韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育> J. KSME(Math. Edu) ISSN 1225-1380
2012. 11. 제 51권, 제 4호, 455-469. November. 2012, Vol. 51 No. 4, 455-469.

초등학교 수학 수업에 나타난 수학적 연결의 대상과 방법 분석

김 유 경(수원칠보초등학교)
방 정 숙(한국교원대학교)†

Ⅰ. 서 론

수학은 계통성 있는 학문으로 수학의 내용들은 고립되어 존재하기보다는 서로 밀접하게 관련되어 있다. 따라서 수학을 학습할 때 관련된 개념들을 찾아 서로의 관계를 연결해 볼 수 있도록 지도하는 것이 바람직하다.

이와 관련하여 미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000)는 학교 수학을 위한 원리와 규준에서 문제 해결, 의사소통, 추론과 증명, 표현과 함께 연결성을 수학적 과정 규준의 하나로 제시하고 있다. 학교 교육을 통해 관련된 개념, 절차, 표현, 실생활 등이 어떻게 연결되어 있는지 그 관련성을 탐구하고 연결 관계를 구축함으로써 수학을 보다 통합적으로 바라볼 수 있는 능력을 길러주도록 권고하고 있다.

이렇듯 수학이라는 학문 자체가 계통성을 가지고 있고 수학적 연결성이 중요함에도 불구하고, 실제 수업에서 이러한 연결성을 제대로 구현하기는 쉽지 않다(Thomas & Santiago, 2002). 왜냐하면 가르칠 학습 주제와 관련하여 학생들이 자연스럽게 수학적 연결을 추구할 수 있도록 교사가 사전에 섬세하게 학습 활동을 계획해야 하고 실제 수업에서 교사와 학생과의 상호작용 속에 그러한 연결성이 충분히 구현되도록 노력하는 것이 만만치 않은 작업이기 때문이다. 이와 같은 측면에서 실제 수학 수업에서 수학적 연결성이 구현되는 정도를 분석해 보는 것은 의미 있는 연구라고 생각된다.

한편, 수학적 연결성에 대한 선행 연구를 살펴보면, 특정한 수학 내용과 관련하여 연결성을 분석하고 이를 바탕으로 지도방안을 탐색한 연구나 수학의 유용성을 인식할 수 있도록 실생활이나 다른 교과 등 수학 외적 연결성을 다룬 연구가 소수 있다(이론적 배경 참조). 그러나 수업에 나타난 수학적 연결성의 실태를 조사한 연구나 수학적 연결성을 고려하여 수학 수업을 밀도 있게 탐구한 연구는 별반 없다. 또한 수학 내적 연결성을 분석하고 지도방안을 탐색한 연구나 수학 외적 연결성을 다룬 연구들이 대부분 고등학교에서 다루는 학습 내용을 소재로 하고 있어서 수학적 연결성을 촉진하기 위한 초등학교 수업의 양상을 살펴보기에는 부족하다고 할 수 있다.

이러한 연구 배경을 바탕으로 본 연구에서는 초등학교 수학 수업을 연결성의 관점에서 분석해 보았다. 초등학교 수학 수업의 주요 흐름(즉, 도입, 활동1, 활동2, 활동3, 정리)에 따라 각 단계에서 무엇과 무엇을 연결하는지, 그리고 어떠한 방법으로 연결하는지에 대해 양적으로 분석하고, 그 연결의 대상과 방법별로 구현 양상을 보다 상세히 분석함으로써 수업에서 수학적 연결성을 구현하는 데에 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 연결의 대상

수학은 잘 통합된 학문으로 학교 수학의 아이디어는 풍부하게 연결되어 있다. 따라서 초등학교 교육과정에서 이러한 수학적 연결성을 학생들이 지속적으로 경험할 수 있도록 기회를 제공하는 것은 중요하다(Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009).

이를 위해 구체적으로 수업에서 무엇과 무엇을 연결해야 하는지 연결의 대상에 대해서 살펴보면 다음과 같다. 우선, NCTM(1989)은 연결성을 크게 수학 내적 연결

* 접수일(2012년 10월 23일), 게재확정일(2012년 11월 21일)
* ZDM분류 : D42
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 수학적 연결성, 연결의 대상, 연결의 방법
† 교신저자 : jeongsuk@knue.ac.kr

성과 수학 외적 연결성으로 구분하고 있다. 수학 내적 연결성으로는 개념적 지식과 절차적 지식 연결하기, 수학 주제들 간에 연결의 가치를 사용하고 평가하기, 같은 개념에 대한 동등한 표현 인식하기, 수학을 일관된 전체로 보기가 있으며, 수학 외적 연결성으로는 다른 교육과정 영역에서 수학 사용하기, 매일의 일상생활에서 수학 사용하기, 예술·음악·심리학·과학·경제 등 다른 분야의 문제들을 해결하기 위해 수학적 사고와 모델링 적용하기를 제시하고 있다.

NCTM(2000)은 이전에 세분화하여 제시했던 연결에 대한 규준을 통합하여 3가지로 제시하고 있는데, 수학적 아이디어 사이의 연결을 인식하고 사용하기, 수학적 아이디어들을 내적으로 연결시키는 방법과 일관된 전체를 형성하기 위해서 하나 위에 다른 것을 세워 가는 방법 이해하기, 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 적용하기를 제시한다. 이는 NCTM(1989)의 내용과 비교해 볼 때, 개념과 개념, 개념과 절차, 같은 개념 내의 동치 표현 등 수학 내적 연결의 대상들을 세분화하여 나열했던 것에서 수학적 아이디어 사이의 연결을 인식하고 사용하기로 통합하여 제시하고 있음을 알 수 있다. 또한 실생활, 타 교과, 전문분야 등 수학 외적 연결의 대상도 수학 이외의 상황으로 함축하여 제시하고 있다. 반면에 NCTM(1989)이 제시한 일관된 전체로 보기는 일관된 전체를 형성하기 위해 하나 위에 다른 것을 세워 나가는 방법 이해하기로 NCTM(2000)에서 수정되었다. 이는 수학을 일관된 전체로 인식하는 것에서 나아가 연결을 구축하는 과정이 강조되는 방향으로 확대된 것이라 해석할 수 있으며, 실제 수업에서 수학적 연결이 실행되는 과정을 살펴보고자 하는 본 연구의 목적과 맥락을 같이한다고 볼 수 있다.

