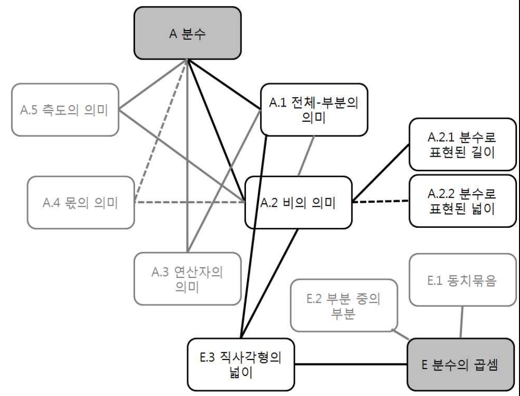
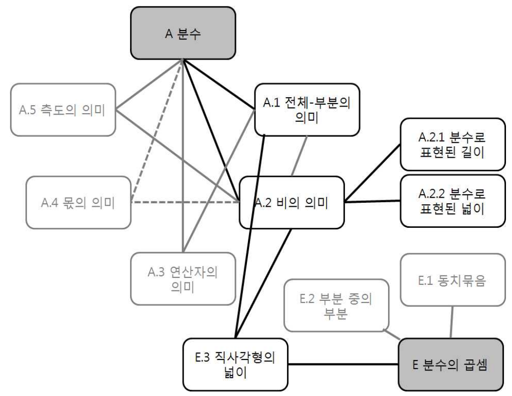
학생W (그림을 그리며 설명한다.)



가로 $2\frac{1}{4}$cm는 1㎝가 두 개가 있다는 뜻이고 $\frac{1}{4}$㎝는 이 가로가 1㎝인 이 사각형의 4등분한 것 중 한 등분이기 때문에...... 4등분한 것 중 한 등분입니다.
이 사각형이 1㎠이고 이것과 똑같은 것이 4번 들어서 4㎠이고... 4㎠ 와 $\frac{2}{4}$㎠가 나올 것 같습니다.

직사각형 넓이 문제에 대한 학생M, Y와 학생W의 연결망을 구성하면 <표 5>와 같다. 분수의 곱셈 문제 상황에 따라 전체-부분의 의미, 비의 의미, 연산자의 의미 중 가장 근접한 분수의 의미와 연결하여 문제를 해결하는 것을 알 수 있었다. 특히 직사각형의 넓이 문제에서 학생들은 1차원에서의 비의 의미는 쉽게 이해해도 2차원인 넓이에서 비의 의미를 연결하여 생각하는 것을 어려워한다는 것을 알 수 있었다.

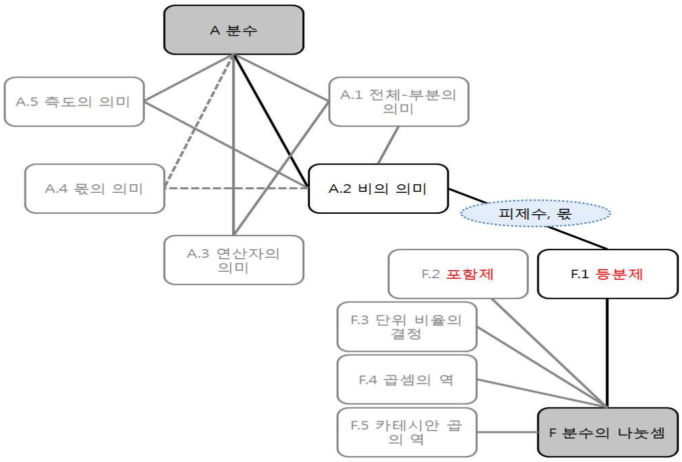
<표 5> 직사각형 넓이 문제 해결에 대한 학생들의 연결망

<table>
<tr><th>학생M과 Y의 연결망</th><th>학생W의 연결망</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2. 분수의 나눗셈 학습 후, 학생들의 인지구조

