

일정체적 Timoshenko 보의 자유진동

Free Vibrations of Timoshenko Beam with Constant Volume

이 병 구* · 이 태 은† · 윤 희 민**

Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee and Hee Min Yoon

(2011년 11월 24일 접수 ; 2011년 12월 30일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Constant Volume(일정체적), Tapered Beam(변단면 보), Timoshenko Beam (Timoshenko 보), Rotatory Inertia(회전관성), Shear Deformation(전단변형), Mode Shape(모드형상), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

This paper deals with free vibrations of the tapered Timoshenko beam with constant volume, in which both the rotatory inertia and shear deformation are included. The cross section of the tapered beam is chosen as the regular polygon cross section whose depth is varied with the parabolic function. The ordinary differential equations governing free vibrations of such beam are derived based on the Timoshenko beam theory by decomposing the displacements. Governing equations are solved for determining the natural frequencies corresponding with their mode shapes. In the numerical examples, three end constraints of the hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped ends are considered. The effects of various beam parameters on natural frequencies are extensively discussed. The mode shapes of both the deflections and stress resultants are presented, in which the composing rates due to bending rotation and shear deformation are determined.

1. 서 론

최근 재료공학의 발달로 구조재료의 경량화와 고강도화가 실현되어 다양한 형상 및 형태를 갖는 거대구조물의 설계, 시공이 가능하게 되었다. 이러한 거대 구조물에서는 구조체의 자중을 줄이면서 외력에 대한 저항능력을 증가시키는 것이 무엇보다 중요한 과제이다. 구조물의 설계에서 변단면의 이용은 자중감소, 내하력 증진 등의 기술적 효과뿐만 아니라 외관의 아름다움, 재료비 절감 등의 사회, 경제적 측면에서도 유리하기 때문에 그 이용이 날로 증

가하고 있다.

이 연구에서 대상으로 하는 일정체적 보의 변단면 선형의 종류 또는 단면의 변화율에 따라 정·동적 거동 특성이 크게 달라지므로 이러한 특성을 이용하면 동일한 체적에서 보다 큰 동적 안정성을 확보할 수 있는 기하형상을 결정할 수 있다. 이는 기하적 형상만으로 대상 보의 고유진동수를 증진시킬 수 있어 매우 합리적이며 중요한 연구과제이다.

보의 자유진동 해석이론은 회전관성과 전단변형의 고려 여부에 따라 구분할 수 있다. 즉, 회전관성과 전단변형의 영향을 모두 무시한 Euler-Bernoulli 보 이론과 이들의 영향을 모두 고려한 Timoshenko 보 이론으로 크게 나눌 수 있다. 일반적으로 자유진동 해석 시 세장비가 큰 보나 저차모드의 해석에서는 이들 두 이론의 결과가 거의 차이를 보이지 않아 비교적 수식전개가 용이한 Euler-Bernoulli 보

† 교신저자; 정회원, 원광대학교 토목환경공학과
E-mail : telee@wku.ac.kr
Tel : (063)850-6718, Fax : (063)857-7204

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

** 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

이론을 적용하여도 무방하다. 그러나 세장비가 비교적 작은 보나 고차 모드까지 해석이 요구되는 경우 또는 적층보의 경우에는 회전관성과 전단변형의 고려 여부에 따라 그 결과가 달라지며, 이 경우에는 Timoshenko 보 이론을 적용하는 것이 보다 정확한 해를 얻을 수 있다. 특히 세장비가 매우 작거나 지점근처에 큰 집중하중이 작용하는 경우에는 전단변형의 영향이 비교적 크게 작용하므로 반드시 Timoshenko 보 이론을 적용하여야 한다.

Timoshenko 보의 동적특성 해석에 관한 최근의 연구를 살펴보면 다음과 같다.

Takahashi⁽¹⁾는 중동력이 작용하는 균열을 갖는 Timoshenko 보의 진동 및 안정에 관한 연구를 수행하였다. Zhou⁽²⁾는 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 정현형 분포하중이 작용하는 다경간 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다. Zhong과 Guo⁽³⁾는 Hamilton 이론에 의해 단순지지 Timoshenko 보의 비선형 동적 미분방정식을 유도하고 이를 미분구적법으로 해석하였다. Yardimoglu와 Yildirim⁽⁴⁾은 유한요소모형을 이용하여 기(既) 비틀림력이 작용하는 Timoshenko 보의 자유진동해석을 수행하고 그 결과를 선형연구와 비교하였다. 이 등⁽⁵⁾은 위팽을 고려한 일축 대칭단면을 갖는 Timoshenko 보의 휨-비틀림 연성진동에 관한 연구를 수행하였다. Ho와 Chen⁽⁶⁾은 미분변환법을 이용하여 축하중과 비틀림을 받는 Timoshenko 보의 횡자유진동에 관한 연구를 수행하였다. Prokic⁽⁷⁾은 가상변위의 원리를 이용하여 위팽을 고려한 박벽 Timoshenko 보의 동적 미분방정식을 유도하고, 휨-비틀림 연성진동에 관한 연구를 수행하였다. Kaya와 Ozgumus⁽⁸⁾은 Hamilton 이론을 바탕으로 축하중이 작용하는 적층 Timoshenko 보의 동적 미분방정식을 유도하고, 미분변환법(DTM)을 이용하여 휨-비틀림 연성진동 해석을 실시하였다. Sapountzakis와 Dourakopoulos⁽⁹⁾는 경계요소법을 이용하여 축하중과 횡하중이 동시에 작용하는 등단면 Timoshenko 보의 비선형 동적해석을 실시하였다. Li 등⁽¹⁰⁾은 동적강성행렬을 이용하여 3차 전단변형이론을 바탕으로 한 적층복합보의 자유진동해석을 실시하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구는 최근까지 여러 연구자에 의해 활발히 수행되고 있지만 변단면 부재와 일정체

적 부재를 대상으로 하는 연구는 매우 드문 실정이다. 이 연구는 일정체적 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 이러한 점에서 이 연구는 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 학문적 확장을 꾀하고, 실제 구조물에서 그 적용성을 강화할 수 있는 중요한 연구과제이다.