최근 미국의 최선의 관행을 위한 주지사 협의회(National Governors Association Center for Best Practices)와 각주 교육대표자 협의회(Council of Chief State School Officers)에서 발행한 '수학과 공통 핵심 규준'(Common Core State Standards for Mathematics, [CCSSM])은 각 주마다 다른 교육과정을 하나로 통일할 필요성을 느끼고 각 학년에서 학습해야 할 내용 규준을 제시하고 NCTM의 과정(processes) 규준과 NRC에서 제시한 수학적 능숙함(proficiencies)의 요소를 반영하여 8가지의 관행(practice)을 제시하였다. CCSSM에 제시된 관행의 규준은 문제를 이해하고 인내심을 가지고 해결하기, 추상적이고 양적으로 추론하기, 실행 가능한 논쟁을 구성하고 다른 사람들의 추론을 비평하기, 수학으로 모델링하기, 적절한 도구를 전략적으로 사용하기, 정확성에 정성을 들이기, 구조를 찾고 활용하기, 반복된 추론에서 규칙성(regularity)을 찾고 표현하기이다. 수학적 연결성이란 용어가 이 관행들 중에 명시적으로 제시되어 있지는 않으나 수학적으로 능숙한 학생들은 적절한 수학적 대상들끼리 연결하여 사고함으로써 문제를 이해하고 해결하며 추론하고 비평하는 데 도움을 얻을 수 있다. 또한 위의 8가지 관행 중 구조를 찾고 활용하기나 수학으로 모델링 하기는 수학의 내·외적 연결성과 보다 직접적으로 관련된 규준이라고 볼 수 있다.

한편, Leong(2012)은 수학 수업에서 구현하여야 할 연결성으로 시각적 연결(visual connections), 아이디어의 연결(idea connections), 시간적 연결(temporal connections)을 제시하였다. 여기서 시각적 연결은 실생활 상황, 구체물과 같은 실제적인 표현과 그림, 도표와 같은 영상적 표현, 식, 기호와 같은 상징적 표현들 사이의 연결을 말하고, 아이디어의 연결은 수학 개념들 간의 연결을 일컫는다. 또한 시간적 연결은 시각적 연결과 아이디어의 연결이 한 차시 수업에서 그치는 것이 아니라 일련의 수업들 속에서 구현되어야 하므로 수학 수업들 사이의 연결을 의미한다. Leong의 연구는 NCTM이 제시한 다양한 연결 중에서 수학의 개념과 개념, 표현과 표현의 연결을 특히 강조하고 있으며, 수학적 연결성을 구현하기 위해 본 차시만이 아니라 이전 차시, 후속 차시의 수업을 고려해야 함을 시사한다고 할 수 있다.

본 연구는 선행 연구에 제시되어 있는 연결의 대상을 중심으로 초등학교 수학 수업에 나타난 수학적 연결성의 모습을 살펴보고자 한다. 수업의 각 단계별로 무엇과 무엇을 연결하는지, 연결의 대상별로 어떻게 수업에서 구현되고 있는지 상세히 살펴보고자 한다.

2. 수학적 연결의 방법

수학적 연결을 어떻게 하는가에 대해 살펴보면, Coxford(1995)는 연결의 매개체로 세 가지 측면, 즉, 주

제 통합하기(unifying themes), 수학적 과정(mathematical process), 연결자(connectors)를 제시하였다. 첫째, 주제 통합하기는 변화, 자료, 모양을 매개체로 하여 연결하는 것을 일컫는다. 예를 들어 도형을 밀고 돌리고 뒤집었을 때 도형의 둘레와 넓이의 변화를 탐색하는 것은 변화를 통해 수학을 연결시키는 것이다. 또한 학생들의 키를 측정할 때 대략 얼마인지 어림값을 알아보거나 실제적 자료를 통해 평균, 최댓값, 최솟값 등을 구하는 것은 자료를 통해 수학을 연결시키는 예이다. 그리고 도형의 모양을 보고 그 성질을 탐구하거나 그래프의 모양을 보고 앞으로의 결과를 예측하는 것은 모양을 통해 수학을 연결시키는 예이다. 이와 같은 주제 통합하기는 교사가 수학 수업을 계획하면서 활동 간의 연결성을 염두해 둘 때 필요한 내용이라고 볼 수 있다.

둘째, 수학적 연결의 매개체로 수학적 과정은 표현(representation), 적용(application), 문제 해결(problem solving), 추론(reasoning)이 포함된다. 표현은 같은 개념을 나타내는 동치 표현들을 연결하는 데 있어서 연결의 대상이 되기도 하지만 연결의 방법이 되기도 한다. 구체물이나 시각적 표현은 실세계를 수학적 세계로 연결시켜 주며 기호적 표현이나 언어적 표현은 수학적 활동과 형식화된 수학의 개념을 연결시킨다. 또한 적용은 학습한 개념과 적용의 대상이 되는 새로운 상황과의 연결을 이루어주며 개방형 문제와 같은 문제 해결은 다양한 해법 간의 연결을 제공하며 이 과정에서 추론은 연결을 위해 필수적이다. 이러한 수학의 과정적 측면은 수학적 연결을 위한 방법이 되기도 하지만 연결성 계발이라는 관점에서도 중요하다(이종희, 1999). 다양한 표현 사이의 유창한 변환, 수학적 개념의 실생활 적용, 다양한 방법의 문제 해결 등은 연결하여 사고하는 방법을 계발할 수 있기 때문이다. 이와 같은 수학의 과정적 측면은 최근 우리나라 수학과 교육과정의 개정에서 일관적으로 강조되어 왔기 때문에 수업에서 구현된 연결성의 실태를 분석할 때 활용할 수 있는 중요한 방법이 될 수 있다.

마지막으로, 수학적 연결의 매개체로 연결자는 알고리즘, 그래프, 변수, 비(ratio) 등을 포함한다. 예를 들어 방어율, 타율, 이자율, 기온 변화 그래프 등은 수학을 활용하여 외부 세계를 표현한 것으로 연결자는 실생활 상황을 모델링 하는 역할을 한다고 할 수 있다.