가. 등분제 나눗셈 문제 해결 시 연결망

등분제 나눗셈 문제 풀이 시 드러나는 학생들의 인지구조를 파악하기 위해 파이 $\frac{12}{16}$을 3명의 친구에게 똑같이 나누어 준다면 친구 한 명이 받은 파이의 양은 얼마인지 구하는 문제를 제시하였다. 분할 나눗셈 상황을 해결하기 위해 $\frac{12}{16}\div 3$이라고 식을 쓰고 이를 분할 나눗셈의 의미인 '$\frac{12}{16}$를 똑같이 3으로 나누기'로 설명하였다. 그리고 파이 $1(\frac{16}{16})$을 전체로 보고 1명이 갖게 되는 상대적인 양을 분수로 나타냈다. 학생M은 식과 그림으로 해결한 후 '$\frac{1}{4}$씩 나눠가진다'라고 답했다. 3명에게 똑같이 나누어 줬으므로 $\frac{1}{3}$씩 갖게 되는 것이 아니냐고 질문하자 '처음 파이의 양($\frac{16}{16}$)을 기준으로 몫을 표현해야 한다'고 설명했다. 즉 분수로 표현된 피제수와 몫에서 무엇이 기준량인지 찾을 수 있으므로 분수의 비의 의미와 연결하여 문제를 해결했다고 볼 수 있다 ([그림 8]).



[그림 8] 등분제 나눗셈에서의 세 학생의 연결망

나. 포함제 나눗셈 문제 해결 시 연결망

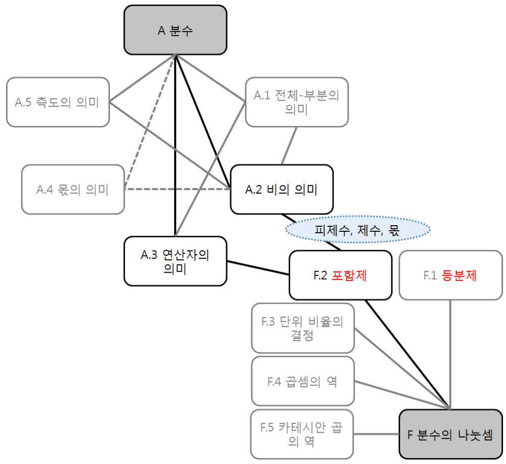
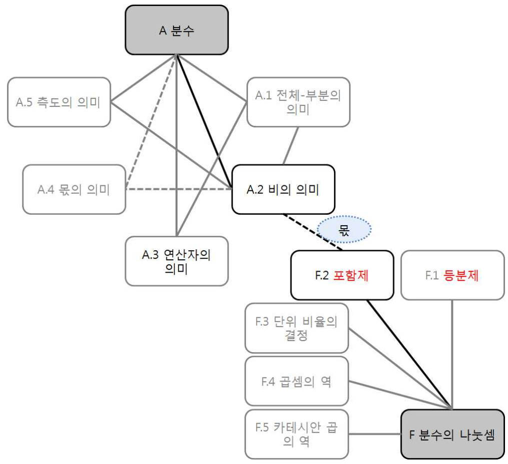
포함제 나눗셈 문제 풀이 시 드러나는 학생들의 인지구조를 파악하기 위해 커피 $1\frac{3}{4}$L를 $\frac{1}{5}$L씩 담으면 몇 잔을 마실 수 있는지 구하는 문제를 제시하였다. 3명의 학생 모두 '$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{5}$' 이라고 식을 쓰고 이를 측정 나눗셈의 의미인 '$1\frac{3}{4}$L안에 $\frac{1}{5}$L가 얼마나 들어있는지' 로 설명하였다. 즉 문제의 의미를 정확하게 파악하고 있었다.

학생M과 W는 문제의 의미뿐만 아니라 나눗셈 식의 결과 '$3\frac{3}{4}$' 의 의미에 대해서도 정확하게 이해하고 있었다. '$8\frac{3}{4}$' 의 의미를 '$\frac{1}{5}$L' 씩 8과 '$\frac{1}{5}$L' 의 $\frac{3}{4}$으로 설명했고, 구체적으로 '$\frac{1}{5}$L의 $\frac{3}{4}$' 이 얼마인지 질문하자 $\frac{3}{20}$L라고 설명했다. 학생M과 W는 분수의 '비의 의미' 뿐만 아니라 '연산자의 의미' 를 바르게 연결시켜 몫의 의미를 설명했고 몫 $8\frac{3}{4}$의 자연수 부분 '$\frac{3}{4}$' 을 1잔의 $\frac{3}{4}$이라고 표현했다.