Timoshenko 보의 해석 시 대상 보가 등단면인 경우에는 일반적으로 변위에 대한 4계 미분방정식으로 미분방정식을 유도한다. 그러나 부재가 변단면인 경우에는 변위항을 지배미분방정식에서 소거하는 과정이 매우 복잡하고 난해하다. 이 연구에서는 복잡한 수학적 전개과정을 피하기 위하여 각각의 변위항을 분리하여 미분방정식을 유도하였다. 이러한 방법으로 변위를 분리하여 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도한 논문은 이 논문이 최초이다.

이 연구에서는 변위분리에 의하여 일정체적을 갖는 변단면 Timoshenko 보의 자유진동에 대한 미분방정식을 유도하고, 고유진동수 및 모드형상을 산출하였다. 해석대상 보는 동일한 지간길기와 동일한 체적을 갖는 일정체적 부재이다. 보의 단면으로 정다각형 단면형상을 택하였으며, 단면이 포물선 함수에 따라 변화하는 포물선 변단면을 채택하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 보에 대하여 변수연구를 실시하였으며, 회전관성 및 전단변형이 무차원 고유진동수와 동적변위에 미치는 영향을 고찰하였다. 특히 변위분리에 의한 미분방정식을 적용함으로써 휨 회전각과 전단변형이 진동변위에 미치는 영향을 고찰할 수 있었다.

2. 일정체적 변단면 부재

Fig. 1은 정 n 각형의 단면을 갖고 길이가 l 인 변단면 보를 나타낸다. 여기서 $n(\geq 3)$ 은 정다각형의 변수(邊數)이며, $n = \infty$ 이면 원형단면이다. 보의 체적 V 는 항상 일정하며, 이 보는 변단면 보이기 때문에 정다각형의 단면길이 d 는 변화함수이다. d 의 변화제원을 표현하는 형상함수는 임의 함수식이 모두 가능하지만 이 연구에서는 포물선 함수로 채택하였다.

이 그림에서 x 는 부재의 축방향 좌표를 나타낸

다. 부재양단 ($x=0$ 및 $x=l$)에서 $d=d_a$ 이고, 부재중앙 ($x=l/2$)에서 $d=d_m$ 이다. x 에서 정다각형 단면의 단면적 및 단면2차모멘트는 A, I 이다.

단면깊이 d 의 함수식을 나타내기 위하여 단면비 r 을 d_a 에 대한 d_m 의 비로 다음과 같이 정의한다.

$$r = \frac{d_m}{d_a} \tag{1}$$

위에서 정의한 단면비 r 을 이용하면 x 에서 단면깊이 d 를 형상함수 $F(x/l)$ 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d = d_a F \tag{2}$$

여기서 $F = F(x/l)$ 이다.

식 (2)에서 F 를 포물선 함수로 채택하면 직교좌표계에서 포물선은 $(0, d_a), (l/2, rd_a), (l, d_a)$ 의 3점의 좌표를 지나므로 F 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$F = -4(r-1)\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)+1 \tag{3}$$

이 연구에서 부재단면은 정다각형이므로 x 에서 A, I 를 변수 n , 단면깊이 d 를 이용하면 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$A = c_1 d^2 = c_1 d_a^2 F^2 \tag{4.1}$$

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{4.2}$$

$$I = c_2 d^4 = c_2 d_a^4 F^4 \tag{5.1}$$

$$c_2 = \frac{n}{12} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[3 + \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \tag{5.2}$$

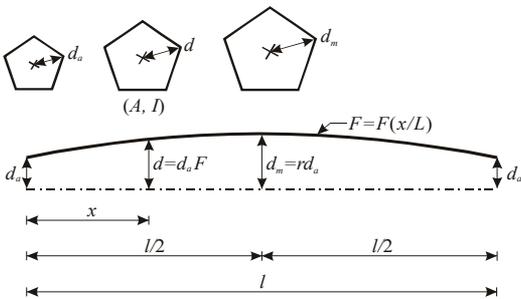


Fig. 1 Taper function of the object member

이상에서 구한 정다각형 단면의 A, I 를 일정체적 V 로 나타내기 위하여 식 (4)를 이용하여 V 를 다음과 같이 산정한다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_3 d_a^2 l \tag{6.1}$$

$$c_3 = \frac{1}{15} (8r^2 + 4r + 3) \tag{6.2}$$

식 (6)을 이용하면 식 (4.1)의 단면적 A , 식 (5.1)의 단면2차모멘트 I 를 일정체적 V 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A = \frac{V}{c_3 l} F^2 \tag{7}$$

$$I = c_2 \left(\frac{V}{c_1 c_3 l} \right)^2 F^4 \tag{8}$$

3. 수학적 모형

3.1 변위분리에 의한 Timoshenko 보 이론

Fig. 2는 자유진동하는 보의 동적 변위 y_x 에 대한 모드형상을 나타낸다. x 에서 A, I 는 식 (7), (8)에 정의되어 있다. 이 그림에서 $\psi_x (= dy/dx)$ 는 단면에 발생하는 동적 전(全)단면 회전각이고, θ_x 는 휨 모멘트에 의하여 발생하는 동적 휨 회전각(bending rotation), γ_x 는 전단력에 의하여 발생하는 동적 전단변형(shear deformation)이다.

