韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2012. 11. 제 51권, 제 4호, 471-484.

J. KSME(Math. Edu) ISSN 1225-1380
November. 2012, Vol. 51 No. 4, 471-484.

원과 관련된 문제에서 각과 호의 관점으로의 접근

강 정 기(남산중학교)

Ⅰ. 서론

피타고라스에 의하면, 원은 모든 평면도형 중에서 가장 아름다운 도형이라 하였다. 원은 여러 가지 흥미로운 성질을 가지고 있어 옛날부터 많은 관심의 대상이 되어 왔다. 또, 우리 주위에서 원 모양과 그 성질을 이용한 것을 쉽게 발견할 수 있는 만큼 그 응용이 광범위하다(조태근 외, 2002). 이러한 원은 초등 수학에서부터 대학 수학에 이르기까지 꾸준히 등장하는 소재이다. 원에 대해 그 성질을 이해하는데 있어 중요한 요소로 호와 원주각이 있다. '중학교 수학 1'의 원 단원에서 등장하는 호는 부채꼴의 개념, 호와 중심각의 관계 등을 이해하는데 있어 중요한 개념에 해당한다. 또 '중학교 수학 3'의 원 단원에서 처음으로 등장하는 원주각은 원과 두 직선이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계 및 원의 접선과 할선 사이의 선분의 길이의 비 등 원의 다양한 성질을 이해하기 위하여 반드시 알아야 하는 학습 내용이다.

중학교 수학에서 중요한 위치를 차지하는 원주각에 대한 연구는 국・내외를 통틀어 많지 않다. 국내 석사학위 논문으로 강현수(2003), 정선화(2004)의 연구 이외에는 찾기 힘들었다. 한국수학교육학회, 대한수학교육학회, 한국학교수학회 등에서 간행되는 국내 논문을 비롯하여 'Google 학술 검색'에서 원주각을 검색해 보았으나, 관련 연구를 찾아내기 어려웠다. 강현수(2003)는 Van Hiele 이론을 기반으로 하여 GSP를 활용한 학습 자료를 개발하려고 하였는데, 이 연구에서 원주각을 그 소재로 이용하였다. GSP를 활용한 원주각에 대한 학습자료 개발이 연구의 핵심이었으며, 문제 해결에 대한 교수학적 논의는 이루어지지 않았다. 마찬가지로 정선화(2004)는 플래시를 이용한 웹 기반 교육을 구체화하려 시도하였으며, 이 연구에서도 원주각을 그 소재로 하였다. 이 연구는 원주각의 개념을 중점으로 다루기는 하였지만, 그 문제해결은 깊이 있게 다루지 못하였다. 하지만 원주각은 중등 기하 단원의 다양한 내용을 이해하기 위해 반드시 알아야 하는 개념이고, 또 이 개념은 여러 문제 상황에 적용되고 있으므로 원주각의 개념과 문제 해결에 대한 보다 많은 연구가 필요해 보인다.

원주각은 주어진 호 위에 있지 않은 원주 위의 한 점에서 주어진 호의 양 끝 점에 그은 두 개의 현이 만드는 각으로(우정호 외, 2009a), 원에서 중심각과 더불어 등장하는 각의 개념이다. 즉, 원주각은 일종의 각이며, 각의 하위 범주에 속하는 개념이다. 원주각은 일반적인 각의 개념이 지닌 특징도 가지고 있지만 '호와의 관련성'이라는 독특한 특징이 있다. 이것은 '주어진 호에 대한 원주각'이라고 정의되는 만큼 호 없이 독립적으로 제시될 수 있는 개념이 아니다. 따라서 원주각과 관련된 정리에서 호는 필수적으로 등장하게 된다. 이를 테면, '한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같다'와 같은 중요한 정리에서 호는 필연적으로 나타난다. 이러한 관련성을 고려해볼 때, 원에서 호는 각의 측면에서 야기된 어려움을 도울 수 있는 요소가 될 수 있을 것으로 생각된다. 마찬가지로 원에서 각은 호의 측면에서 야기된 어려움을 도울 수 있는 요소일 수 있다. 따라서 원과 관련된 문제[2]에서 주요 요소인 각과 호를 모두 이용한 접근이 필요하며, 두 요소 중 어느 한 요소에만 치우쳐 문제를 해결하려는 것은 바람직하지 않다.

하지만 대다수의 교과서에 제시되는 원과 관련된 문제의 해법은 각에 그 초점이 맞추어져 있으며, 이들은 주어진 중심각이나 원주각을 문제 해결에 적합한 형태의

* 접수일(2012년 10월 9일), 게재확정일(2012년 11월 21일)
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 원주각, 보조선, 각의 관점, 호의 관점

2) 본 연구에서 '원과 관련된 문제'는 원에서 원주각이나 중심각, 호 등에 의해 해결되는 문제를 총칭함.

다른 위치의 각으로 변환하는 과정을 필요로 하는 것이 대부분이다. 여기서 변환의 대상과 결과가 모두 각이므로 이들 문제 해결은 자연스럽게 각에 그 초점이 맞추어지게 된다(강신덕 외, 2009; 김원경 외, 2009; 김홍종 외, 2009; 박규홍 외, 2009; 박영훈 외, 2009; 박종률 외, 2009; 신항균 외, 2009, 우정호 외, 2009a; 이준열 외, 2009a). 이러한 방식은 '각의 관점에서의 접근[3]'으로 볼 수 있으며, 이때 호는 상대적으로 경시되는 면이 있어 보인다. 따라서 원과 관련된 문제에서 각의 측면에 치우친 기존의 관점을 개선하고, 문제 해결의 주요 요소인 각과 호 모두를 적절히 활용할 때의 이점을 살펴볼 필요가 있다.

그런데 원과 관련된 문제에 대해 대부분의 교과서는 각의 관점으로 접근하고 있기 때문에, 이 관점은 충분히 조망된 상태라고 볼 수 있다. 반면 호의 관점에서의 접근은 자주 접해보지 못한 것이기 때문에, 이 관점에서 문제 해결을 조망해 보는 것이 필요하다고 생각하였다. 즉, 본 연구에서는 각의 관점으로의 접근은 이미 익숙한 상태로 보았으며, 친숙하지 않은 호의 관점에서 원과 관련된 문제를 조망할 필요가 있다고 생각되었다. 이에 본 연구에서는 원과 관련된 문제의 해결을 호의 관점에서 재조명하는 것을 연구 문제로 설정하였다. 즉, 원과 관련된 문제를 호의 관점에서 해결하는 방법을 구체화하며, 호와 각의 관점에서의 접근을 상호 비교해 보고, 이를 통해 원과 관련된 문제에서 호 역시 각 못지않게 문제 해결을 도울 수 있는 정보임을 밝히고자 한다. 본 연구의 결과가 수학을 가르치는 교사 및 학습하는 학생들에게 도움이 될 수 있길 기대한다.

Ⅱ. 원주각과 호 그리고 원과 관련된 문제의 해법

1. 원주각과 호

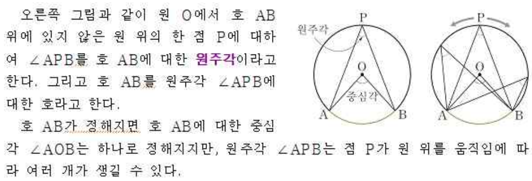
한 원에서 원주각과 호의 관련성은 각과 호의 관련성으로부터 고찰될 필요가 있다. 한 원에서 호는 각과 동일시될 만큼 각과 밀접한 관련성을 지니고 있다. 호가 각과 동일시되는 대표적인 예가 곧 라디안(rad)이다. 반지름의 길이에 대한 호의 상대적인 크기인 $l_0 = \frac{l}{r}$는 반지름의 길이가 1인 원에서는 크기가 $l_0$rad 인 중심각에 대한 호의 길이로 볼 수 있으므로 일반적으로 각의 측도로 사용하는 라디안은 반지름의 길이가 1인 원에서는 호의 측도로 간주될 수 있다(강미광, 2011). 이것은 반지름이 1로 제한될 때 호의 길이를 각의 크기로 간주할 수 있음을 의미한다. 이를 보다 수학적인 관점에서 표현하면 다음과 같다.