그러나 학생Y는 나눗셈 식을 세워 계산 후 몫인 '$8\frac{3}{4}$' 의 의미를 '8잔' 과 '$\frac{3}{4}$L가 남는 것' 이라고 설명하였다. 즉 자연수 부분은 '제수가 몇 번 포함되는지 또는 몇 번 들어가는지' 로 바르게 설명했으나 몫의 분수 부분은 $\frac{1}{5}$L라는 기준량에 대한 비로써 인식하지 못하였다.

학생들의 포함제 나눗셈에서의 연결망을 나타내면 <표 6>과 같다. 여기서 주목할 부분은 학생Y의 연결망이다. 학생Y는 직사각형의 넓이와 관련된 분수의 곱셈 문제 해결 시 분수로 표현된 넓이를 비의 의미로 이해하는 것을 어려워하였는데 피제수, 제수, 몫이 모두 분수로 표현되는 분수의 나눗셈에서 몫의 정확한 의미를 파악하지 못하는 것을 통해 분수의 나눗셈 학습 전 부족했던 부분이 분수의 나눗셈 학습에도 영향을 주고 있음을 확인할 수 있다.

<표 6> 측정나눗셈에서의 학생들의 연결망

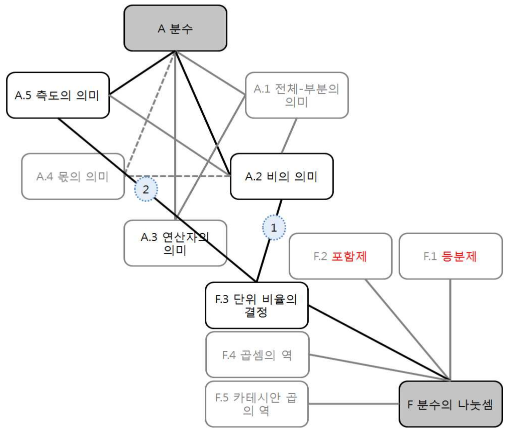
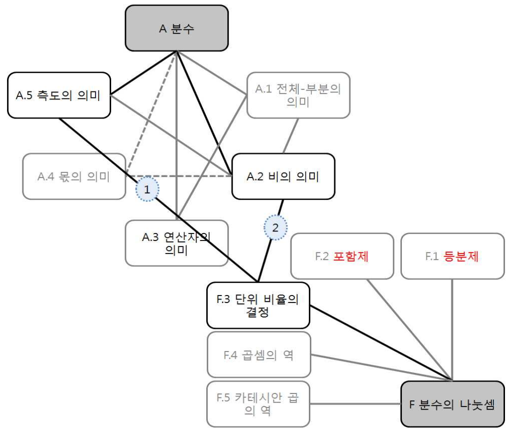
학생M과 W의 연결망	학생Y의 연결망
	

다. 단위 비율의 결정 문제 해결 시 연결망

단위 비율의 결정 문제 풀이 시 드러나는 학생들의 인지구조를 파악하기 위해, 철근 $\frac{2}{7}$m의 무게가 $\frac{3}{4}$kg일 때, 철근 1m의 무게를 구하는 단위비율의 결정 상황의 문제를 제시하였다. 학생M과 W는 $\frac{2}{7}$m는 1m를 기준으로 '$\frac{2}{7}$'에 해당하는 길이라는 것을 알고 $\frac{1}{7}$m의 단위무게를 결정하는 과정에서 분수의 '비의 의미'와 연결하였으며 $\frac{1}{7}$m의 단위무게로 1m의 무게를 계산하는 과정에서 '측도의 의미'와 연결하여 문제를 해결하였다. 학생Y는 철근 1m의 무게를 구하기 위해 $\frac{1}{7}$m의 단위무게를 구하는 대신 $\frac{2}{7}$m의 무게를 단위무게로 생각하여 '$\frac{2}{7}$m의 무게+$\frac{2}{7}$m의 무게+$\frac{2}{7}$m의 무게+$\frac{1}{7}$m의 무게'의 과정으로 해결을 시도함으로써 우선 분수의 '측도의 의미'와 연결시켰고 $\frac{1}{7}$m의 무게를 알기 위해 '비의 의미'도 활용하고 있음을 알 수 있다.