한편, Lampert(2001)는 교사가 의도적으로 수학적 연결을 추구하는 초등학교 수학수업의 4가지 특성을 다음과 같이 제안하였다. 첫째, 맥락과 수학 내용을 연결하는 표현을 고안하기, 둘째, 학생들의 추론을 지지하는 연결 만들기, 셋째, 수학적 아이디어에 대해 의사소통하는 공유된 언어를 형성하기, 넷째, 학생들에게 활동 제공하기이다. 즉 수학적 연결성이 높은 수업을 구현하기 위해서 Lampert(2001)는 표현, 추론, 의사소통, 학생들의 활동을 제시하였다고 볼 수 있는데, Coxford(1995)가 수학적 연결의 과정적 측면으로 제시한 것과 유사한 것도 있고 그렇지 않은 것도 있다. 이는 수업이 이루어지는 환경, 다양한 수업 맥락, 수업 내용 등으로 인해 교사들이 사용하는 수학적 연결의 방법이 다를 수 있으며 이에 따른 시사점도 학자들마다 다를 수 있음을 시사한다. 이런 측면에서 초등학교 수학 수업에서 어떠한 연결의 방법을 많이 활용하고 있으며 각각의 방법들이 다양한 수업 맥락, 학습 내용 등과 어떻게 조화를 이루며 구현되고 있는지 살펴보는 것도 의미 있는 일이라고 생각된다.

또한, 연결성이 강조된 수업에서 다양한 연결의 방법들을 선택하고 활용하는 교사의 역할을 빼놓을 수 없을 것이다. 학생들의 사고를 바탕으로 수업을 계획하고 실행하며 반성하는데 있어서 교사가 상당 부분 역할을 하기 때문이다. 장윤정(2010)은 수학 수업에서 연결성이 높은 수업을 구현하기 위한 교사의 역할로 질문 제기, 과제 계획, 학생들의 이해상태 파악을 강조하였다. 첫째, 교사가 의도적인 질문을 제기함으로써 복잡한 문제 상황에서 초점이 되는 수학 개념을 탐구할 수 있게 하고, 관련된 개념이나 원리에 대한 질문을 제기함으로써 학생들의 수학적 연결을 진작시킬 수 있다는 것이다. 둘째, 수업에서 활용할 과제를 계획하는 데 있어서 개개 과제를 분리된 활동으로 계획하기 보다는 활동 간의 연결성을 충분히 고려하여 여러 가지 유기적 개념들이 서로 잘 연결되도록 과제를 준비한다면, 학생들이 그만큼 더 의미 있게 연결지어 사고할 수 있다는 것이다. 마지막으로 교사는 학생들의 수학적 이해 상태를 명확하게 파악하고 있어야 이를 바탕으로 연결성 있는 수업을 계획하고 실행할 수 있다는 것이다. 이와 같은 연구를 바탕으로 수학적 연결의 방법 측면에서 수업을 분석할 때 교사의 역할을 부가적으로 분석해 보는 것도 의미 있다고 생각된다.

3. 수학적 연결성 관련 선행 연구 분석

수학적 연결성에 대한 국내 연구를 살펴보면, 수업에서의 연결성을 다룬 연구보다는 수학 내적 측면에서 연결성을 바탕으로 지도방안을 탐색한 연구나 실생활이나 타 교과와 연결하여 가르칠 수 있는 소재 개발과 관련된 연구가 대부분이다. 예를 들어 황석근과 윤정호(2011)는 적분과의 연결성을 고려한 연속확률분포 단원의 지도 방안을 탐색하였고 정영우, 김부윤, 표성수(2011)는 수 체계와 다항방정식의 해법과의 연결성을 고려하여 영재학생들을 위한 교육 프로그램을 제안하였다. 또한 조미(1999), 채희진(1998) 등은 수학 외적 연결성을 인식할 수 있는 자료를 개발하였다. 이와 같은 연구들은 대체로 중·고등학교 수학 내용을 중심으로 연결 관계를 탐색하거나 교육 프로그램을 제안하고 있다.

수학적 연결성에 대한 교사들의 인식을 바탕으로 수업에서의 연결성을 다룬 외국의 연구들과 소수의 국내 연구들을 살펴보면, 다음과 같다. Businkas(2005)의 연구에 따르면, 대부분의 교사들은 수학적 연결성을 실생활에서 경제활동을 하거나 게임이나 다른 교과에 활용하는 수학 외적인 연결로 한정하여 개념화하고 있었다. 또한 실제 자신의 수업에서 구현하고 있는 수학적 연결의 모습을 설명하게 했을 때 즉시 답변할 수 있는 교사들이 거의 없었다. 자신이 하고 있는 행동에 대해 인식하지 못하는 부분이 있을 수도 있으나 수학적 연결성에 대해 주의를 기울여 수업을 행하고 있지 않음을 알 수 있다.

Leikin과 Levav-Waynberg(2007)의 연구는 많은 교사들이 연결된 과제를 활용하여 다양한 해법들 간의 연결성을 살펴보는 수업의 필요성을 인식함에도 불구하고 실제 수업 관행에서는 다양한 방법으로 문제를 해결하도록 하지 않는 원인에 대해 분석하였다. 이에 대해 연구자들은 교사들의 지식의 부족을 한 가지 원인으로 들었으며 교사들에게 연결된 과제에 대하여 다양한 해법을 제시하도록 하였을 때 다양한 방법을 제시하기 보다는 교육과정에 제시된 해결 방법에 의존하는 경향이 많음을 그 근거로 들었다.

장윤정(2010)은 각 시도 교육청 홈페이지에 탑재된 우수수업 사례를 수학적 연결성의 관점에서 분석하였다. 수업 에피소드를 바탕으로 단절된 수학적 연결성, 교사 주도의 절제된 수학적 연결성, 의미 있는 수학적 연결성으로 유형을 나누어 분석하였다. 단절된 수학적 연결성의 수업은 학생들에게 다양한 해결방법에 대하여 생각해 보는 기회를 제공하기는 하나, 교사 주도로 수학적 지식을 설명함으로써 학생들의 활동 결과를 수학적 탐구의 기회로 연결할 자율권을 학생들에게 제공하지 않는 수업이다. 교사 주도의 절제된 수학적 연결성의 수업은 학생들의 활동 결과를 일반화 하려고 시도하지만, 미리 준비된 단계화되고 절제된 질문을 통해 수학적 공식을 유도하는 수업의 유형이다. 마지막으로, 의미 있는 수학적 연결의 수업 사례는 학생들이 다양한 해결방법, 여러 가지 활동 결과를 토대로 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 일반화하는 수업이다. 장윤정의 연구는 여러 수업에서 학생들의 활동 결과를 일반화하고 형식화하는 단계에 나타난 수학적 연결성을 분석하였다. 그러나 수학적 연결성의 구현 여부를 살펴보는데 있어 수업의 특정 단계에만 초점을 두어 분석하는 것은 무리가 있으며 단계별로 연결의 빈도와 연결의 구현 양상을 구체적으로 살펴보는 것이 필요하다고 할 수 있다. 또한 수업의 단계별 분석은 연결성을 강조한 수업의 전개 양상을 이해하는데 도움을 주며, 수학적 연결성을 구현하려고 하는 교사들에게 수업의 각 단계별로 무엇에 초점을 두어야 하는지 구체적으로 안내해 줄 수 있다.