$\mathrm{X} = \{x \mid x \in \mathrm{R}^+ \cup \{0\},\ x\text{는 라디안}\}$,
$\mathrm{Y} = \{x \mid x\text{는 반지름이 1인 원의 호의 길이}\}$라 하자.
이 때 $\Omega : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$이 $\Omega(x) = x$로 정의된 함수라면
Ω은 전단사 함수이다.

이는 호의 길이와 라디안인 각의 크기는 집합적으로 동일시할 수 있는 개념임을 의미한다. 한편, 라디안의 개념이 아닌 보다 일반적인 각의 관점에서서도 호의 길이와 각의 크기는 동일시할 수 있는 개념이다. 이는 라디안이 아닌 각의 크기의 모임을 정의역으로, 라디안인 각의 크기의 모임을 치역으로 하는 전단사함수가 존재하기 때문이다. 이를 테면, 도($^\circ$)를 단위로 갖는 각의 크기의 모임을 X, 라디안인 각의 크기의 모임을 Y라 할 때, 함수 $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$이 $\phi(x) = \frac{\pi}{360}x$로 정의된 함수는 전단사 함수이다. 이렇게 라디안이 아닌 각의 크기의 모임을 정의역으로, 라디안인 각의 크기의 모임을 치역을 갖는 전단사함수가 존재하므로, 라디안이 아닌 각의 크기의 모임을 정의역으로 반지름이 1인 원의 호의 길이의 모임을 치역으로 갖는 전단사함수로 두 전단사함수의 합성함수를 구성할 수 있다. 마찬가지로 반지름이 1인 원의 호의 길이의 모임을 정의역으로, 반지름이 r인 원의 호의 길이의 모임을 치역으로 하는 전단사함수가 존재하므로, 결국 일반적인 각의 크기의 모임을 정의역으로, 반지름이 일정한 원의 호의 길이의 모임을 치역으로 하는 전단사함수가 존재하게 된다. 따라서 일반적인 관점에서 각의 크기와 호의 길이는 집합적으로 동형이며, 이는 각

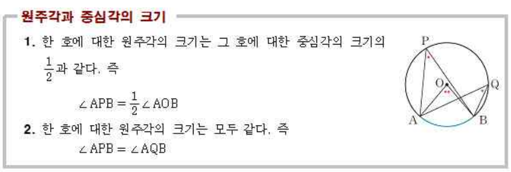
3) 본 연구에서 '각의 관점에서의 접근'은 주어진 원주각이나 중심각을 관련된 중심각이나 원주각으로 변환하여 원과 관련된 문제 해결을 모색하는 접근을 의미한다.

과 호 두 개념은 원에서 동일시할 수 있음을 의미한다. 이에 대해 강미광(2011)은 모든 각의 집합은 반지름이 r인 원에서의 호의 집합과 일대일 대응이 되므로 집합적으로 각과 호는 동일시 할 수 있다고 지적하였다. 이러한 점을 고려하여 원주각과 호의 관련성에 대해 보다 구체적으로 살펴보도록 하자. 우정호 외(2009a)는 원주각의 정의를 다음 [그림 1]과 같이 제시한다.



[그림 1] 원주각의 정의

위 정의를 보면 원주각 $\angle APB$는 그 자체로만 존재하는 개념이 아니며, 호 AB와 관련하여 생성된 개념임을 알 수 있다. 호 없이 원주각은 독립적으로 생성된 개념이 아니며, 따라서 원주각 $\angle APB$는 '호 AB에 대한 원주각'이라고 정의되는 것이다. 이 처럼 한 원에서 호와 원주각은 독립적인 요소가 아닌 서로 결합된 요소임을 알 수 있다. 따라서 원주각과 관련된 대부분의 성질은 호와 연관되어 제시되고 있다. 원주각과 중심각의 관계에 대한 다음 [그림 2]는 이와 같은 점을 분명히 보여준다.



[그림 2] 원주각과 중심각의 관계(우정호 외, 2009a)

이 정리에서 원주각은 그 자체로 독립적으로 제시되는 것이 아니라 '호에 대한 원주각'으로 표현됨을 알 수 있다. 이러한 사실로 볼 때, 원주각은 호와 분리해서 생각할 수 있는 개념이 아님을 알 수 있다. 이외에도 '반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.', '원의 접선과 그 접점에서 그은 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.' 등의 원주각과 관련한 중요한 정리에서 원주각은 호와 관련지어 등장함을 알 수 있다.

한편 원 O에서 호 AB가 정해지면 호 AB에 대한 중심각 $\angle AOB$는 하나로 정해지지만, 호 AB에 대한 원주각 $\angle APB$는 점 P의 위치에 따라 여러 개 있을 수 있다. 즉, 고정된 호 AB에 대한 원주각 $\angle APB$는 무수히 많이 존재하는 반면, 무수히 많이 존재하는 원주각 $\angle APB$에 대한 호는 오직 하나임을 알 수 있다. 호 AB는 점 P의 위치와 관계없이 오직 하나 존재하는 불변 요소인 것이다. 가변적인 원주각에 비해 호는 불변성을 지니고 있기에 호 역시 문제 해결의 중요한 실마리가 될 수 있다. 이와 같은 맥락에서 도종훈(2009)은 수학 문제 해결 과정에서 발상의 전환이 유의미하기 위해서는 문제 상황에 내재된 불변성의 인식이 필요하다고 하였다. 한편, 호 AB에 대한 원주각은 무수히 많이 존재하지만, 이들의 크기는 모두 동일하다. 따라서 호 AB에 대한 원주각의 크기는 오직 하나 존재하며, 결국 주어진 호의 길이는 원주각의 크기와 동일시 가능하게 된다.

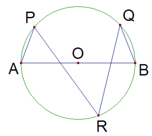
이상의 논의로부터 원에서 각과 호는 동일시할 수 있는 개념이며, 여기서의 각은 중심각에 해당하였다. 그러나 원주각 개념 역시 호와 분리되어 등장하는 개념이 아니며, 호와 관련지어 제시되고 있다. 주어진 호에 대한 원주각은 무수히 많지만, 주어진 호와 이 호에 대한 원주각의 크기는 오직 하나 존재한다. 이러한 점을 고려하면 주어진 호에 대한 원주각의 크기는 그 호의 길이와 동일시할 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 이러한 측면에서 원주각 문제의 해결을 논의해 보고자 한다.

2. 교과서에서 원과 관련된 문제의 해법

본 절에서는 교과서에 등장하는 원과 관련된 문제의 해법에 대해 논의해 보고자 한다. 다음 [문제 1]은 이준열 외(2009b)에 등장하는 문제와 그 해법이다.

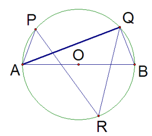
[문제 1]

다음 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\angle APR = 50°$일 때, $\angle BQR$의 크기를 구하여라.