단위 비율의 결정 상황 문제 해결 과정을 통해 드러난 세 사람의 연결망을 살펴보면 <표 7>과 같다. 학생들의 해결과정에서 분수의 측도의 의미와 비의 의미가 모두 활용되었다는 점은 같지만 어떤 것을 먼저 연결시킨다는 점에서는 차이가 나타났다. 학생Y는 앞에서도 언급하였듯이 분수의 비의 의미에 대한 이해가 부족하기 때문에 이번 분수의 나눗셈 문제에서도 우선 측도의 의미로 문제 해결을 시도하였다. 이것은 학생들의 인지구조 속 개념들의 연결에서 바른 연결과 그렇지 않은 연결, 연결되지 않음으로만 구분할 수 있는 것이 아니라 연결된 정도의 차이도 있다는 것을 알게 하는 대목이다.

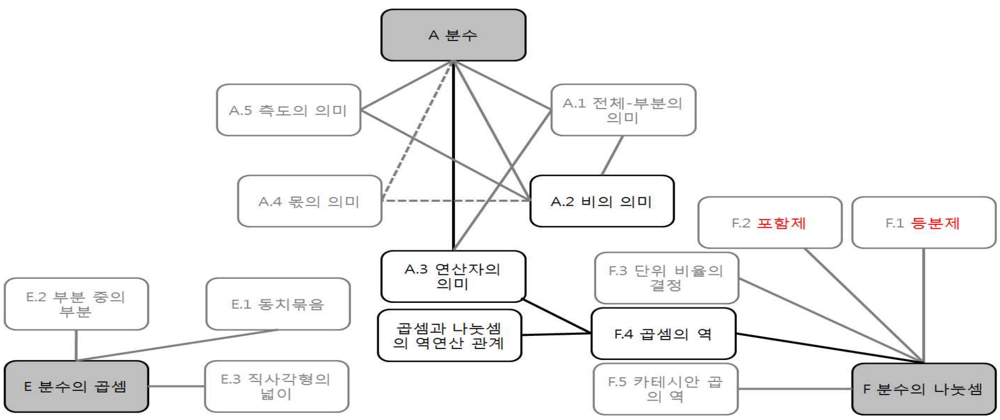
<표 7> 단위 비율 결정 상황에서의 학생들의 연결망

학생M과 W의 연결망	학생Y의 연결망
	

라. 곱셈의 역 문제 해결 시 연결망

곱셈의 역 문제 풀이 시 드러나는 학생들의 인지구조를 파악하기 위해, 48명의 학생들이 피자를 좋아하는데 이 학생 수는 떡볶이를 좋아하는 학생 수의 $1\frac{1}{2}$배라고 할 때 떡볶이를 좋아하는 학생들은 몇 명인지 구하는 문제를 제시하였다. 세 학생 모두 어떤 수에 $1\frac{1}{2}$배 한 수를 $1\frac{1}{2}$로 나누면 처음 수가 나온다고 설명하면서 우선 $1\frac{1}{2}$을 '연산자의 분수'로 인식하고 '곱셈과 나눗셈의 역연산 관계'를 이용하였다.

곱셈의 역 문제 해결 과정에서 나타난 학생들의 연결망을 살펴보면 [그림 9]와 같다. 곱셈의 역 문제를 분수의 곱셈과 관련지어 생각하기 보다는 분수의 의미와 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계만 기계적으로 이용함으로써 문제를 해결하는 경향이 강함을 알 수 있다.