본 연구는 장윤정의 연구와 같이 우수 수업 동영상을 연결성의 관점에서 분석하지만, 수업의 각 단계별로 행해지는 연결의 모습을 분석하고자 한다. 또한 교사 주도, 학생 주도와 같이 연결의 주체에 의해 달라지는 수학적 연결의 구현 양상을 살펴보는 것이 아니라, 개념과 개념, 개념과 절차 등 연결의 대상별로 분석하고, 수업의 단계에 따라 나타나는 연결의 방법별로 수학적 연결의 구현 양상을 상세하게 살펴보고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 각 시도 교육청 우수 수업 동영상으로 탑재되어 있는 자료 중 2010년, 2011년 초등학교 수학 수

업으로 한정하여 조사하였다. 우수 수업 동영상을 선택한 이유는 다양한 유형의 실제 초등학교 수학 수업을 찾는데 자료 수집이 용이하기 때문이고, ‘우수 수업’으로 선정된 수업이기 때문에 수학적 연결성도 어느 정도 구현되었을 것이라고 기대되었기 때문이다.

연구 대상을 선정함에 있어서 일단 수업 동영상의 재생 시간이 30분 미만으로 편집된 수업은 연구 대상에서 제외하였다. 다음으로 초등학교 수학 내용과 학년을 고려하여 중복되거나 편중되지 않게 하였다. 이는 학습 주제에 따라 연결의 대상과 방법에 차이가 있을 수 있으며 가르치는 대상에 따라서도 사용하는 표현 양식이나 의사소통 방법 등 수학적 연결을 형성하는 방식이 달라질 수 있기 때문이었다. 이외에 교과서의 내용 구성을 고려하여 최종적으로 <표 1>과 같이 수와 연산 7편, 도형 4편, 측정 5편, 확률과 통계 2편, 규칙성과 문제 해결 영역2편의 수업 사례를 추출하였으며 학년별로는 1학년 3편, 2학년 4편, 3학년 2편, 4학년 4편, 5학년 4편, 6학년 3편을 연구 대상으로 하였다.

<표 1> 연구대상이 된 우수 수업

번	영역	학년	학습 주제
1	수와 연산	1	덧셈식 만들기
2		2	세 자리 수 혼합계산하기
3		2	분수로 나타내기
4		2	분수만큼 나타내기
5		3	곱셈 활용하기
6		3	내림이 없는 나눗셈
7		4	소수의 크기 비교하기
8	도형	1	여러 가지 모양
9		4	마름모 성질
10		4	직사각형, 정사각형 성질
11		5	선대칭 도형의 성질
12	측정	2	길이 어림하기
13		5	직(정)사각형 넓이 구하기
14		5	마름모 넓이 구하기
15		6	원주 구하기
16		6	원기둥 부피 구하기
17	확률과 통계	5	줄기 잎 그래프
18		6	확률
19	규칙성과 문제해결	1	규칙 찾기
20		4	규칙 찾아 문제 해결하기

2. 연구 방법 및 자료 분석

본 연구는 초등학교 수학 수업 동영상에 나타난 수학적 연결의 모습을 살펴보고자 양적 연구 방법과 질적 연구 방법 모두를 사용하였다. 우선, 20개의 수업 동영상과 지도안을 분석하여 수업의 단계를 도입, 전개(활동1, 활동2, 활동3), 정리로 나누었다. 대부분의 수업은 수업의 내용이나 모형과 상관없이 공통적으로 도입, 활동1, 활동2, 정리를 포함하고 있었다. 활동3은 지도안에 따라 구분되어 제시된 경우도 있었고 그렇지 않은 경우도 있었으나 정리단계 이전에 이루어지는 익히기, 수준별 학습, 적용 등의 학습 내용을 활동3으로 구분하였다.

수업의 각 단계별로 연결의 대상을 살펴보기 위해 수학 내용적인 부분에서 연결의 유형을 제시한 NCTM(1989, 2000)의 내용을 토대로 <표 2>와 같이 연결의 대상에 대한 수업 분석틀을 마련하였다. 다만, NCTM(1989)에서는 다른 교육 과정 영역에서 수학 사용하기, 예술, 음악, 심리학, 과학, 경제 등 다른 분야의 문제들을 해결하기 위해 수학적 사고와 모델링 적용하기를 제시하고 있으나 수업 분석의 대상이 되는 초등학교 수학수업에서는 타 교과나 전문 분야와의 수학적 연결이 거의 나타나지 않아 다른 영역이라는 용어로 통합하였다.

<표 2> 연결의 대상에 대한 분석틀

연결의 대상	분석 기준
개념-개념	본시에 학습할 개념과 관련된 선행 개념이나 후속 개념을 연결하는 경우
개념-절차	본시에 학습할 개념을 이해하기 위해 절차를 연결하는 경우
절차-절차	절차 사이의 관련성을 탐구하거나 여러 가지 아이디어를 연결하는 경우
표현-표현	동일한 개념이나 절차를 두 가지 이상의 다른 표현(예, 구체물, 언어)으로 연결하는 경우
개념-실생활	실생활 속에서 개념을 도입하는 경우 학습한 개념을 실생활에 적용하는 경우
개념-다른 영역	실생활을 제외한 다른 영역과 개념을 연결하는 경우

연결의 방법 또한 Coxford(1995)와 Lampert(2001)의 연구를 바탕으로, 크게 의사소통, 문제, 표현, 학생 활동, 적용, 추론으로 나누고 <표 3>과 같이 분석틀을 마련하였다. 여기서 ‘의사소통’은 교사-학생, 교사 설명, 학생-학생간의 의사소통으로 세분하였고, ‘문제’는 문제 제기와 문제 해결로 세분하였다. 또한 ‘학생 활동’의 경우 수업의 단계로 명명되는 ‘활동1’, ‘활동2’ 등과 혼동의 여지가 있기는 하지만, 초등학교 수학 수업의 특성상 다양한 구체적 조작 활동, 예를 들어 노래 개사하여 부르기, 게임 등의 활동이 등장하였기 때문에 연결의 방법으로써 분석틀에 포함하였다.