[해법]

다음 그림과 같이 $\overline{AQ}$를 그으면 $\angle AQR = \angle APR = 50^\circ$



이때, $\angle AQB$는 반원에 대한 원주각이므로 $\angle AQB = 90^\circ$이다. 따라서 $\angle BQR = \angle AQB - \angle AQR = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

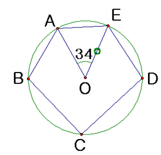
[문제 1]의 풀이의 관점은 각의 관점이라 볼 수 있다. 문제에서 주어진 정보는 $\angle APR = 50^\circ$이고, 이 정보를 문제 해결에 적합한 다른 원주각으로 변환하는 것이 필요하다. 이것은 각을 대상으로 각의 변환을 모색한다는 점에서 각에 초점이 맞추어진 각의 관점이라 볼 수 있다. 좀 더 구체적으로 보면, [문제 1]의 풀이에서 보조선 $\overline{AQ}$는 문제 해결의 결정적 요소로 작용한다. 보조선 $\overline{AQ}$는 호 AR에 대한 원주각 $\angle APR$와 원주각 $\angle AQR$을 볼 수 있게 하며, 원주각 $\angle AQR$는 구하고자 하는 $\angle BQR$과 결합될 때 반원에 대한 원주각이 되므로 절묘하게 문제 해결을 돕게 된다. 즉, 이 문제에서의 해법은 각의 관점에서 무수히 많은 원주각 중 문제 해결에 적합한 원주각을 찾아야 하며, 이를 위해 보조선의 도입이 필요한 것이다.

그런데 문제 해결에 적합한 보조선을 도입하는 것은 쉬운 일이 아니다. 임재훈・박경미(2002)는 학생들이 기하 문제를 해결할 때 어려움에 직면하는 이유 중의 하나는 문제의 해결에 필요한 보조선을 어떻게 그어야 할지 모르는 것이며, 적절한 보조선을 긋지 못하면 문제의 해결은 그 출발점에서부터 막히게 된다고 하였다. 이에 따라 교사는 문제에서 특정한 보조선을 그은 이유 또는 맥락을 학생들에게 가르쳐야 함을 강조하였다. 같은 맥락에서 신현용・한인기・이경언(2002)는 교과서에서 아무런 설명 없이 일방적으로 제시되는 보조선과 이를 이용한 풀이만이 제시되고 있어, 학생들에게 다양한 탐구의 기회를 제공하지 못하고 있음을 지적하였다.

[문제 1]의 해법에서 보조선 $\overline{AQ}$를 그은 이유나 맥락을 찾아내는 것은 쉽지 않다. 우정호 외(2009b)에 등장하는 [문제 2]의 해법에서 결정적 해결 요소인 보조선 $\overline{BE}$는 이와 같은 어려움을 더욱 잘 보여준다. [문제 2]는 [문제 1]에 비해 난이도가 더 높은 문제임을 감안한다면, 문제의 난이도가 높아질수록 보조선을 긋는 맥락의 이해 또한 난해해짐을 짐작할 수 있다.

[문제 2]

다음 그림과 같이 원 O에 내접하는 오각형 ABCDE에서 $\angle AOE = 34^\circ$일 때, $\angle ABC + \angle CDE$의 크기는?



[해법]

$\overline{BE}$를 그으면 $\angle ABE$는 호 AE에 대한 원주각이고, $\angle AOE$는 호 AE에 대한 중심각이므로 $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle AOE = 17^\circ$이다. 한편 □BCDE는 원 O에 내접하는 사각형이므로 $\angle CBE + \angle CDE = 180^\circ$이다. 따라서 $\angle ABC + \angle CDE = \angle ABE + \angle CBE + \angle CDE = 17^\circ + 180^\circ = 197^\circ$이다.

[문제 2]에서 문제 해결에 결정적 요소로 작용하는 보조선 $\overline{BE}$는 호 AE에 대한 중심각을 원주각으로 옮기는 역할을 한다. 뿐만 아니라 '원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이다.'라는 성질을 이용할 수 있게 한다. 이를 통해 보조선 $\overline{BE}$는 목표로 하는 것을 구할 수 있게 한다. 그런데 이 문제에서 보조선 $\overline{BE}$를 그어야 하는 이유나 맥락은 쉽게 발견되는 것이 아니다. 이런 문제의 해법이 학생들에게 보조선 도입 맥락에 대한 설명 없이 제시될 경우, 학생들은 막연하게 보조선을 잘 그어야 문제가 해결되는 구나라고 생각하기 쉽다. 이해의 정도가 이 정도 수준에서 그치게 되면 학

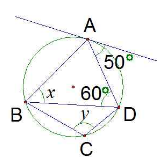
생들은 문제의 해법을 보고 이해하는 수준이지 스스로 보조선을 생각해내어 문제를 해결할 수 있는 수준으로 보기 어렵다. 따라서 원과 관련된 문제 해결의 바람직한 교수가 이루어지기 위해서는 보조선 도입에 대한 맥락에 대한 충분한 고찰이 선행되어야 할 것이다.

원과 관련된 문제에서 보조선은 문제에서 주어진 각을 문제 해결에 적합한 각으로 옮기는 역할을 한다. 따라서 보조선의 각의 관점에서 문제 해결을 궁리하게 만든다. 이로 인해 자칫 각에만 초점을 맞추어 관련 요소인 호에 대해 주목하지 않을 가능성을 갖게 한다. 하지만 앞서 논의된 바에 의하면 호는 각과 분리해서 생각할 수 없는 개념이며, 이는 문제 해결 측면에서 간과해서는 안 될 요소임을 의미한다.

이상에서 이준열 외(2009b)와 우정호 외(2009b)의 원과 관련된 문제의 접근에 대해 살펴보았다. 대다수의 다른 교과서(강신덕 외, 2009; 김원경 외, 2009; 김홍종 외, 2009; 박규홍 외, 2009; 박영훈 외, 2009; 박종률 외, 2009; 신항균 외, 2009)에서도 원과 관련된 문제의 접근은 각의 관점을 고수하고 있었다. 이들 교과서에 제시된 원과 관련된 문제의 해법은 보조선의 도입을 필요로 하는 것이 대부분이었다. 그러나 이들 문제에서 보조선의 도입 맥락을 이해하는 것은 쉽지 않은 일이다. 또한 보조선은 각의 관점에서 문제 해결을 모색하게 함으로서 각과 관련된 호를 간과하게 만들 여지가 있는 것이었다.

그나마 교사용 지도서에 각의 관점에서의 접근이 아닌 호의 관점에서 접근한 다른 풀이를 찾아볼 수 있다. 조태근 외(2002)는 다음 문제의 다른 풀이로 다음을 제시하고 있다.

다음 그림에서 $\angle x$, $\angle y$를 구하여라.



[$\angle y$를 구하는 다른 풀이]

$\angle y$는 $\widehat{AB}$의 원주각과 $\widehat{AD}$의 원주각의 합이므로 $\angle y = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$이다.

위의 풀이를 보면 각의 관점에서 보조선을 그어 해결하기보다 주어진 원주각의 호를 이용하여 문제를 해결하고 있음을 알 수 있다. 그러나 각의 관점에서의 해법과 구별되는 이 풀이는 별해로서 소개되는 것으로 그치고 있어 상대적으로 덜 강조되어 왔다. 즉, 호의 관점에서의 접근이 각의 관점에서의 접근에 비해 원과 관련된 문제에서 충분히 다루어지지 못하고 있다. 이에 본 연구에서는 원과 관련된 문제를 호의 관점에서 접근하는 해법을 다양한 문제에 적용하며, 이 접근을 각의 관점과 비교하여 이점을 논의해 보고자 한다. 이를 통해 원과 관련된 문제에서 각의 정보 못지않게 호의 정보도 중요한 것임을 인식시키고자 한다.