자유진동을 조화진동으로 가정하면 동적 수직변위 $y_{x,t}$, 동적 휨 회전각 $\theta_{x,t}$, 동적 전단변형 $\gamma_{x,t}$ 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_{x,t} = y_x \sin(\omega_i t) \tag{9}$$

$$\theta_{x,t} = \theta_x \sin(\omega_i t) \tag{10}$$

$$\gamma_{x,t} = \gamma_x \sin(\omega_i t) \tag{11}$$

여기서 y_x 는 동적 수직변위의 진폭이고 x 만의 함수이다. 마찬가지로 θ_x, γ_x 는 동적 휨 회전각, 동적 전단 변형의 진폭이며 역시 x 만의 함수이다. 이후에 y_x, θ_x, γ_x 는 간단한 표기를 위하여 y, θ, γ 로 나타낸다. ω_i 는 rad/sec의 단위를 갖는 고유각진동수

이고, t 는 시간이다.

자유진동 해석에서 회전관성과 전단변형의 영향은 매우 중요하며 이를 모두 고려한 이론이 Timoshenko 보 이론이다⁽¹¹⁾. 이 연구에서 일정체적 변단면 보의 자유진동을 해석하기 위하여 Timoshenko 보 이론을 적용한다. 부재가 등단면인 경우에는 일반적으로 수직변위 y 에 대한 4계 상미분방정식으로 미분방정식을 유도한다. 서론에서 언급한 바와 같이 부재가 변단면인 경우에는 회전각 항들인 θ, γ 를 지배미분방정식에서 소거하는 일이 매우 복잡하고 난해하므로 이 연구에서는 변위 항들인 y, θ, γ 로 변위분리하여 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도한다.

Fig. 3은 자유진동하는 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형상태를 나타낸다. 이 미소요소에는 변위에 의한 동적 휨 모멘트 $M_{x,t}$, 동적 전단력 $Q_{x,t}$ 가 작용하고, 질량을 갖는 미소요소에는 동적 수직관성력 $F_{(y)x,t}$ 와 동적 회전관성우력 $M_{(I)x,t}$ 가 작용한다.

미소변위 이론에 의하여 $M_{x,t}$ 와 $Q_{x,t}$ 를 θ 와 γ 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$M_{x,t} = EI \frac{\partial \theta_{x,t}}{\partial x} = EI \frac{d\theta}{dx} \sin(\omega_i t) \quad (12)$$

$$Q_{x,t} = kGA \gamma_{x,t} = kGA \gamma \sin(\omega_i t) \quad (13)$$

위에서 E, G 는 보 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이며, k 는 단면형상계수이다. $EI(d\theta/dx)$ 와 $kGA\gamma$ 는 $M_{x,t}$ 와 $Q_{x,t}$ 의 진폭이며 x 만의 함수이다.

Fig. 2에서와 마찬가지로 Fig. 3에서도 전단면 회전각 $\partial y_{x,t}/\partial x (= \psi_{x,t})$ 은 $\theta_{x,t}$ 와 $\gamma_{x,t}$ 로 구성되며 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial y_{x,t}}{\partial x} = \psi_{x,t} = \theta_{x,t} + \gamma_{x,t} \quad (14)$$

식 (9)~(11)을 식 (14)에 대입하고 정리하면 다음의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \psi = \theta + \gamma \quad (15)$$

Fig. 3에서 모멘트에 대한 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{\partial M_{x,t}}{\partial x} + Q_{x,t} - M_{(I)x,t} = 0 \quad (16)$$

식 (12)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial M_{x,t}}{\partial x} = E \left(\frac{dI}{dx} \frac{d\theta}{dx} + I \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \sin(\omega_i t) \quad (17)$$

$\theta_{x,t}$ 에 의한 동적 회전관성우력 $M_{(I)x,t}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M_{(I)x,t} = \rho I \frac{\partial^2 \theta_{x,t}}{\partial t^2} = -\omega_i^2 \rho I \theta \sin(\omega_i t) \quad (18)$$

여기서 ρ 는 보 재료의 질량밀도이다.

식 (16)에 식 (13), (17), (18)을 대입하고 $d^2\theta/dx^2$ 에 대하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{\omega_i^2 \rho}{E} \theta - \frac{kGA}{EI} \gamma \quad (19)$$

Fig. 3에서 수직방향 힘의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

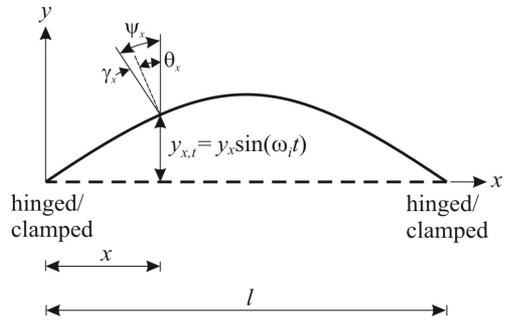


Fig. 2 Vertical deflection with the cross sectional rotations in Timoshenko beam

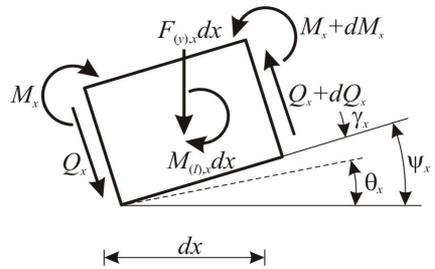


Fig. 3 Loads on beam element

$$\frac{\partial Q_{x,t}}{\partial x} - F_{(y)x,t} = 0 \quad (20)$$

식 (13)으로부터 다음의 편미분식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial Q_{x,t}}{\partial x} = kG \left(\frac{dA}{dx} \gamma + A \frac{d\gamma}{dx} \right) \sin(\omega_i t) \quad (21)$$