<표 3> 연결의 방법에 대한 분석틀

연결의 방법	분석 기준
의사소통	교사-학생간 의사소통, 교사 설명, 학생-학생간 의사소통으로 연결하는 경우
문제	문제제기: 문제를 제기하여 관련된 개념을 연결하는 경우 문제해결: 퍼즐, 이야기 문제, 골든벨 문제, 수준별 평가 등 문제 해결을 통해 연결하는 경우
표현	구체물, 반구체물, 언어, 기호, 맥락 등을 통해 연결하는 경우
학생 활동	학생들이 수행하는 구체적 조작활동, 노래 부르기, 게임 등 활동을 통해 연결하는 경우
적용	단순한 문제 해결이 아니라 개념을 새로운 상황에 적용하는 경우
추론	수학적으로 사고하고 추론하여 연결하는 경우

이후, 수업의 각 단계별로 연결의 대상과 방법을 <표 4>와 같이 분석하였다. 수업의 각 단계에서 여러 유형의 연결의 대상과 방법이 나타났을 경우 다중으로 체크하고 분석하였으며, 20개의 수업 분석 결과를 종합하여 연결의 대상과 방법별로 빈도와 퍼센트를 산출하였다.

<표 4> 수업의 연결성 분석의 예

마름모 넓이 구하기			
단계	활동내용	연결의 대상	연결의 방법
도입	동기유발	개념-실생활	표현
	문제 제기	개념-실생활	문제(제기)
	학습목표 활동안내	개념-절차	표현
활동 1	마름모 속성알기	개념-개념	의사소통(교사-학생), 표현
	다른 도형과의 관계	개념-개념	문제(해결)
활동 2	다양한 방법으로 넓이구하기	절차-절차 표현-표현	표현, 의사소통 (학생-학생)
	마름모 구하는 공식	절차-절차	의사소통(학생-학생), 표현
활동 3	넓이가 같은 마름모 그리기	개념-개념	학생 활동, 추론, 적용
정리	문제 해결	개념-절차	문제(해결), 의사소통 (교사-학생)
	노래	개념-절차	학생 활동

한편, 각 연결의 대상이나 방법이 수업에서 어떻게 구현되는지 살펴보고자 수업 자료를 전사하고 구현 양상별로 분석하였다. 본 논문에서는 대표적인 구현 양상별로 일부 에피소드를 제시한 후 보다 구체적으로 분석한 예를 추가하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 수업 단계별 연결의 대상 분석

수업의 각 단계별로 무엇을 연결하는지 연결의 대상에 대해 살펴본 결과 <표 5>와 같았다. 도입, 활동1, 활동2, 활동3, 정리에 나타난 연결의 모습을 살펴본 결과,

도입에서 가장 많은 연결을 찾아볼 수 있었다. 도입에서는 개념과 실생활(9.6%), 개념과 개념(7.6%), 개념과 절차(5.1%) 순서로 연결이 나타났다. 대부분의 수업들은 실생활에서 본시 학습 개념을 도입하는 경우가 많아 실생활과 개념의 연결이 많이 나타났다. 또한 전시 학습 개념을 확인함으로써 선수 학습 개념과 본시 학습 개념 사이의 연결을 볼 수 있었으며 전시 학습 내용을 상기하는데 있어서 지난 시간에 학습한 개념과 절차를 모두 알아보는 경우도 있어 개념-절차간의 연결도 나타났다.

활동1, 활동2, 활동3은 도입에 비해서 연결의 정도가 적게 나타났다. 활동1은 절차와 절차(5.7%), 개념과 절차(5.1%), 표현과 표현(4.5%), 개념과 개념(3.8%)간의 연결이 비교적 골고루 나타났다. 학습 주제나 교사의 특성에 따라 조금씩 다르지만, 도입에서 제기되었던 문제를 해결하기 위해 교사는 다양한 방법으로 해결할 것을 요구하였고 다양한 수학적 아이디어인 절차와 절차 사이의 연결을 살펴볼 수 있었다. 또한 그림으로 나타내거나 구체물, 언어, 문자, 기호적인 표현으로 나타냄으로써 다양한 표현간의 연결도 나타났다. 한편, 활동1을 다양한 방법을 탐구하도록 하는 것이 아니라, 개념을 학습할 수 있는 핵심적인 한 가지 방법으로 수업을 구성하는 경우도 많아 개념-절차간의 연결도 찾아볼 수 있었다. 또한 선수 학습 개념을 도입 부분에서 간단히 확인하고 상기시키는데 그치지 않고 <표 4>처럼 활동1에서 집중적으로 다룸으로써 개념과 개념간의 연결을 다룬 수업들도 있었다. 즉 활동1은 수업의 주제에 따라, 가르치는 교사에 따라 한가지로 유형화되지 않는 다양한 연결의 형태를 볼 수 있었다.

활동2는 활동1과 유사하게 개념과 절차(5.1%), 절차와 절차(3.8%), 표현과 표현(3.8%), 개념과 개념(2.5%)간의 연결이 나타났으나 활동1보다는 그 수가 조금 적었다. 활동1에서 구체적 조작활동을 통해 학습이 이루어졌다면 활동2에서는 보다 일반화되고 형식적인 방법에 의해 개념이나 절차에 대한 탐구가 이루어졌다. 그러므로 개념과 절차, 절차와 절차, 표현과 표현, 개념과 개념과 같이 연결시켜야 할 대상들이 활동1과 유사하게 나타났으나 그 수가 다소 적었다.

활동3은 개념과 절차(7.0%), 개념과 개념(2.5%), 개념과 실생활(2.5%)의 연결이 나타났는데, 활동1, 활동2와는 조금 특성이 달랐다. 초등학교 수학수업에서 활동3은 대체로 수준별 학습지를 해결한다거나 게임을 통해 본시 학습 개념과 절차를 익히는 학습을 하는 경우가 많았다. 이에 개념과 절차 사이의 연결이 가장 많이 나타났고 게임이나 문제가 활동1, 활동2에서 다루었던 기본적인 문제가 아니라 실생활 문제이거나 다른 개념과 관련된 복합적인 문제인 경우가 있어 개념-절차 이외에 개념-실생활, 개념-개념간의 연결도 찾아볼 수 있었다. 또한 활동3은 학생들이 수준별 문제를 해결하거나 게임 활동에 시간을 많이 소요함으로써 다른 단계에 비해 다양한 연결이 나타나지 않았다.