Ⅲ. 불변 요소인 호의 관점에서의 문제 해결

본 장에서는 불변 요소인 호의 관점에서 다양한 원과 관련된 문제의 해결을 모색해 보고자 한다. 이를 위해 먼저 호의 관점에서 문제를 해결하기 위한 이론적 장치를 마련하고, 이 후 이로부터 원과 관련된 문제의 해결을 조명할 것이다.

1. 호의 관점에서의 문제 해결에 필요한 정의 및 정리

앞 장에서 언급한 바와 같이 주어진 호에 대한 원주각의 크기는 오직 하나 존재하므로 호의 길이를 원주각의 크기와 동일시할 수 있다. 이를 구체화하기 다음의 기호를 도입한다. 이 [표기 1]은 교수·학습에 적합하지 않은 기호에 해당하며, 본 연구에서의 표기의 도입은 연구자적 입장에서 뒤의 논의를 보다 단순히 수학적으로 표현하기 위함이다.

[표기 1]

주어진[4] 호 AB에 대한 원주각의 크기가 x°일 때,

4) '주어진'이라는 것은 호 AB를 고정시키기 위한 것이다. 호가 고정되어 있지 않은 경우, 원주각의 크기에 대응하는 호도 무수히 많이 발생한다. 예컨대, 원 O에서 $\widehat{AB}$에 대한 원주각이 30°일 때, 30°에 대응하는 호는 $\widehat{AB}$뿐만 아니라 $\widehat{AB}$와 길이가 같은 호도 해당한다. 즉, 30°에 대응하는 호는 집합 $\{\widehat{XY} \mid \widehat{XY} = \widehat{AB}\}$의 모든 원소가 된다.

$\widehat{\mathrm{AB}} \approx x^\circ$ 로 나타낸다.

이 기호는 무수히 많은 원주각을 불변하는 호와 동일시하기 위해 도입한 기호이며, 원주각을 호로 대체하여 생각하기 위한 조치이다. '호가 곧 원주각이다'라는 생각을 반영하기 위해 도입한 기호이다. 이 기호는 호와 각을 동일시하겠다는 측면에서는 라디안과 동일하다. 그러나 라디안은 각의 단위를 없애고 단위가 없는 수와 동질량이 되도록 하기 위해 각 그 자체를 변형한 개념으로 각에 초점이 맞추어져 있다. 이에 반해 위 기호는 호를 원주각으로 간주하겠다는 의도가 반영된 표기로 호에 초점을 두고 있다. 즉, 라디안과 [표기 1]의 근본적인 원리는 동일하지만, 표기 자체의 관심의 초점에서 차이를 보이고 있다. [표기 1]에서 도입된 기호로 앞으로의 논의에서 자주 이용되는 기존의 정리를 정리해보면 다음과 같다.

[기존 정리의 재 표현]----ⓐ

(기존 정리) 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

⇒ (재 표현) $\widehat{\mathrm{AB}} \approx x^\circ$ 이고 $\widehat{\mathrm{CD}} \approx y^\circ$ 일 때, $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{CD}}$ 이면 $x^\circ = y^\circ$ 이다.

[기존 정리의 재 표현]은 앞으로의 논의에서 자주 사용할 것이며, 이를 ⓐ로 나타낼 것이다. 그리고 앞으로의 논의에서 자주 등장하는 것으로 [정리 1]을 소개한다.

[정리 1]

$\widehat{\mathrm{AB}} \approx x^\circ$ 이고 $\widehat{\mathrm{CD}} \approx y^\circ$ 일 때, 다음이 성립한다.

① $\widehat{\mathrm{AB}} + \widehat{\mathrm{CD}} \approx x^\circ + y^\circ$

② $k\widehat{\mathrm{AB}} \approx kx^\circ$ (단, k는 실수인 상수)

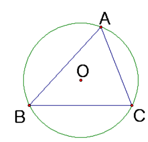
[정리 1]의 ①은 두 원주각의 크기의 합은 원주각에 대한 호의 길이의 합에 대한 원주각의 크기와 같음을 의미하며, ②는 원주각의 크기의 실수배는 원주각에 대한 호의 길이의 실수배에 대한 원주각의 크기와 같음을 의미한다. 특히 [정리 1]의 ②는 호와 원주각이 정비례라는 사실과 일맥상통한다.

[정리 2] 원주 $\approx 180^\circ$

[증명] 반원 $\approx 90^\circ$ 이므로 [정리 1]의 ②에 의해 $2\times$반원 $\approx 2\times 90^\circ$ 이다.

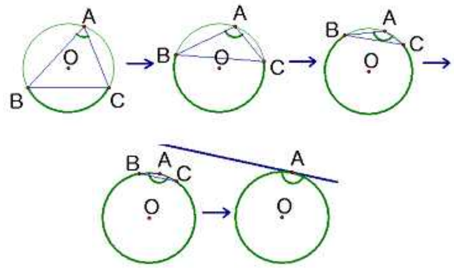
따라서 원주 $\approx 180^\circ$

[정리 2]는 원주에 대한 원주각의 크기는 180° 임을 의미한다. 이 정리는 '삼각형의 내각의 합이 180° 이다.'라는 측면에서도 접근 가능하다. 다음 [그림 3]과 같이 원 O위에 임의의 서로 다른 세 점 A, B, C를 잡고 $\angle\mathrm{A} = a^\circ$, $\angle\mathrm{B} = b^\circ$, $\angle\mathrm{C} = c^\circ$ 라 하자. 그러면 $\widehat{\mathrm{BC}} \approx a^\circ$, $\widehat{\mathrm{CA}} \approx b^\circ$, $\widehat{\mathrm{AB}} \approx c^\circ$ 이므로 [정리 1]의 ①에 의해 $\widehat{\mathrm{BC}} + \widehat{\mathrm{CA}} + \widehat{\mathrm{AB}} \approx a^\circ + b^\circ + c^\circ$ 이다. 따라서 원주에 대한 원주각의 크기는 180° 이다. 이 증명은 원주에 대한 원주각의 크기는 삼각형의 내각의 크기의 합과 같음을 의미한다. 이것은 삼각형의 내각의 크기의 합이 180° 을 보이는 하나의 방법이 될 수 있음을 뜻한다. 호를 원주각과 동일시하여 생각할 경우 이와 같은 맥락의 이해가 가능해짐을 알 수 있다.



[그림 3] 호의 관점에서 원주각은 삼각형의 내각의 합과 같은 맥락

위와 같은 증명 이외에도 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이라는 사실로부터 원주에 대한 중심각의 크기가 360° 이므로 원주에 대한 원주각의 크기는 180° 라는 설명이 가능하다. 이와 같은 설명들은 원주에 대한 원주각의 크기는 180° 라는 사실을 나타내기는 하지만 원주에 대한 원주각의 모습을 보여주지는 못한다. 원주에 대한 원주각의 모습을 그려 본다면 다음 [그림 4]와 같이 $\widehat{\mathrm{BC}}$ 가 원주가 되어가는 점진적 과정을 통해 그 모습을 나타내 볼 수 있을 것이다.



[그림 4] 원주에 대한 원주각의 모습[5)]

이 외에도 문제의 해결에 필요한 정리가 더 있겠지만, 이러한 정리들은 교과서에 나오는 내용이므로 생략하기로 한다. 여기에서는 원과 관련된 문제를 호의 관점에서 해결하는데 필수적인 정리들을 소개한 것이다.