$y_{x,t}$ 에 의한 동적 수직관성력 $F_{(y)x,t}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_{(y)x,t} = \rho A \frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} = -\omega_i^2 \rho A y \sin(\omega_i t) \quad (22)$$

식 (21), (22)를 식 (20)에 대입하고 $d\gamma/dx$ 에 대하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{\omega_i^2 \rho}{kG} y - \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \gamma \quad (23)$$

3.2 무차원 지배미분방정식

일정체적 변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l} \quad (24,25)$$

$$\mu = \frac{G}{E}, \quad \lambda = \frac{l}{V^{1/3}}, \quad C_i = \omega_i l \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (26\sim 28)$$

여기서 (ξ, η) 는 각각 무차원 축방향 좌표, 무차원 수직변위의 진폭이다. μ 는 탄성계수비이고, λ 는 체적비이다. C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (7), (8)을 이용하면 dA/dx , dI/dx 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2V}{c_3 l} F \frac{dF}{dx} \quad (29)$$

$$\frac{dI}{dx} = 4c_2 \left(\frac{V}{c_1 c_3 l} \right)^2 F^3 \frac{dF}{dx} \quad (30)$$

위 식들에서 dF/dx 는 식 (3)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{4(r-1)}{l} \left(\frac{2x}{l} + 1 \right) \quad (31)$$

식 (29)~(31)을 식 (15), (19), (23)에 대입하고 식 (24)~(28)을 이용하면 다음과 같은 상미분방정식들을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \theta + \gamma \quad (32)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\frac{4}{f} \frac{df}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - C_i^2 \theta - \frac{c_1^2 c_3}{c_2} \frac{k\mu\lambda^3}{f^2} \gamma \quad (33)$$

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{C_i^2}{k\mu} \eta - \frac{2}{f} \frac{df}{d\xi} \gamma \quad (34)$$

위의 식들에서 무차원 형상함수식 $f, df/d\xi$ 는 식 (3), (24)를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$f = -4(r-1)\xi(\xi-1) + 1 \quad (35)$$

$$\frac{df}{d\xi} = -4(r-1)(2\xi-1) \quad (36)$$

이상에서 유도한 식 (32)~(34)는 수직변위 η , 휨 회전각 θ , 전단변형 γ 로 이루어진 변위분리에 의하여 유도된 일정체적 변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 연립 상미분방정식이다.

휨 모멘트 및 전단력의 모드형상 M, Q 를 무차원으로 나타내기 위하여 식 (2), (13)을 이용하여 다음과 같이 무차원 모드형상 m, q 로 나타낸다.

$$m = \frac{Ml^3}{EV^2} = \frac{c_2}{(c_1 c_3)^2} f^4 \frac{d\theta}{d\xi} \quad (37)$$

$$q = \frac{Ql}{EV} = \frac{k\mu}{c_3} f^2 \gamma \quad (38)$$

Timoshenko 보의 전단면 회전각 $d\eta/d\xi (= \psi)$ 는 식 (32)에서와 같이 휨 회전각 θ 와 전단변형 γ 로 구성된다. 따라서 식 (32)를 적분하면 무차원 수직변위 η 를 다음과 같이 휨에 의한 수직변위 η_θ 와 전단변형에 의한 수직변위 η_γ 로 구분하여 산정할 수 있다. 이 때 좌측 지점 $\xi=0$ 에서 $\eta_\theta=0, \eta_\gamma=0$ 이므로 각각의 적분상수는 “0”이 명백하다.

$$\eta = \int (\theta + \gamma) d\xi = \int \theta d\xi + \int \gamma d\xi = \eta_\theta + \eta_\gamma \quad (39)$$

위의 식을 이용하면 η 를 θ 와 γ 에 의한 구성성분인 η_θ, η_γ 로 구분하여 산정할 수 있다.

3.3 경계조건

$x=0$ 또는 $x=l$ 에서 보의 지점이 회전지점이면 변위 y 및 휨 모멘트 $M=EI(d\theta/dx)$ 이 발생하지 않으므로 $\xi=0$ 또는 $\xi=1$ 에서 다음과 같은 회전지점의 무차원 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta=0 \tag{40}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}=0 \tag{41}$$

$x=0$ 또는 $x=l$ 에서 보의 지점이 고정지점이면 수직변위 y 및 전단면 회전각 $\theta+\gamma(=d\eta/d\xi)$ 은 발생하지 않으므로 $\xi=0$ 또는 $\xi=1$ 에서 다음과 같은 고정지점의 무차원 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta=0 \tag{42}$$

$$\theta+\gamma=0 \tag{43}$$

4. 수치해석 예 및 토의

4.1 수렴해석 및 검증

위에서 유도한 변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식 (32)~(34)를 경계조건식 (40)~(43)에 적용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수 C_i 와 변위들의 모드형상 η, θ, γ 와 휨 모멘트 및 전단력의 모드형상 m, q 을 계산할 수 있다. 상미분방정식 (32)~(34)의 수치적분은 Runge-Kutta 법⁽¹²⁾을 이용하였고, 상미분방정식의 고유치인 C_i 는 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법⁽¹²⁾을 이용하여 계산하였다. 이러한 상미분방정식의 수치적분과 비선형 방정식의 해를 구하는 문제들은 다수의 문헌들⁽¹³⁻¹⁵⁾에서 그 효율성이 입증된 바 있다.