[그림 9] 곱셈의 역 상황에서의 세 학생의 연결망

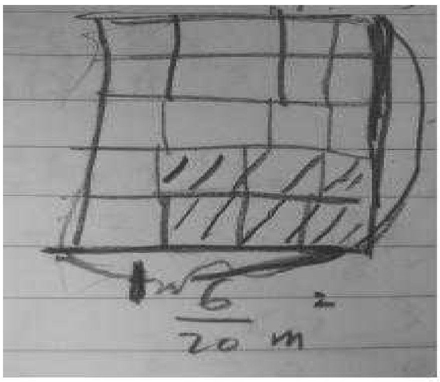
마. 카테시안 곱의 역 문제 해결 시 연결망

카테시안 곱의 역 문제 풀이 시 드러나는 학생들의 인지구조를 파악하기 위해, $\frac{6}{20}$㎡의 넓이의 직사각형 거울의 가로의 길이가 $\frac{3}{4}$m일 때 세로의 길이를 구하는 문제를 제시하였다. ‘직사각형 넓이 구하는 공식’과 ‘곱셈과 나눗셈의 역연산 관계’를 이용하여 세로의 길이를 잘 구하였다. 하지만 문제해결 과정을 더욱 정당화할 것을 요구하자 학생Y와 M은 설명하기 매우 어려워했고 결국 ‘잘 모르겠다’ 또는 ‘헷갈려요’라고 답하였다. 그러나 학생W는 <에피소드 4>처럼 $\frac{6}{20}$㎡의 넓이를 1㎡와 비교하여 ‘1㎡의 $\frac{6}{20}$’으로 설명했고, $\frac{3}{4}$m를 1m와 비교하여 ‘1m의 $\frac{3}{4}$’으로 설명했다. 즉 분수로 표현된 길이와 넓이의 경우 각각 분수의 ‘비의 의미’를 이용하여 설명했다.

<에피소드 4> 분수로 표현된 길이와 넓이를 비의 의미로 설명하는 학생W

연구자 어떻게 해서 가로의 길이가 $\frac{2}{5}$m지?

학생W

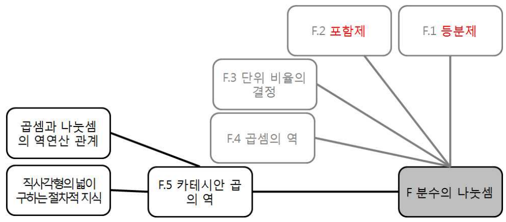


왜냐하면 여기 네 칸씩 다섯 줄이 있어야 스무 칸이 됩니다.(1㎡를 20등분 할 수 있습니다.) 여기 4개 중에 3개가 있고($\frac{3}{4}$m) 다섯 줄 중에 두 줄($\frac{2}{5}$m)이 있으면 (1㎡를) 20칸으로 나눈 것 중 여섯 칸이 있기 때문에 $\frac{6}{20}$㎡입니다.

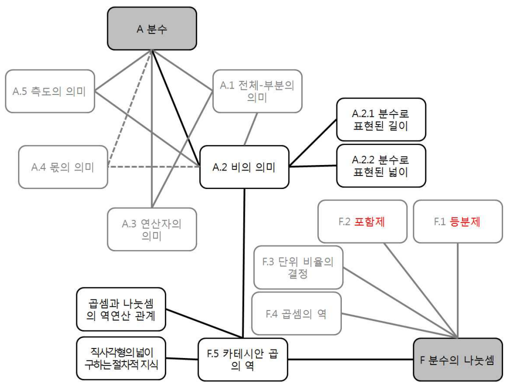
카테시안 곱의 역 상황의 문제를 해결할 때 나타나는 학생들의 연결망은 <표 8>과 같다. 문제 해결을 위해 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계나 직사각형의 넓이 구하는 공식을 기계적으로 이용하여 답을 구하는 경향이 강했는데, 이는 분수의 나눗셈 단원에서 카테시안 곱의 역 문제가 단원 정리부분에서 분수의 나눗셈 알고리즘 적용문제로 다뤄지고 있기 때문으로 판단된다. 따라서 문제 해결에 대한 정당화를 요구했을 때, 학생Y와 M은 정당화하지 못했지만 학생W는 분수의 비의 의미와 연결하여 정당화하였다. 학생W는 직사각형 넓이로 표현된 분수의 곱셈 문제에서 분수로 표현된 길이와 넓이를 모두 비의 의미로 이해하고 있었고 분수가 포함된 분할 나눗셈뿐만 아니라 측정나눗셈에서 분수로 표현된 피제수, 제수, 몫의 의미를 비의 의미로 정확하게 설명할 수 있었으며 단위 비율 결정 상황에서 비의 의미로 먼저 문제해결을 시도하였다. 즉 학생W는 비의 의미에 대한 이해가 정확하며 자유롭게 응용할 정도로 연결이 강하게 되어 있는 학생이다. 이것은 카테시안 곱의 역 문제를 의미 있게 해결하기 위해서는 비의 의미에 대한 정확한 이해가 바탕이 되어야 한다는 것을 알려주는 것이다.