2. 호의 관점에서의 원과 관련된 문제의 해결

본 절에서는 앞 절에서 제시된 [표기 1], [정리 1]과 [정리 2]를 기반으로 하여 원과 관련된 문제를 불변 요소인 호의 관점에서 문제의 해결을 모색해 볼 것이다.

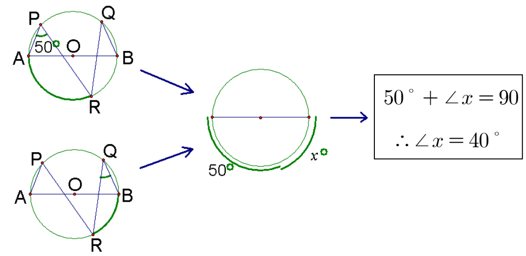
1) [문제 1]의 호의 관점에서의 접근

앞서 제시된 [문제 1]을 호의 관점에서 접근을 시도해 보면 다음과 같다.

[문제 1]의 호의 관점에서의 접근

$\angle BQR = x^\circ$라 하자. 그러면 $\widehat{AR} \approx 50^\circ$이고 $\widehat{BR} \approx x^\circ$이므로 [정리 1]의 ①에 의해 $\widehat{AR}+\widehat{BR} \approx 50^\circ + x^\circ$이다. 그런데 $\widehat{AR}+\widehat{BR}$은 반원이므로 $\widehat{AR}+\widehat{BR} \approx 90^\circ$이다. 따라서 ⓐ에 의해 $50^\circ + x^\circ = 90^\circ$이다. 따라서 $x^\circ = 40^\circ$이며, 결국 $\angle BPR = 40^\circ$이다.

이상에서 [문제 1]을 호의 관점에서 접근해 보았으며, 이 접근을 그림으로 표현하면 다음[그림 5]와 같다.



[그림 5] [문제 1]의 호의 관점에서의 접근

[문제 1]에 대한 호의 관점에서의 접근을 보면 각의 관점에서와는 다르게 보조선의 도입이 필요 없음을 알 수 있다. 호를 곧 원주각과 동일시하는 호의 관점에서는 특정한 원주각을 잡을 필요가 없다. 이것은 곧 보조선을 긋는 것이 필요하지 않다는 것을 의미한다. 이와 같이 호의 관점에서 문제 해결을 모색하는 것은 다양하게 나타나는 원주각을 불변하는 하나의 요소인 호로써 전환하여 인식하므로 더 이상 보조선을 그어 호에 대한 특정한 원주각을 생성할 필요가 없게 되는 것이다. 호에 대한 원주각을 호 그 자체로 인식하면 되는 것이다.

한편, 호의 관점에서의 접근은 각의 관점에서 보조선의 맥락을 이해할 때에도 도움이 될 수 있다. 호의 관점에서 $\angle APR + \angle BQR$은 '반원에 대한 원주각'이다. 따라서 각의 관점에서 문제 해결에 적합한 보조선은 '반원에 대한 원주각'을 생성하게 하는 것이 된다. 이러한 것을 만족하는 보조선으로 $\overline{AQ}$ 또는 $\overline{BP}$이 있다. 이처럼 호의 관점에서의 접근은 각의 관점에서 보조선 도입 맥락의 이해에도 도움이 됨을 알 수 있다. 한편, '[문제 1]의 호의 관점에서의 접근'에 대해 교수학적 관점에서 재 기술하면 다음과 같다.

'[문제 1]의 호의 관점에서의 접근'의 교수학적 관점에서 재 기술[6)]

$\widehat{BR}$에 대한 원주각은 x°라 하자. 그러면 $\widehat{AR}+\widehat{BR}$ =(반원)이므로 ($\widehat{AR}$에 대한 원주각)+($\widehat{BR}$에 대한 원

5) 여기에서 보여 지는 원주각의 모습은 추측에 해당하지 증명은 아니다. 그러나 원주에 대한 원주각이 그려지지 않는 점을 고려해보면 이와 같은 추측이 교육적인 측면에서 의미가 있다고 하겠다.

6) [문제 2], [문제 3], [문제 4]에 대해서도 교수학적 입장에서 재 기술가능하다.

주각)=(반원에 대한 원주각)이다. 여기서 $\overset{\frown}{\mathrm{AR}}$에 대한 원주각은 50°이므로 $50^\circ + x^\circ = 90^\circ$이다. 따라서 $x^\circ = 40^\circ$이며, 결국 $\angle \mathrm{BPR} = 40^\circ$이다.

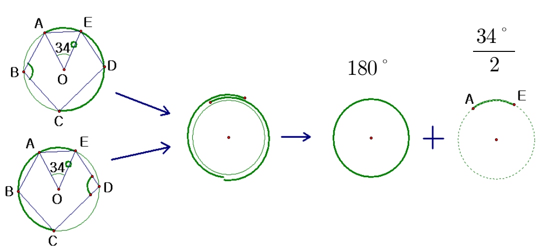
2) [문제 2]의 호의 관점에서의 접근

앞서 제시된 [문제 2]를 호의 관점에서 접근을 시도해 보면 다음과 같다.

[문제 2]의 호의 관점에서의 접근

$\angle \mathrm{ABC} = x^\circ$, $\angle \mathrm{CDE} = y^\circ$라 하자. 그러면 $\overset{\frown}{\mathrm{AEDC}} \approx x^\circ$이고 $\overset{\frown}{\mathrm{EAB}} \approx y^\circ$이므로 [정리 1]의 ①에 의해 $\overset{\frown}{\mathrm{AEDC}} + \overset{\frown}{\mathrm{EABC}} \approx x^\circ + y^\circ$이다. 그런데 $\overset{\frown}{\mathrm{AEDC}} + \overset{\frown}{\mathrm{EABC}} =$(원주)$+\overset{\frown}{AE}$ 이고, (원주)$+\overset{\frown}{\mathrm{AE}} \approx 180^\circ + \frac{34^\circ}{2}$이므로 ⓐ에 의해 $x^\circ + y^\circ = 180^\circ + \frac{34^\circ}{2}$이다. 따라서 $\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{CDE} = 180^\circ + \frac{34^\circ}{2} = 197^\circ$이다.

이상에서 [문제 2]를 호의 관점에서 접근해 보았으며, 이 접근을 그림으로 표현하면 다음[그림 6]과 같다.



$$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{CDE} = 180^\circ + \frac{34^\circ}{2} = 197^\circ$$

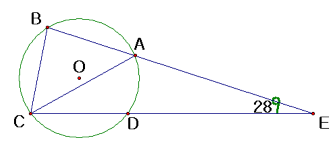
[그림 6] [문제 2]의 호의 관점에서의 접근

여기에서도 [문제 1]의 호의 관점에서의 접근과 마찬가지로 보조선의 도입을 필요로 하지 않는다. 또한 호의 관점에서의 접근은 각의 관점에서 문제 해결에 필요한 보조선의 맥락을 이해하는데 도움이 된다. 호의 관점에서 $\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{CDE}$ 은 (원주에 대한 원주각) + (호 AE에 대한 원주각)이다. 따라서 각의 관점에서 문제 해결에 필요한 보조선은 '원주에 대한 원주각'과 '호 AE에 대한 원주각'을 생성할 수 있는 것이 된다. 이러한 조건을 만족하는 보조선으로 $\overline{\mathrm{AD}}$ 또는 $\overline{\mathrm{BE}}$를 생각할 수 있다. 여기서 '원주에 대한 원주각'은 '원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각'이 될 것이다.