이상의 수치해석 과정을 이용하여 보의 변수들인 지점조건, 정다각형 변수 n , 단면형상계수 k , 탄성계수비 μ , 단면비 r , 체적비 λ 를 입력하면 무차원 고유진동수 C_i 와 모드형상 $\eta, \psi, \theta, \gamma, m, q$ 를 계산할 수 있는 FORTRAN 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 이 연구에서 단면은 정다각형 단면이므로 $n \leq 4$ 이면 $k=0.833$ 이고 $n \geq 5$ 이면 $k \cong 0.9$ 이다. 나머지 변수 μ, r, λ 는 변수연구에 사용하였다. 최저차 제4모드까지 고유진동수 및 모드형상을 산정하였다.

수치해석 결과의 정확도를 확보하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 수치해의 정확도는 상미분방정식을 수치적분하기 위한 Runge-Kutta 법에서 단계길이 $\Delta\xi$ 와 밀접한 관계가 있다. Fig. 4는 그림에 나타낸 조건을 갖는 보의 무차원 고유진동수 C_i 와 시간길이의 분할개수 $1/\Delta\xi$ 사이의 관계 즉, 수렴해석의 결과를 나타낸다. 이 그림에서와 같이 C_i 는 $1/\Delta\xi=20$ 즉 단계길이 $\Delta\xi=0.05$ 에서 충분한 정도로 수렴하였다. 이후의 수치해석에서는 정확도를 확보하기 위하여 $1/\Delta\xi=100$ 즉, 단계길이 $\Delta\xi=0.01$ 로 수치해석을 실시하였다. 이 경우 수치해들은 $1/\Delta\xi=200$ 와 비교하여 유효숫자 3자리의 정확도를 갖는다.

이 연구의 이론을 검증하기 위하여 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수를 각각 계산하여 서로 비교하였다. SAP 2000의 고유진동수 계산에서 Timoshenko 보 이론을 적용하기 위하여 보 단면의 전단(剪斷)면적을 자유진동 해석에 고려하였다. SAP 2000의 입력변수는 다음과 같다.

- 시간길이: $l=0.5$ m
- 원형단면: $d_a=0.02$ m; $d_m=0.03$ m
- 체적 : $V=4.241 \times 10^{-3}$ m³
- 재료(강) : $E=2 \times 10^{11}$ N/m²;
 $G=8 \times 10^{10}$ N/m²;
 $\rho=7850$ Nsec²/m⁴
- 지점조건: 회전-회전; 회전-고정; 고정-고정

위의 입력변수를 식 (26)~(28)의 무차원 변수들에 적용하면 다음과 같이 무차원 입력변수들로 계산된다.

- $\mu=0.4$; $r=1.5$; $\lambda=3.09$

이상의 무차원 입력변수를 이용하여 이 연구의 무차원 고유진동수 C_i 를 산정하고, 식 (28)을 이용하면 다음과 같이 C_i 를 고유진동수 F_i (Hz)로 환산할 수 있다.

$$F_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{C_i}{2\pi l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1607 C_i \text{ Hz}$$

이 연구와 SAP 2000에서 계산한 고유진동수의 결과를 Table 1에 수록하였다. 이 표에서 보는 바와 같이 이 연구와 SAP 2000의 두 결과는 우수하게

근접하여 이 연구의 이론 및 수치해석 방법이 모두 타당함을 알 수 있었다. 이 표에서 H는 회전지지점, C는 고정지지점을 나타내며, 이후 모두 같은 의미를 갖는다.

4.2 변수연구

Table 2는 회전관성이 무차원 고유진동수 C_i 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 표에서 E_R 은 회전관성 지표이다. 회전관성을 무시하는 경우 $E_R=0$ 이고, 고려하는 경우 $E_R=1$ 이다. $E_R=0$ 이면, 식 (33)에서 $C_i^2\theta$ 이 회전관성 항이므로 이 항을 식 (33)에서 삭제하면 된다. 수치해석에서 적용한 무차원 입력변수들은

$n=4, \mu=0.4, r=1.5, \lambda=5$ 이다. 회전관성은 C_i 를 감소시키는 요인이며, 그 영향력은 저차모드보다 고차모드에서 더 크다. 예를 들어 회전-회전 지점에서 제1모드는 영향력이 0.19%이지만 제4모드는 2.86%으로 비교적 큰 것을 알 수 있다.

Table 3은 탄성계수비 μ 가 무차원 고유진동수 C_i 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 여기서 $\mu=0.5$ 는 이론적으로 가장 큰 값을 나타낸다. 수치해석에서 적용한 무차원 입력변수 값들은 회전-고정 지점, $n=5, r=1.5$ 이다. 이 표에서 μ 가 증가하면 C_i 는 증가한다. μ 가 증가하면 전단강성이 증가하므로 C_i 값이 더 커지는 것은 당연한 결과이다. 그 영향력은 저차모드에서 보다 고차모드에서 더 크다. 또한 작은 체적비에서 그 영향력은 더 크다. 예를 들어 $\lambda=7$ 인 $i=4$ 에서 증가율은 1.56%에 불과하지만 $\lambda=3$ 인 경우 증가율은 8.52%로 비교적 크다.