정리 단계는 개념과 절차(8.3%), 개념과 실생활(5.7%)이 많이 나타났다. 이 단계는 본시 학습 개념이나 절차에 대한 평가나 정리가 이루어지는 단계로 개념과 절차 사이의 연결이 가장 많이 나타났고 수업에 따라 학습한 개념을 실생활로 확장하는 경우가 있었다.

요약해 보면, 수업의 각 단계별로 수학적 연결의 대상을 파악해 본 결과, 도입에서 가장 많은 연결이 나타났고 활동1에서는 다양한 유형의 연결이 고르게 나타났으며 활동3에서는 그 수가 가장 적게 나타났다.

<표 5> 수업 단계별 연결의 대상에 대한 빈도와 퍼센트

대상 / 단계	개념-개념	개념-절차	절차-절차	표현-표현	개념-실생활	개념-다른영역	계
도입	12 (7.6)	8 (5.1)	1 (0.6)	2 (1.3)	15 (9.6)	4 (2.5)	42 (26.8)
활동1	6 (3.8)	8 (5.1)	9 (5.7)	7 (4.5)	3 (1.9)	0 (0)	33 (21.0)
활동2	4 (2.5)	8 (5.1)	6 (3.8)	6 (3.8)	4 (2.5)	0 (0)	28 (17.8)
활동3	4 (2.5)	11 (7.0)	2 (1.3)	1 (0.6)	4 (2.5)	2 (1.3)	24 (15.3)
정리	5 (3.2)	13 (8.3)	3 (1.9)	0 (0)	9 (5.7)	0 (0)	30 (19.1)
계	31 (19.7)	48 (30.6)	21 (13.4)	16 (10.2)	35 (22.3)	6 (3.8)	157 (100)

2. 연결의 대상별 구현 양상

연결의 대상별로 수업에서 구현되는 모습을 살펴보면, 개념과 절차 사이의 연결(30.6%)이 가장 많이 나타났다. <에피소드 1>은 개념과 절차의 연결을 보여주는 대표적인 예로서 원기둥의 부피가 직육면체의 부피와 같음을 보여주고 원기둥의 부피 구하는 공식을 유도하고 있다. ‘원기둥의 부피가 직육면체의 부피와 같다’라는 것을 인식시키기 위해서 원기둥을 작게 나누어 직육면체 모양으로 엇갈려 붙이는 조작활동이 이루어졌으며 시각적 표현을 통해 원기둥과 직육면체가 직관적으로 같음을 인식시켜 주었다. 이후 원기둥의 부피를 구하는 절차와 연결짓는 과정에서 미리 정해진 단계화된 발문에 학생들이 답변하도록 함으로써 공식을 유도하였다. 즉 개념과 절차를 연결짓기 위해 활동, 표현, 추론, 의사소통 등 다양한 방법이 활용되고 있었으나 학생들로 하여금 부피 개념이나 부피를 구하는 절차 사이의 관계를 탐구하도록 하기보다는 교사가 유도하는 방향으로 일방향적인 연결이 이루어지고 있었다.

<에피소드 1> 개념-절차의 연결 사례

교 사 : 원기둥을 등분하여 엇갈려 붙였더니 어떠한 모양이 되어가고 있나요?

학생들 : 직사각형

교 사 : 지금까지 8등분까지만 했는데, 계속 등분하면 어떤 모양이 될까요?

학생들 : 직사각형

교 사 : 어떤 입체도형이 될까요?

학생들 : 직육면체

교 사 : 그럼, 직육면체의 부피를 구하는 것은 무엇의 부피를 구하는 것일까요?

학생들 : 원기둥.

교 사 : (원기둥을 등분하여 직육면체를 만들어 놓은 그림에 표시하면서) 밑면의 가로는 원기둥의 무엇에 해당되나요?

학생들 : 원주의 1/2

교 사 : 밑면의 세로는 원기둥의 무엇에 해당되나요?

학생들 : 반지름

교 사 : 여기는?

학생들 : 높이요.

교 사 : (학생들의 답변을 칠판에 기록하면서) 직육면체 부피는 무엇이라고 할 수 있나요?

학생들 : 원주의 1/2 곱하기 반지름 곱하기 높이

교 사 : 지난시간에 원주는 뭐 곱하기 뭐라고 했나요?

학생들 : 지름 곱하기 3.14

교 사 : (원주 대신 아래에 ‘지름×3.14’를 적는다.) 계속하면

학생들 : 곱하기 1/2 곱하기 반지름 곱하기 높이

교 사 : (학생들이 말하는 대로 칠판에 ‘지름×3.14×1/2×반지름×높이’라고 쓴다.) 지름이 있고 1/2이 있어요. 이거 어떻게 되지요?

학생들 : 반지름

교 사 : (칠판에 기록하면서) 반지름 곱하기 반지름 곱하기 3.14 곱하기 높이는 원넓이 곱하기 높이.

두 번째로 많이 나타난 연결은 수학 외적인 연결로 개념과 실생활과의 연결(22.3%)이다. 학생들에게 친숙한 동화 이야기로 문제를 제기한 몇몇의 수업을 제외하고는 모든 수업에서 실생활을 통해서 본시 학습 개념을 도출하는 모습을 볼 수 있었다. 그러나 실생활과 같은 수학외적인 연결이 동기 유발이나 문제 제기를 위하여 수업의 도입부분에서만 잠시 등장할 뿐 수업의 중간에는 거의 나타나지 않았다. 경우에 따라서는 도입부에서 제기되었던 문제가 수업의 말미에 이르기까지 한 번도 다루어지지 않는 경우도 있었다. 즉 수학 외적 연결에 대한 심도 있는 탐구가 이루어지기 보다는 동기유발을 하기 위하여 실생활과의 연결이 활용되는 경향이 있었다.

세 번째로 많이 나타난 연결은 개념과 개념의 연결(19.7%)이다. <에피소드 2>는 개념과 개념간의 연결이 구현되는 전형적인 예로 직사각형과 정사각형의 넓이를 구하는 방법을 학습하기 위해 이전에 학습한 단위 넓이 개념, 직사각형과 정사각형의 정의 및 차이점을 질문하고 있다. 이와 같이 개념과 개념의 연결은 수업의 중반부에서 심도 있게 다루어지기 보다는 대체로 수업의 도입 부분에서 전시 학습을 상기시키면서 본시 학습 내용과 연결하려는 형태로 나타났다. 즉 본시 학습 개념을 학습하기 위한 도구적인 수단으로 선수 학습 개념을 연결하는 경우가 많았다.