3) [문제 3]의 호의 관점에서의 접근

[문제 3]

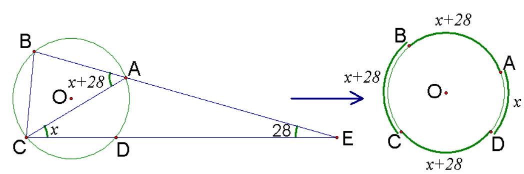
다음 그림과 같이 원 O위에 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$인 점 A, B, C, D를 잡아 직선 AB와 직선 CD의 교점을 E라고 하자. $\angle \mathrm{BEC} = 28^\circ$일 때, $\angle \mathrm{ACD}$의 크기를 구하여라.



[문제 3]의 호의 관점에서의 접근

$\angle \mathrm{ACD} = x^\circ$라고 하자. 그러면 $\angle \mathrm{BAC} = x^\circ + 28^\circ$이다. 여기서 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}}$이므로 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} \approx x^\circ + 28^\circ$, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}} \approx x^\circ + 28^\circ$, $\overset{\frown}{\mathrm{CD}} \approx x^\circ + 28^\circ$이다. [정리 1]의 ①에 의해 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{BC}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}} + \overset{\frown}{\mathrm{DA}} \approx 3(x^\circ + 28^\circ) + x^\circ$이다. 그런데 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{BC}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}} + \overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ =(원주)이고 (원주)$\approx 180^\circ$이므로 ⓐ에 의해 $3(x^\circ + 28^\circ) + x^\circ = 180^\circ$이다. 따라서 $x^\circ = 24^\circ$이고, 결국 $\angle \mathrm{ACD} = 24^\circ$이다.

이상에서 [문제 3]을 호의 관점에서 접근해 보았으며, 이 접근을 그림으로 표현하면 다음[그림 7]과 같다.



$$3(x^\circ + 28^\circ) + x^\circ = 180^\circ$$
$$\therefore x^\circ = 24^\circ$$

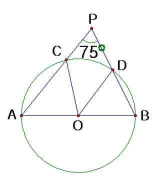
[그림 7] [문제 3]의 호의 관점에서의 접근

[문제 3]에서 해법의 주요 원리는 원주각을 호와 동일시하는 호의 관점이다. 이를테면, 원주각 $\angle ACB$를 $\overset{\frown}{AB}$와 동일시하여 해결하는 것이 호의 관점에서의 문제 해법의 핵심이다. 이 접근은 앞서와 마찬가지로 보조선을 그을 필요가 없다.

한편, 호의 관점은 각의 관점에서 문제 해결을 하고자 할 때, 어떤 보조선이 적합한지를 인식하는데 도움이 된다. 호의 관점에서 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$를 각각 원주각과 동일시하기 때문에 특정한 원주각을 생성할 필요가 없었다. 그러나 각의 관점에서는 이들 각각에 대한 원주각을 생성해야 한다. 그런데 여기서 $\overset{\frown}{CD}$를 제외한 나머지 호에 대한 원주각은 이미 하나씩 존재하고 있으므로 문제의 해결에 필요한 것은 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각이다. 따라서 위의 문제를 각의 관점에서 접근하게 된다면 보조선 $\overline{AD}$나 $\overline{BD}$을 그어 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각을 생성해야 한다. 이처럼 호의 관점에서 원과 관련된 문제를 접근하면 각의 관점에서 문제 해결을 위해 그어야 하는 보조선이 어떤 것이 되어야 하는지를 파악하는데 도움이 된다.

4) [문제 4]의 호의 관점에서의 접근

[문제 4] 다음 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O에 대한 지름이다. $\angle APB = 75^\circ$일 때, $\angle COD$의 크기는?

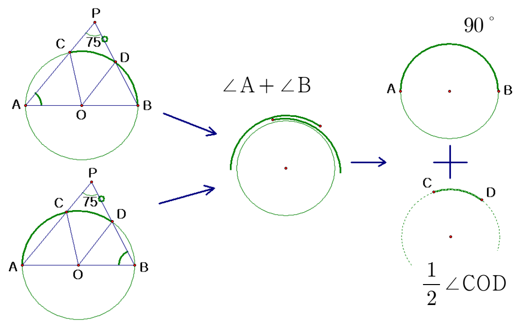


[문제 4]의 호의 관점에서의 접근

$\angle COD = x^\circ$라 하자. 그러면 $\angle APB = 75^\circ$이므로 $\angle A + \angle B = 105^\circ$이다.[7] $\angle A = a^\circ$, $\angle B = b^\circ$라 하자. 그러면 $a^\circ + b^\circ = 105^\circ$이다. 한편, $\overset{\frown}{CDB} \approx a^\circ$이고 $\overset{\frown}{ACD} \approx b^\circ$이므로 [정리 1]의 ①에 의해 $\overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{ACD} \approx a^\circ + b^\circ$이다. 즉, $\overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{ACD} \approx 105^\circ$이다. 그런데 $\overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{ACD} =$(반원)$+\overset{\frown}{CD}$이고 (반원)$+\overset{\frown}{CD} \approx 90^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$이므로 ⓐ에 의해 $90^\circ + \frac{1}{2}x^\circ = 105^\circ$이다. 그러므로 $x^\circ = 30^\circ$이며, 결국 $\angle COD = 30^\circ$이다.

7) 여기서 $\angle A + \angle B$를 구하는 것은 $\angle APB$는 원주각도 중심각도 아닌 각이기에 원주각이나 중심각이 되게 하는 조치이다.

이상에서 [문제 4]를 호의 관점에서 접근해 보았으며, 이 접근을 그림으로 표현하면 다음[그림 8]과 같다.



$$90^\circ + \frac{1}{2}\angle COD = \angle A + \angle B$$

$$90^\circ + \frac{1}{2}\angle COD = 105^\circ$$

$$\therefore \angle COD = 30^\circ$$

[그림 8] [문제 4]의 호의 관점에서의 접근

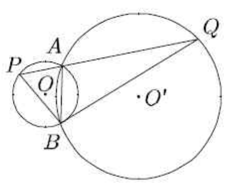
이 문제 역시 호의 관점에서 접근할 경우 보조선을 긋는 것은 필요 없다. 한편, 호의 관점은 각의 관점에서 접근을 시도할 경우 문제 해결에 적합한 보조선을 발견하는데 도움이 될 수 있다. 호의 관점에서의 접근을 살펴보면, $\overset{\frown}{CDB}$와 $\overset{\frown}{ACD}$을 연결한 호를 반원과 $\overset{\frown}{CD}$로 분리함으로서 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각을 구할 수 있게 된다. 따라서 위 문제를 각의 관점에서 접근한다면 '반원에 대한 원주각'과 '$\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각'을 생성하게 하는 보조선이 필요하다. 이와 같은 원주각을 생성하게 하는 보조선으로 $\overline{AD}$나 $\overline{BC}$을 생각할 수 있다.

이상에서 [문제 1]에서부터 [문제 4]까지 원과 관련된

문제를 호의 관점에서 해결하여 보았다. 이러한 해결로부터 호의 관점에서의 접근은 보조선을 필요로 하지 않을 수 있으며, 각의 관점에서 그어야 하는 보조선의 맥락 이해에 도움이 될 수 있음을 알 수 있었다. 한편, 원주각의 크기는 중심각의 크기의 절반이기에 '원주각에 대한 호의 관점에서의 문제 해결'은 '중심각에 대한 호의 관점에서의 문제 해결'로도 그 풀이가 가능하다. 이를테면, [문제 1]의 중심각을 호와 동일시하면 식 $100^\circ+2\angle x=180^\circ$이 만들어져 문제가 해결된다. [문제 2]의 중심각을 호와 동일시하면 식 $2\angle ABC+2\angle CDE=360^\circ+34^\circ$이 만들어져 문제가 해결된다. [문제 3], [문제 4]도 마찬가지로 해결 가능하게 된다. 이것은 원과 관련된 문제에서 중심각이든 원주각이든 이들은 모두 호를 이들과 동일시함으로서 해결 가능함을 의미한다. 단지 호를 중심각으로 간주할 경우에는 원주각과 동일시할 경우에 만들어지는 방정식의 양변에 2를 곱한 식이 만들어지는 차이 밖에 없다. 결국 원과 관련된 문제에서 원주각이든 중심각이든 각은 호와 동일시할 수 있으며, 이를 통해 문제 해결도 가능한 것이다.