Table 4는 정다각형 변수 n 별 무차원 고유진동수 C_i 를 나타낸다. n 이 증가하면 C_i 는 감소한다. 같은 단면적일 경우 정다각형의 변수가 작을수록 휨 강성 EI 는 더 커지는 것은 잘 알려진 사실이므로 n 이 작을수록 C_i 가 더 커지는 것은 당연한 결과이다. 회전-회전 보인 경우 정삼각형 ($n=3$) 단면은 원형 ($n=\infty$) 단면과 비교하여 제1모드 ($i=1$)의 C_1 값이 9.5% ($0.2823/0.2579=1.095$)

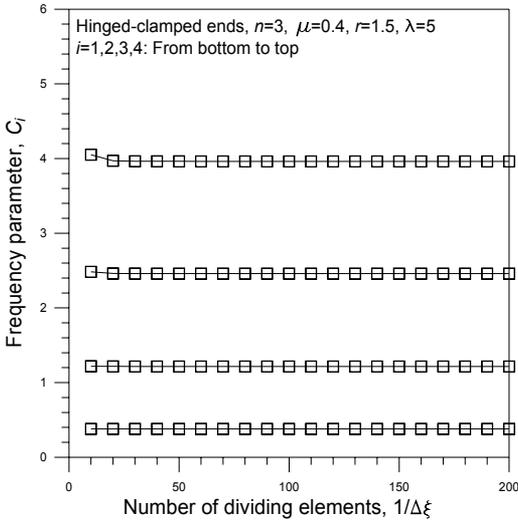


Fig. 4 Convergence analysis

Table 1 Comparisons of natural frequencies F_i between this study and SAP 2000

End constraints	References	Natural frequencies, F_i (Hz)			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
H-H	This study	829	2770	5433	8369
	SAP 2000	829	2778	5448	8380
H-C	This study	1123	3307	6152	9219
	SAP 2000	1121	3305	6165	9265
C-C	This study	1484	3905	6933	10126
	SAP 2000	1476	3880	6893	10067

Table 2 Effect of rotatory inertia on frequency parameter, C_i

End constraints	E_R	Frequency parameter, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
H-H	0	0.2639	0.9686	2.0943	3.5224
	1	0.2634	0.9586	2.0526	3.4216
	Deviation	0.19	1.03	1.99	2.86
H-C	0	0.3542	1.1533	2.3693	3.8757
	1	0.3534	1.1405	2.3205	3.7642
	Deviation	0.23	1.11	2.06	2.88
C-C	0	0.4632	1.3596	2.6671	4.2506
	1	0.4620	1.3435	2.6109	4.1287
	Deviation	0.26	1.18	2.11	2.87

* Deviation(%)=(1 - $C_{i,E_R=1}/C_{i,E_R=0}$) × 100

Table 3 Effect of elasticity ratio μ on frequency parameter, C_i

λ	μ	Frequency parameter, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
3	0.35	0.7162	2.0853	3.8474	5.7271
	0.40	0.7203	2.1195	3.9458	5.9187
	0.45	0.7235	2.1471	4.0268	6.0789
	0.50	0.7261	2.1698	4.0947	6.2148
	Deviation	1.38	4.05	6.43	8.52
5	0.35	0.3482	1.1231	2.2837	3.7017
	0.40	0.3487	1.1286	2.3049	3.7539
	0.45	0.3491	1.1329	2.3218	3.7960
	0.50	0.3494	1.1363	2.3356	3.8305
	Deviation	0.34	1.18	2.28	3.48
7	0.35	0.2120	0.7006	1.4704	2.4693
	0.40	0.2122	0.7019	1.4762	2.4852
	0.45	0.2122	0.7030	1.4807	2.4977
	0.50	0.2123	0.7038	1.4844	2.5079
	Deviation	0.14	0.46	0.95	1.56

* Deviation(%) = $(C_{i,\mu=0.50} / C_{i,\mu=0.35} - 1) \times 100$

Table 4 Effect of side number n on frequency parameter C_i

End constraints	n	Frequency parameter, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
H-H	3	0.2823	1.0223	2.1752	3.6021
	4	0.2634	0.9586	2.0526	3.4216
	5	0.2600	0.9487	2.0387	3.4119
	∞^*	0.2579	2.0245	0.9415	3.3906
H-C	3	0.3790	1.2164	2.4590	3.9623
	4	0.3534	1.1405	2.3205	3.7642
	5	0.3487	1.1286	2.3049	3.7539
	∞	0.3458	1.1200	2.2889	3.7305
C-C	3	0.4957	1.4330	2.7665	4.3455
	4	0.4620	1.3435	2.6109	4.1287
	5	0.4557	1.3293	2.5934	4.1177
	∞	0.4519	1.3191	2.5754	4.0920

* $n = \infty$: circular cross section

증가한다. 또한 회전-회전 보의 정오각형 ($n=5$) 단면은 원형 단면과 비교하여 제1모드의 C_1 값이 99.2% ($0.2579/0.2600=0.992$)로 접근한다.

Fig. 5는 $C_i - r$ 의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 이 그림의 상단에 보의 입력변수를 나타내었다. 단면비 r 이 증가함에 따라 C_i 는 증가하다 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. C_i 의 감소비율은 증가비율에 비하여 현저히 작으므로 약 $r=1$ 이후에는 C_i 값의 변화가 거의 없다.

Fig. 6은 $C_i - \lambda$ 의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 이 그림의 상단에 보의 입력변수를 나타내었다. 체적비 λ 가 증가함에 따라 C_i 는 증가하다 다시 감소하는 경향을 보인다. $\lambda \leq 1$ 이면 실제 구조물로 성립하기는 어렵다. $\lambda=1$ 이면 $V=l^3$ 이 되어 구조물의 강성이 커져 $\lambda=1$ 보다 작은 값에서 C_i 는 급격하게 증가하며, 모드 사이의 C_i 값들은 매우 작은 차이를 나타내는 특성을 보인다. $\lambda \geq 2.5$ 이상의 범위에서는 λ 가 증가하면 C_i 는 감소한다.