<에피소드 2> 개념-개념간의 연결 사례

교 사 : 가로 세로의 길이가 1cm를 무엇이라고 불렀나요?
학생들 : $1cm^2$
교 사 : $1cm^2$는 이 정도 되는데(칠판에 붙여져 있는 단위 넓이를 가리킴) 보여요?
학생들 : 아니요
교 사 : 그래서 돋보기를 가져왔는데 보여요?
학생들 : 안 보여요. 보여요.
교 사 : 그래서 이렇게(확대된 단위 넓이를 칠판에 붙임) 확대를 했어요. 이 $1cm^2$는 (칠판에 붙여져 있는 정사각형과 직사각형 그림을 가리키며)정사각형일까요? 직사각형일까요?
학생 1 : 정사각형입니다. 왜냐하면 네 변의 길이가 모두 같기 때문입니다.
교 사 : 네 변의 길이가 같은 도형? 이런 것(마름모를 그림)도 있지요? 보충?
학생 2 : 네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 같기 때문입니다.
교 사 : 이런 것(단위 넓이)을 2개 붙이면 무엇이 될까요?
학생들 : 직사각형
교 사 : 돌려도 직사각형이 될까요?
학생들 : 네.
교 사 : 그럼. 직사각형과 정사각형의 차이점은?
학생 3 : 직사각형과 정사각형의 차이는 정사각형은 네 변의 길이가 같은데 직사각형은 같지 않습니다.
교 사 : 지난시간에 배운 이런 내용을 왜 자꾸 물어보나하면 평면도형의 둘레와 넓이 중 정사각형과 직사각형의 넓이를 배우기 위해서예요.

네 번째로 빈도가 높은 연결은 절차-절차 사이의 연결(13.4%)로 다양한 방법으로 개념을 탐색하거나 문제를 해결하려는 수업에서 많이 나타났다. <에피소드 3>은 절차-절차의 연결을 보여준 대표적인 예로서 학생들은 28÷2를 다양한 방법으로 해결하였고 교사는 보다 간편한 방법을 찾는 것으로 형식화시켜 나갔다. 교사는 바둑알 28개를 사용하지 않고 바둑알 2개를 각각 십이라고 가정하여 하나씩 나눈 경우(학생 4의 발표)가 수모형을 이용한 방법(학생 3의 발표)과 같음을 인식하여 학생들에게 질문하였으나 학생들은 두 가지 수학적 아이디어 사이의 관계를 탐구하기 보다는 또 다른 새로운 방법을 찾으려고 손을 들었다. 그 결과 수업 중에 절차와 절차 간의 연결이 나타나기는 하였으나 적절한 탐구가 이루어지지 못하였다. 또한 교사는 다양한 수학적 아이디어 중에 보다 편리한 방법에 대해 생각해 보도록 발문하였으나 교사의 예상과 달리 '낱개모형이 더 편리하다', '구구단을 활용한다', '검산식을 활용한다' 등 비효율적인 방법이 효율적이라고 답하거나 새로운 방법을 발표하려고 하여 교사가 일방적으로 보다 편리한 방법을 제시하였다. 본 연구에서 살펴본 우수 수업들은 대체로 <에피소드 3>과 같이 다양한 방법으로 문제를 해결하려는 활동들이 계획되어 있었으나 일반화하는 과정에서 교사의 의도와는 다른 예상 밖의 상황이 발생하였고 이로 인해 교사 주도로 연결이 제시되거나 탐구가 이루어져야 할 수학적인 부분에 초점을 두지 못함으로써 심도 있는 탐구가 수행되지 못하는 경향이 있었다.

<에피소드 3> 절차-절차의 연결 사례

학생 1 : (28÷2 문제를 해결하기 위해 수모형을 놓으며) 8이 좀 크니까 10으로 해서 30을 두 개로 나누면 15가 되었는데 각각에서 하나씩 빼주면 14가 됩니다.
교 사: 28개인데, 30개로 해서 두 개로 나누고 하나씩 빼주면 된대요. 선생님은 생각지도 못한 방법인데 참 잘했어요. 다른 사람?
학생 2 : (칠판에 나와서 바둑알을 놓으며 설명한다) 저는 수모형보다는 바둑돌이 정확할 것 같아서 누구나 생각할 수 있는 방법이지만 하나씩 나누고 하나씩 세어보아 14가 됨을 알았습니다.
교 사 : 28개를 똑같이 2개씩 빼주어서 각각을 나누어 놓고 14번 빼니까 없어져서 14개라고 했다고 하네요.
학생 3 : (칠판에서 수모형을 이동시키며) 십모형부터 두 개로 나누면 하나씩 되고 8개를 나누면 4개가 되었어요.
교 사 : 십모형을 먼저 두 개로 나누고 낱개 있는 것을 나누었대요. [학생 4] 나와서 발표하세요.
학생 4 : 바둑알 28개를 생각하면, 복잡하니까 10개를 가

지고 했어요. 이 2개를 십이라고 생각하고, 8개는 낱개라고 생각하면, 첫 번째로 나누면 이렇게 되고(십으로 생각한 바둑알을 하나씩 분할한다) 낱개도 나누면 4개씩 되요.

교 사 : 이 방법은 아까 어떤 방법이랑 같은 것이지?

학생들 : 수모형

교 사 : 수모형 십의 자리하고 낱개로 한 것이랑 비슷한 것이에요. 색깔을 다르게 하면 되니까…(학생들은 손을 계속 든다.)... 거의 방법들이 나온 것 같아. 비슷한 경우가 많아요. 그럼 이것을 가지고 식을 만들어 보려고 해요. 매일 매일 이런 모형을 가지고 해도 좋지만, 수학을 배우는 이유는 이런 것들이 없더라도 모든 사람들이 나눗셈을 이런 식으로 할 수 있도록 하는 방법을 배우는 거예요.

교 사 : 어떤 사람은 낱개로도 하고, 어떤 사람은 십 모형을 나누고 낱개를 나눈 경우도 있어요. 여러 방법 중에서 어떤 것이 더 편리한 방법인지 생각해보자. 시간이 빠르면서도 더 정확한 방법은 어떤 것이 있을까?

학생 5 : 낱개로 하는 방법이 편리합니다.

교 사 : 낱개가 편리해요? 그럴 수도 있어요. 난 다른 게 더 편리하다?

학생 6 : 구구단요.

교 사 : 구구단으로 이용해서 반대로 나누어서 합니다.

학생 7 : 십끼리 나누고 낱개 모형끼리 나누어요.

교 사 : 또 다른 것 있어요?