그러나 이러한 사실로부터 원과 관련된 문제에서 호의 접근만이 능사라는 생각은 바람직하지 못하다. 이를테면, 다음의 문제에서 호의 관점에서의 접근은 학생들에게 쉽지 않은 해결 방법이라고 생각된다.

.두 원 O, O′의 교점을 A, B라 할 때, A를 지나는 임의의 할선이 두 원 O, O′와 각각 P, Q에서 만나면 ∠PBQ의 크기는 일정함을 보여라.



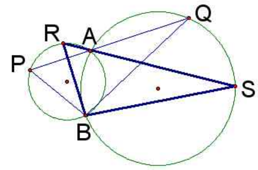
호의 관점에서의 접근

원 O에서 호 AB에 대한 원주각은 일정하고, 또 원 O′에서 호 AB에 대한 원주각도 일정하므로, ∠PBQ의 크기도 $180^\circ-$(원 O에서 호 AB에 대한 원주각 + O′에서 호 AB에 대한 원주각)으로서 일정하다.

이러한 호의 관점에서의 접근은 통찰이 필요한 어려운 풀이라고 생각된다. 그러나 이 문제를 각의 관점으로 접근하게 되면, 호의 관점에서의 일반적 풀이가 보다 구체화되어 이해하기 쉬운 형태로 변모될 수 있다.

각의 관점에서의 접근

점 A를 지나는 또 다른 임의의 할선이 두 원 O, O′와 각각 R, S에서 만난다고 하자.



그러면 ∠PBR = ∠PAR(같은 호에 대한 원주각)이고, ∠QBS = ∠QAS(같은 호에 대한 원주각)이고, ∠PAR = ∠QAS(맞꼭지각)이므로 ∠PBR = ∠QBS이다. 따라서 ∠PBQ = ∠RBS이다. 그러므로 ∠PBQ의 크기는 일정하다.

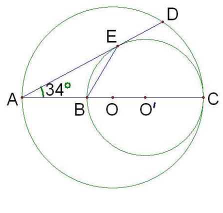
여기서 각의 관점에서의 접근은 학생들에게 이해가 보다 용이할 것으로 생각된다. 각의 관점에서의 접근을 통해 임의의 할선에 대해 감소된 원주각만큼 원주각이 증가하기 때문에 ∠PBQ의 크기는 일정해짐을 알 수 있다.

이런 점을 고려할 때, 호의 관점에서의 접근이 각의 관점에서의 접근 보다 바람직한 접근이라고 보기는 어렵다. 두 접근은 각각의 독특한 특징을 지니고 있으며, 서로 보완적인 관계에 있다고 보는 것이 바람직하다고 사료된다. 즉, 각의 관점에서의 접근에서 이해하기 어려운 보조선 맥락을 호의 관점에서의 접근을 통해 이해할 수 있을 것이다. 마찬가지로 호의 관점에서의 접근에서 통찰이 필요한 어려운 해법이 각의 관점에서의 접근을 통해 보다 구체화되어 이해하기 쉬운 해법으로 변모될 수 있다.

다음의 문제는 원과 관련된 문제에서 두 관점 모두를 적용해야할 것을 지향할 때, 제시될 수 있는 해법이다.

다음 그림에서 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$는 각각 원 O, O′의 지름

이고 직선 AD는 원 O′의 접선일 때, ∠EBC의 크기를 구하여라.



각과 호 모두를 이용한 접근

$\overline{AD}$가 원 O′의 접선이므로 $\angle AEO'=90^\circ$이다. 따라서 $\angle EO'A=90^\circ-34^\circ=56^\circ$이다. 즉, $\widehat{BE}$의 중심각은 56°이다. (각의 관점에서의 접근)

이때 $\widehat{BE}\approx\dfrac{56^\circ}{2}=28^\circ$이고, $\widehat{EC}=$(반원)$-\widehat{BE}$이므로 $\widehat{EC}\approx 90^\circ-28^\circ=62^\circ$이다. (호의 관점에서의 접근)

이상의 사실로부터, 원과 관련된 문제에서 각과 호의 관점으로의 접근은 각각의 장점을 지니고 있으므로, 두 접근 모두를 가르치는 것이 바람직한 교수라고 생각된다. 학생의 입장에서 주어진 문제를 각의 관점이나 호의 관점 중 어느 하나를 선택해야 한다. 그런데 그들이 어느 한 접근만을 알고 있다면, 다른 접근으로 문제를 해결하기는 어려울 것이다. 이런 측면에서 다른 접근이 있다는 것을 알려주게 되면, 학생들의 생각의 폭을 넓혀줄 수 있을 것이며 아울러 수학적 힘의 신장에 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅳ. 결론 및 제언

원주각은 원의 다양한 성질을 이해하기 위해 필요한 중요한 개념이다. 이러한 원주각 개념은 중학교 수학 3에 등장하며, 교과서의 문제는 보조선을 이용한 해법이 대부분이다. 그러나 이들 문제에서 보조선을 긋는 맥락을 이해하기란 쉽지 않기 때문에 원과 관련된 문제의 해결은 교수학적으로 접근이 용이하지 않다. 이것은 교과서의 원과 관련된 문제의 해법의 대부분이 각의 관점에서 기술되어 원주각과 관련성이 깊은 호를 주목하지 않은 탓이기도 하다. 이에 본 연구에서는 교과서에 제시된 원과 관련된 문제에 대하여 호의 관점에서의 접근을 모색해 보았으며, 이 관점을 통해 보조선의 맥락에 대해서도 살펴보았다.

호의 관점에서의 접근이란, 호를 원주각과 동일시하는 것을 골자로 하며, 호 그 자체가 곧 원주각이라고 간주하고 문제를 해결하는 방법을 의미한다. 이 관점에서 원과 관련된 문제의 해법을 조명하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 호의 관점에서의 접근은 호 그 자체가 곧 원주각이므로 호에 대한 특수한 원주각을 생성할 필요가 없다. 따라서 문제 해결에 적합한 원주각을 생성하고자 긋게 되는 보조선을 도입하지 않고도 문제의 해결을 가능하게 할 수 있음을 알았다. 즉, 원주각의 가변성은 이동 및 변환을 요구하지만, 호의 불변성은 이동 및 변환을 필요로 하지 않는다. 따라서 원주각에 있던 수량 정보를 호로 옮겨 오면 변환 없이도 문제 해결이 가능하게 되었다. [문제 1]에서부터 [문제 4]에 이르기 까지 호가 곧 원주각이므로 특정한 원주각의 생성을 위해 노력할 필요가 없었다. 즉, 어떠한 보조선도 필요하지 않았다. 이처럼 호의 관점에서의 원과 관련된 문제의 해결은 변환을 위한 보조선의 도입을 필요로 하지 않음을 알 수 있었다.