4.3 모드형상

Fig. 7은 수직변위 η 와 전단면 회전각 ψ 의 모드형상 및 휨 모멘트 m 과 전단력 q 의 모드형상을 나타낸다. 이 그림에서 ■로 표시한 변위 및 합응력의 최대진폭의 위치를 파악할 수 있어 공용 중인 구조물의 피로현상 등에 대비한 동적 자료로 활용할 수 있다. 이 그림에 ▲로 표시한 제2모드의 무변위 위치(nodal point)를 파악할 수 있어 필요에 따라 여기에 횡방향 변위를 구속하면 $C_2 = 47.29$ 의 제2고유진동수가 $C_1 = 14.63$ 의 제1고유진동수를 대신하게 되어 제1고유진동수를 크게 증가시킬 수 있다. 마찬가지로 합응력 m, q 의 모드형상에서도 ■로 표시한 바와 같이 최대 휨 모멘트 및 최대 전단력의 위치를 파악할 수 있어 구조물의 유지관리에 실용적인 동적 자료로 활용할 수 있다.

Table 5는 최대진폭과 보 중앙($\xi=0.5$)에서 수직변위 η 및 전단면 회전각 ψ 의 휨 회전각 θ 와 전단 변형 γ 에 의한 구성비율(%)을 나타낸다. 수치해석에 사용한 보의 입력변수는 Fig. 7과 같다. 이 표에 최대진폭 η 와 ψ 의 발생위치를 표시하였다. ψ 의 최대진폭의 위치는 모드번호 i 에 상관없이 모두 $\xi=0$ 즉 회전지점에서 발생하였다. 이 표에서와 같이 η 및 ψ 의

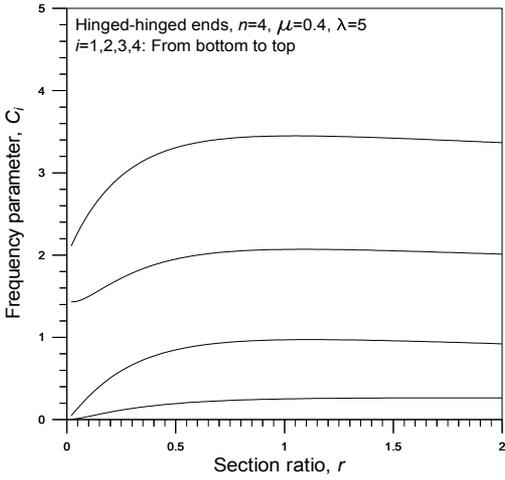


Fig. 5 C_i versus r curves

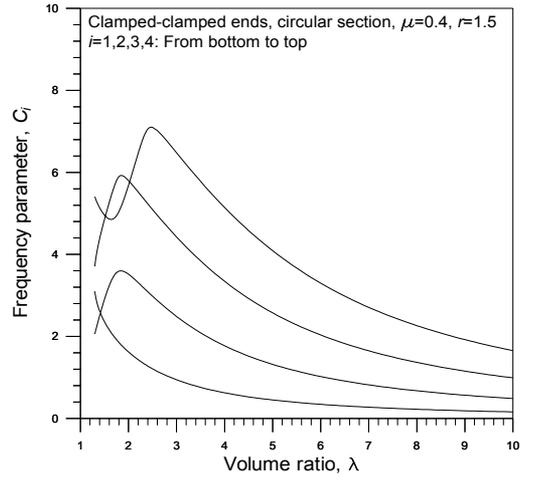


Fig. 6 C_i versus λ curves

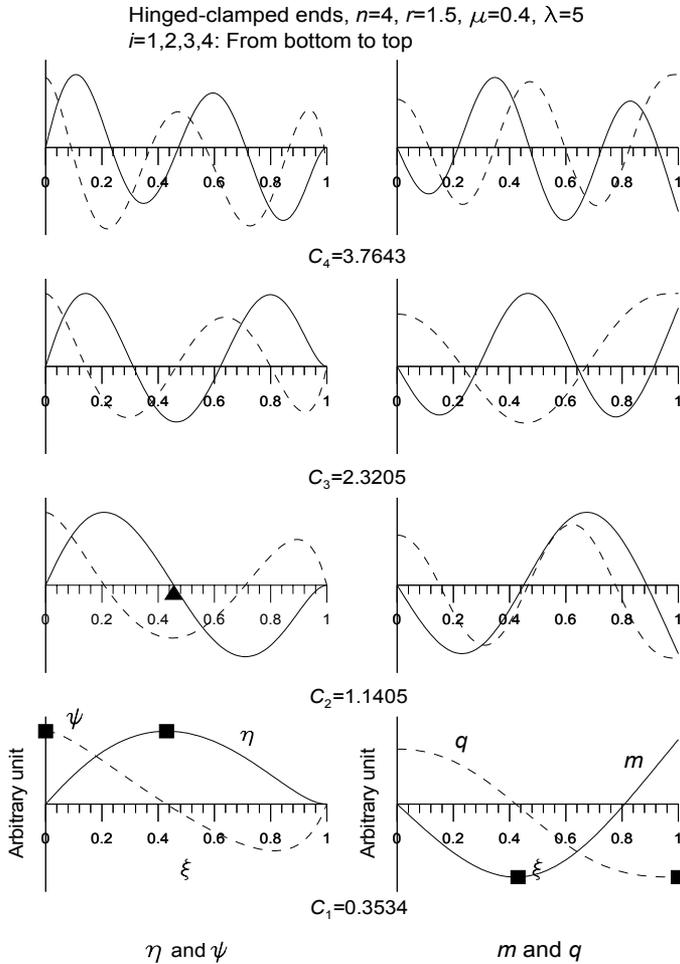


Fig. 7 Example of mode shapes

Table 5 Component ratios of vertical displacement η and total rotation angle Ψ by bending rotation θ and shear deformation γ

• Ratios at the point of maximum amplitude

i	Ratio of η by η_θ and η_γ			Ratio of Ψ by θ and γ		
	ξ	$\eta_\theta(\%)$	$\eta_\gamma(\%)$	ξ	$\theta(\%)$	$\gamma(\%)$
1	0.43	96.3	3.7	0	95.4	4.6
2	0.21	88.8	11.2	0	88.5	11.5
3	0.14	81.5	18.5	0	81.3	18.7
4	0.11	73.7	26.3	0	73.8	26.2

• Ratios at the mid-span($\xi=0.5$)

i	Ratio of η by η_θ and η_γ			Ratio of Ψ by θ and γ		
	η^*	$\eta_\theta(\%)$	$\eta_\gamma(\%)$	Ψ^*	$\theta(\%)$	$\gamma(\%)$
1	0.975	96.3	3.7	-0.167	95.9	4.1
2	-0.264	91.4	8.6	-0.692	92.4	7.6
3	-0.719	89.2	10.8	0.209	83.8	16.2
4	0.259	75.2	24.8	0.568	73.7	26.3

* Relative amplitude with maximum amplitude is 1.