<표 8> 카테시안 곱의 역 상황에서의 학생들의 연결망

학생Y와 M의 연결망



학생W의 연결망



Ⅴ. 결 론

본 연구의 목적은 분수 나눗셈 학습을 하기 전에 학생들이 분수 나눗셈 학습에 필요한 사전개념에 대해 어떤 인지구조를 가지고 있으며 분수 나눗셈 학습 후에 분수 나눗셈을 해결할 때 사전 개념을 어떻게 연결하는지를 개별 면담을 통해 알아봄으로써 분수 나눗셈의 지도 방법이나 내용에 시사점을 주는 데 그 목적이 있다.

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 분수의 나눗셈 중 포함제 나눗셈에서의 학생들의 연결망을 살펴보면 비에 대한 이해가 부족했던 학생Y가 피제수, 제수, 몫이 모두 분수로 표현되는 분수의 나눗셈에서 몫의 정확한 의미를 파악하지 못하는 것을 통해 분수의 나눗셈 학습 전에 부족했던 부분이 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다. 특히 피제수와 몫만 분수로 표현된 등분제 나눗셈에서는 몫을 비의 의미로 잘 이해하더라도 피제수, 제수, 몫이 모두 분수로 표현되는 포함제 나눗셈에서 몫을 비의 의미로 잘 이해하지 못하였다. 이것은 몫의 의미를 말할 때 몫이 절대적인양인지 상대적인양인지 모르고, 기준량이 피제수인지 제수인지 또는 1인지 모르기 때문이다. 분수의 나눗셈 지도에서 상대적인 양이라는 것을 강조하면서 기준량과 비교량이 무엇인지 찾는 학습을 통해 비의 의미에 대한 이해를 강화시킬 필요가 있다.

둘째, 분수의 나눗셈 중 단위 비율의 결정 상황에서 학생들의 연결망을 살펴보면 학생들의 해결과정에서 분수의 측도의 의미와 비의 의미가 모두 활용되었다는 점은 같지만 어떤 것을 먼저 연결시킨다는 점에서는 차이가 나타났다. 학생Y는 앞에서도 언급하였듯이 분수의 비의 의미보다 측도의 의미를 편하게 생각하기 때문에 이번 분수의 나눗셈 문제에서도 우선 측도의 의미로 문제 해결을 시도하였다. 이것은 학생들의 인지구조 속 개념들의 연결에서 바른 연결과 그렇지 않은 연결, 연결되지 않음으로만 구분할 수 있는 것이 아니라 연결된 정도의 차이도 있다는 것을 알게 하는 대목이다. 학생들마다 익숙한 개념이 다르므로 어떤 개념을 먼저 활용하든 그것의 활용을 허용하되 학생들의 사고과정에 대해

정당화할 것을 요구함으로써 정확한 개념연결이 강화될 수 있도록 지도할 필요가 있다.

셋째, 분수의 나눗셈 중 곱셈의 역 문제와 카테시안 곱의 역 문제 해결 시 분수의 나눗셈 학습 전의 사전연결망과 연결하여 문제를 해결하기보다 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계와 직사각형의 넓이 구하는 공식을 기계적으로 이용하여 답을 구하는 경향이 강함을 알 수 있다. 이는 분수의 나눗셈 단원에서 곱셈의 역 문제와 카테시안 곱의 역 문제가 단원 정리부분에서 분수의 나눗셈 알고리즘 적용문제로 다뤄지고 있기 때문으로 판단된다. 이 두 가지 문제유형에 대해서도 분수의 의미 및 분수의 곱셈과 관련하여 탐구할 수 있는 시간을 가질 필요가 있다.

넷째, 다른 학생들이 기계적으로 문제를 해결한 카테시안 곱의 문제에서 유일하게 정당화한 학생W는 직사각형 넓이와 관련된 분수의 곱셈 문제 해결에서 분수로 표현된 길이와 넓이를 비의 의미로 이해하고 있었고 피제수, 제수, 몫이 모두 분수인 분수의 나눗셈에서 이들의 의미를 비의 의미로 이해하고 있었으며 단위 비율결정 상황에서 비의 의미로 먼저 문제 해결을 시도했던 것을 통해 학생W는 비의 의미를 정확하게 이해하고 있으며 연결망에서 연결이 강하게 이루어져있음을 짐작할 수 있다. 비의 의미를 정확하게 이해하고 연결망에서 연결이 강하게 이루어져있다면 어떠한 분수의 나눗셈 상황에서도 문제를 해결하고 정당화할 가능성이 높다는 것을 알 수 있다. 분수 및 분수의 연산 학습에서 비의 의미를 강조하여 지도할 필요가 있다.