둘째, 호의 관점에서의 접근은 보편적으로 요구되는 적합한 보조선을 인식하게 하는데 도움을 준다. 호의 관점에서 각각의 호의 결합으로 의미 있게 된 호가 나타난 경우, 문제 해결에 적합한 보조선은 기존의 원주각을 '의미 있게 된 호에 대한 원주각'으로 만드는 것이 될 것이다. 이 경우에 해당하는 것이 [문제 1], [문제 2], [문제 4]이다. 이들은 모두 주어진 원주각을 결합할 경우 '반원에 대한 원주각', '원주에 대한 원주각', '특정한 호에 대한 원주각' 각각이 되거나 이들의 결합이 되었다. 따라서 각의 관점에서 이러한 문제 해결에 적합한 보조선은 주어진 원주각이 결합되어 의미 있게 된 원주각을 생성하게 하는 것이 된다. 또 다른 경우로 호의 관점에서 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 여러 가지 호를 살펴보았을 때, 호에 대한 원주각이 생성되어 있지 않을 경우, 이 원주각을 생성하도록 만드는 역할을 하는 것이 곧 각의 관점에서 접근했을 때 도입해야 하는 보조선이다. 이

경우에 해당하는 것이 [문제 4]이다. 이처럼 호의 관점에서 원과 관련된 문제를 보게 되면, 각의 관점에서 해결을 위해 어떤 보조선이 도입되어야 하는지를 알 수 있게 되는 것이다.

하지만 이상의 결론으로부터 원주각 문제는 각의 관점보다 호의 관점이 용이하다는 사실로의 일반화는 경계되어야 한다. 원주각은 각이면서 호와 밀접한 관련성을 갖기 때문에, 주요 요소인 원주각과 호는 문제 해결의 단서가 될 수 있다. 그렇지만 상황에 따라 각의 관점에서의 접근이 용이한 문제가 있을 수 있고, 반대로 어떤 문제는 호의 관점에서의 접근이 용이할 수 있다. 이런 점을 고려하면 주어진 문제에 대해 두 요소 모두에 대한 접근이 요구되는 것이지, 한 요소에 치우친 접근은 바람직하지 않다. 따라서 교과서에 제시된 원과 관련된 문제의 해법의 관점이 각에 치우쳐 있음을 문제점으로 보았으며, 본 연구는 이들 문제의 해법을 호의 관점에서 재조명해 본 것이다.

기존의 관점이 각에 치우친 것은 더 많은 논의가 이루어져야 하겠지만 수량 정보가 각에 있기 때문이 아닌가 생각된다. 이런 연유로 호 보다 각에 주목하여 각의 변환에 주력하여 문제를 해결하려고 한 것으로 생각된다. 사실 각에 주어진 수량 정보를 호와의 관련성만으로 옮겨오도록 하는 것은 인지적인 측면에서 자연스러운 것은 아니다. 이는 각의 수량 정보를 호로 옮겨오기 위해서는 많은 노력이 요구됨을 의미한다.

선행 연구들에서 라디안의 개념은 많은 오개념을 발생시키는 것으로 보고되고 있다(나병채, 2002; 송은영, 2008; 장영수, 2006; 정현아, 2008). 이러한 사실은 라디안의 기본적 아이디어와 유사한 호의 관점에서의 접근에 대한 교수학적 논의가 충분히 이루어져야 함을 시사한다. 호의 관점의 접근에서 학생들이 겪게 되는 어려움은 무엇인지, 왜 이러한 어려움을 겪게 되는 것인지, 어려움을 돕는 방안은 무엇인지에 대한 후속 연구가 필요해 보인다.

원과 관련된 문제의 해결에서 호는 중요한 문제 해결 요소가 될 수 있음을 확인하였다. 기존의 각의 관점에만 집착할 경우 보조선의 맥락 이해의 어려움이 발생하며, 때로는 호의 관점에서의 접근이 문제 해결을 보다 용이하게 할 수 있음을 알았다. 따라서 원과 관련된 문제에서 각의 관점에 입각한 접근 뿐 아니라 호의 관점에서의 접근 또한 필요하며, 이러한 두 관점의 지도를 통해 호와 각의 관련성을 인식하고 두 요소를 문제 해결에 적극 이용할 수 있도록 도와야 할 것이다. 수학 교육 현장에서 원과 관련된 문제의 해법이 다양한 관점으로 지도되어 학생들의 문제 해결력 증진을 도울 수 있길 기대한다.

참 고 문 헌

강신덕・홍인숙・김영우・이재순・전민정・나미영 (2009). 중학교 수학 2. 서울: 교학사.

강미광(2011). 호도법에 관한 교수학적 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 50(3), 355-365.

강현수(2003). Van Hiele 이론을 바탕으로 GSP를 활용한 학습자료 개발 연구: 중학교 원주각을 중심으로. 단국대학교 석사학위논문.

김원경・조민식・김영주・김윤희・방환선・윤기원・이춘신(2009). 중학교 수학 2. 서울: 비유와 상징.

김홍종・계승혁・오지은・원애경(2009). 중학교 수학 2. 서울: 성지출판.

나병채(2002). 고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해 실태 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

도종훈(2009). 수학 문제 해결 과정에서 사고(발상)의 전환과 불변성의 인식. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 48(2), 183-190.

박규홍・최병철・안숙영・김준식・유미경(2009). 중학교 수학 2. 서울: 동화사.

박영훈・여태경・김선화・심성아・이태림・김수미 (2009). 중학교 수학 2. 서울: 천재문화.

박종률・유종광・이창주・오혜정・이미라・박진호 (2009). 중학교 수학 2. 서울: 도서출판 디딤돌.

송은영(2008). 삼각함수 개념의 지도에 관한 연구. 서울대학교 석사학위논문.

신항균・이광연・윤혜영・이지현(2009). 중학교 수학 2. 서울: 지학사.

신현용・한인기・이경언(2002). 다양한 보조선을 이용한 문제 풀이. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 14, 297-326.

우정호・박경미・이경화・김남희・임재훈・박인・이영란・고현주・이정연(2009a). 중학교 수학 3. 서울: 두산동아.

우정호・박경미・이경화・김남희・임재훈・박인・이영란・고현주・이정연(2009b). 중학교 수학 익힘책 3. 서울: 두산동아.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2009a). 중학교 수학 3. 서울: 천재교육.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2009b). 중학교 수학 익힘책 3. 서울: 천재교육.

임재훈・박경미(2002). 보조선 지도법 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 4(1), 1-13.

장영수(2006). 삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도방안에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

정선화(2004). 플래시를 이용한 웹 기반 교육의 구체화: 중학교 도형의 원주각 단원을 중심으로. 경희대학교 석사학위논문.

정현아(2008). 고등학교 10-나 단계 삼각함수 개념의 이해와 지도에 관한 연구. 이화여자대학교 석사학위논문.

조태근・임성모・정상권・이재학・이성재(2002). 중학교 수학 9-나 교사용 지도서. 서울: 금성출판사.

A Approaches to the Problem in connection with the Circle in Point of View of the Angle and Arc

Kang, Jeong Gi
Namsan Middle School, Chang-Won 642-110, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

It is not easy to find the auxiliary line to solve the problem in connection with the circle, where it is the problem finding the central angle or angle at the circumference in a circle. The purpose of the study is to give an aid for this difficulties. The angle at the circumference is closely related to the arc. And so we looked into the problem in connection with the angle at the circumference in point of view of the arc. We have got the following the results. It is not necessary to draw the auxiliary line when solving the problem in connection with the angle at the circumference in point of view of the arc. And we can find the reason to draw the specific auxiliary in point of view of the arc. We hope that the results of research are given aids to a lot of students.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Angle at the circumference, Auxiliary line, Point of view of the angle, Point of view of the arc.