최대진폭의 구성비율은 모두 θ 에 의한 구성비율이 γ 에 의한 구성비율보다 모두 크다. 그러나 i 가 증가할수록 γ 에 의한 구성비율이 더 커지는 것을 알 수 있다. 예로서 최대진폭 η 의 경우 $i=1$ 모드에서 γ 에 의한 구성 비율은 3.7%에 불과하지만 $i=4$ 모드에서는 그 영향력이 26.3%로 매우 크게 증가한다. 보 중앙의 경우 η^* , Ψ^* 는 최대진폭을 “1”로 하였을 때 상대진폭의 크기이다. 이 경우에도 상대진폭의 구성비율은 모두 θ 에 의한 구성비율이 모두 크지만 $i=4$ 모드의 η^* 의 경우에는 γ 에 의한 구성비율이 24.8%로 매우 큼을 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구는 회전관성과 전단변형을 동시에 고려한 일정체적 변단면 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 보의 단면은 정다각형 단면이고 단면깊이의 형상함수는 포물선으로 택하였다. 이러한 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 변위분리에 의하여 유도하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 모드형상을 산출하였다. 이 연구의 수치해석 결과를 분석하여 다음의 결과를 얻었다.

(1) 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수는 근접하여 이 연구의 타당성을 검증할 수 있었다.

(2) 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이며 저차모드에서 보다 고차모드에서 그 영향력이 크다.

(3) 탄성계수비가 증가하면 고유진동수는 증가하며 고차모드에서 그리고 더 작은 체적비에서 그 영향력은 크다.

(4) 정다각형의 변수가 작을수록 무차원 고유진동수는 크다.

(5) 모드형상의 진폭에 대한 구성은 휨 회전각에 의한 구성비율이 전단변형에 의한 구성비율보다 크다.

(6) 모드형상의 진폭에 대한 전단변형의 영향은 저차모드에서 보다 고차모드에서 훨씬 크다.

후 기

이 연구는 2012년 원광대학교 교내연구비의 지원을 받았습니다. 제1저자는 연구비 지원에 감사합니다.

참 고 문 헌

- (1) Takahashi, I., 1999, Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force, Computers & Structures, Vol. 71, pp. 585~591.
- (2) Zhou, D., 2000, Free Vibration of Multi-span Timoshenko Beams using Static Timoshenko Beam Functions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 4, pp. 725~734.
- (3) Zhong, H. and Guo, Q., 2003, Nonlinear Vibration of Timoshenko Beams using the Differential Quadrature Method, Nonlinear Dynamics, Vol. 32, pp. 223~234.
- (4) Yardimoglu, B. and Yildirim, T., 2004, Finite Element Model for Vibration Analysis of Pre-twisted Timoshenko Beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 273, pp. 741~754.
- (5) Lee, B. K., Oh, S. J., Jin, T. K. and Lee, J. K., 1999, Coupled Flexural-torsional Vibrations of Timoshenko Beams of Monosymmetric Cross-section Including Warping, Transactions of the Korea Society

for Noise and Vibration Engineering, Vol. 9, No. 5, pp. 1012~1018.

(6) Ho, S. H. and Chen, C. K., 2006, Free Transverse Vibration of an Axially Loaded Non-uniform Spinning Twisted Timoshenko Beam using Differential Transform, International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 48, pp. 1323~1331.

(7) Prokić, A., 2006, On Fivefold Coupled Vibrations of Timoshenko Thin-walled Beams. Engineering Structures, Vol. 28, pp. 54~62.

(8) Kaya, M. O. and Ozgumus, O. O., 2007, Flexural-torsional-coupled Vibration Analysis of Axially Loaded Closed-section Composite Timoshenko Beam by using DTM, Journal of Sound and Vibration, Vol. 306, pp. 495~506.

(9) Sapountzakis, E. J. and Dourakopoulos, J. A., 2009, Nonlinear Dynamics Analysis of Timoshenko Beam by BEM, Nonlinear Dynamics, Vol. 58, pp. 307~318.

(10) Li, J., Li, X. and Hua, H., 2009, Free Vibration Analysis of Third-order Shear Deformable Composite Beams using Dynamic Stiffness Method.

Archive of Applied Mechanics, Vol. 79, pp. 1083~1098.

(11) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W., 1974, Vibration Problems in Engineering, Wiley, USA.

(12) Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., 1969, Applied Numerical Methods, John Wiley and Sons, USA.

(13) Lee, T. E. and Lee, B. K., 2011, Free Vibration Analysis of Parabolic Hollowed Beam-columns with Constant Volume, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 4, pp. 384~391.

(14) Lee, B. K., Oh, S. J., Mo, J. M. and Lee, T. E., 2008, Out-of-plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Curvature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 318, pp. 227~246.

(15) Lee, B. K., Lee, T. E. and Choi, J. M., 2011, Dynamic Optimal Arches with Constant Volume, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Accepted for Publication in September, 2011.