본 연구에서는 분수의 나눗셈을 해결하는 학생들의 사고 기제를 정성적으로 분석하기 위해 연구대상자를 다수가 아닌 3명으로 선정하였다. 따라서 분수의 나눗셈에 대한 6학년 학생들의 인지구조 및 분수의 나눗셈 지도에 대한 시사점을 일반화하여 말하기는 어렵지만 학업능력이 우수한 6학년 학생들의 인지구조 연구를 통해 찾아낸 시사점은 다른 수준의 학생들에게 분수의 나눗셈 지도를 하는데 있어서도 의미 있는 시사점이 될 수 있다고 생각한다. 앞으로 수학과의 다른 내용이나 학생들의 수준에 따라 학생들의 사고 기제가 어떻게 다른지 인지구조를 살펴보는 후속연구가 계속 이어지길 기대한다.

참 고 문 헌

김경미, 황우형 (2009). 분수의 하위개념 이해가 문제해결에 미치는 영향. **한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, 48**(3), 235-263.

김경미, 황우형 (2011). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, 50**(3), 337-354.

김경미, 황우형 (2012). 자연수와 분수 연산에 대한 학생들의 이해 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, 51**(1), 21-45.

김미영, 백석윤 (2010). 분수 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석. **한국초등수학교육학회지, 14(2)**, 241-262.

김민경 (2009). 초등학생의 분수 이해에 관한 연구 -6학년의 분수 개념 및 분수 나눗셈을 중심으로-. **한국학교수학회논문집, 12**(5), 151-170.

박교식, 송상헌, 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. **대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 6**(3), 235-249.

방정숙, Li (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, 47**(3), 291-310.

방정숙, 이지영 (2009a). 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 285-304.

방정숙, 이지영 (2009b). 사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석. **대한수학교육학회지 〈학교수학〉, 11**(1), 71-91.

허인숙 (2001). 개념도로 탐색한 학습자의 인지구조 변화. **시민교육연구, 33**, 375-405.

허인숙 (2002). 인지구조 변화의 평가도구로서 개념도 활용의 의미. **교육심리연구, 16**(4), 123-146.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 신현용, 승영조 역 (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 서울: 승산.

Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics : Teaching Developmentally, 5th edition.* Pearson Education, Inc. 남승인, 서찬숙, 최진화, 강영란, 홍우주, 배혜진 외 1인 공역 (2008). 수학을 어떻게 가르칠 것인가? 서울: 경문사.

Cornbleth, C. (1985). Critical thinking and cognitive processes. In W. B. Stanley (Ed.), *Review of research in social studies education*, 1976~1983(pp. 11-63). Washington, DC: NCSS.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). Reston, VA: NCTM.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: the clinical interview in psychological research and practice.* New York: Cambridge university press.

Howard, R. W. (1987). *Concepts and schemata: an introduction.* London: Cassel.

Jonassen, D. H., Beissner, K., & Yacci, M. (1993). *Structural knowledge: Techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Novak, J. D. & Gowin, D. B. (1984). Learning how to learn. New York: Cambridge University Press.

Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. In R. I. Spiro, B. C. Bruce, & W. F. Brewer (Eds.), *Theoretical issues in reading comprehension* (pp. 33-58). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Rumelhart, D. E. & Norman, D. A. (1976). Accretion, tuning and restructuring : Three models of learning. In J. W. Cotton & R. Klatzky (Eds.), *Semantic factors in cognition* (pp. 37-60). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, VA: NCTM.

Xin, Y. P. (2008). The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems : An emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(5), 526-551.

<Abstract>

A Study on Learner's Cognitive Structure in Division of Fraction

Lee, Youngju[5]; & Lee, Kwangho[6]; & Lee, Hyojin[7]

The purpose of this study is searching students' cognitive structures before and after learning division of fraction. Also the researchers investigated how their structures are connected when they solve division of fraction problems through individual interviews. The researcher suggested the instruction of division of fraction from the results.

Key words: division of fraction, cognitive structure, concept map

논문접수: 2012. 07. 20
논문심사: 2012. 07. 24
게재확정: 2012. 08. 05

5) jakarta0801@hanmail.net
6) paransol@knue.ac.kr
7) cnuesu@hanmail.net