학생 8 : 수모형으로 할 때는 자꾸 움직이니까 검산식으로요.

교 사 : 검산식은 몫이 나와야 하는 거잖아. 우리는 지금 몫을 구하는 것이고…. 그것도 좋은 방법이에요.

교 사 : 지금 여러분들이 하는 것을 보니까, 십 모형으로 나눠놓고 낱개를 나눈 것이 많아. (수모형을 움직이며) 십 모형을 나누니까 10개짜리 몇 개씩 갔어? (1개 씩요) 낱개는 몇 개씩 갔어? (4개 씩요.) 나눗셈을 할 때는 십 모형을 나누고 낱개를 하면 좀 더 빠르고 정확하게 할 수 있습니다.

상대적으로 연결의 빈도가 낮게 나타난 표현과 표현 사이의 연결(16)은 학습 주제에 따라 영향을 많이 받았다. 예를 들어 분수만큼 나타내는 학습 주제에 대해서는 실생활 맥락, 구체물, 그림 등에 나타난 양을 분수라고 하는 문자 기호나 언어 기호로 바꾸는 것이 수업 전반에 걸쳐 학습되었다. 그러나 도형의 이름이나 성질에 대해서 학습하는 차시의 경우는 다양한 모양의 도형을 보고 도형의 이름을 짓고 도형의 이름이 들어가는 문장을 만드는 부분적인 활동에서만 표현과 표현 간의 연결이 나타났다.

마지막으로, 실생활 이외의 다른 영역과의 연결은 수업에서 거의 나타나지 않았는데, 흥부와 놀부, 걸리버 등 동화 속 주인공을 등장시켜 수학 개념이 포함된 이야기 맥락이 문제 상황으로 제시된 경우 부분적으로 나타났다. 이는 교사에 의해서 의도적으로 만들어진 이야기로 저학년 수업에서 조금 나타났으며 학생들이 수학에 대해 흥미를 갖게 하는 용도로 활용되고 있었다.

연결의 대상별로 단위 수업에 나타난 연결의 모습을 정리해 보면, 개념-절차(30.6%)의 연결이 가장 많이 나타났고 개념과 실생활(22.3%), 개념과 개념(19.7%), 절차와 절차(13.4%), 표현과 표현(10.2%), 개념과 다른 영역(3.8%)의 순서로 나타났다. 수업에 나타난 연결의 모습을 에피소드를 중심으로 살펴본 결과 두 개의 연결 대상 사이의 관련성을 심도 있게 파악하기 보다는 동기 유발, 관련 개념의 상기 정도로 연결 관계를 다루거나 교사에 의한 일방적인 연결로 행해져 미흡한 점을 엿볼 수 있었다.

3. 수업 단계별 연결의 방법 분석

수업의 각 단계별로 어떻게 연결하는지를 살펴본 결과 <표 6>과 같았다. 도입, 활동1, 활동2, 활동3, 정리에 나타난 연결의 방법을 살펴본 결과, 활동1에서 가장 다양한 연결의 방법이 나타났고 활동3에서 가장 적은 수의 연결이 이루어졌다. 이는 앞서 살펴본 연결의 대상 결과와 비교해 볼 때 활동3에서 연결의 대상과 방법이 가장 단순하다는 공통적인 결과를 얻을 수 있었다. 또한 연결의 대상은 도입에서 가장 많이 나타났지만 연결의 방법은 활동1에서 가장 다양하게 나타났다. 도입은 연결의 대상은 다양하지만 단순한 연결 관계를 갖는 대상들을

연결하므로 여러 가지 연결 방법이 필요하지 않지만, 활동1은 본시 학습 개념을 가르치는 처음 단계로서 다양한 연결의 방법이 필요하다고 할 수 있다. 또한 수업 전 단계에서 이루어진 전체 연결 대상의 수(157)에 비해 전체 연결 방법의 수(230)가 더 많아 두개의 대상을 연결하는데 있어 여러 가지 방법이 복합적으로 사용됨을 알 수 있다.

각 단계별로 나타난 연결의 방법을 살펴보면, 도입에서는 학습 동기를 유발하기 위해 문제 제기(6.5%)가 가장 많이 나타났고 표현(6.1%)을 통해서 학생들의 이목을 집중하도록 하였다. 가장 다양한 연결의 방법이 나타난 활동1에서는 구체물이나 반구체물과 같은 표현(7.8%)이 많이 활용되었으며 교사와 학생간의 의사소통(6.1%)을 통해 절차와 절차, 개념과 절차 등의 연결을 이루었다. 또한 학생들을 구체적 조작 활동과 같은 활동(5.2%)에 직접 참여시킴으로써 수학 개념과 절차에 대한 연결을 이루었으며 그 과정에서 소수이지만 추론(2.2%), 문제 해결(1.7%), 학생간의 의사소통(1.7%), 교사의 설명(1.7%), 적용(1.3%) 등이 다양하게 행해졌다.

활동2에서는 활동1과 유사하지만, 활동1보다는 표현(4.8%), 활동(4.8%), 교사-학생간 의사소통(4.3%), 추론(1.3%), 적용(0.9%) 등 모든 영역에서 조금씩 그 수가 적었다. 활동3은 활동1이나 활동2에서 학습한 개념을 익히는 단계로 문제 해결(3.9%)을 통해서 개념과 절차간의 연결이 많이 이루어졌으며 표현(3.0%), 교사와 학생간의 의사소통(2.6%), 활동(2.6%) 등이 나타났다.

정리 단계에서는 알게 된 점이나 본시 학습의 핵심적인 개념과 절차에 대해 발문하고 답변하는 교사와 학생간의 의사소통(5.7%)이 주로 이루어졌다. 또한 간단한 문제 해결(5.2%)을 통해서 본시 학습 개념과 절차에 대한 평가가 이루어지기도 하였다. 요약해 보면, 초등학교 수학수업에 나타난 수학적 연결의 방법을 수업의 각 단계별로 살펴본 결과, 활동1에서 가장 많은 연결의 방법이 사용되었고 활동3에서 그 연결 방법의 수가 가장 적게 나타났다.

4. 연결의 방법별 구현 양상 분석

연결의 방법들이 수업에서 구현되는 모습을 살펴보면, 의사소통(32.2%)이 가장 많이 활용됨을 알 수 있다. 발문을 통한 교사와 학생간의 의사소통(21.7%)은 연결의 방법뿐만 아니라 수업을 이끌어가는 주된 요소이다. <에피소드 1,2,3>에서처럼 교사와 학생간의 의사소통은 개념과 절차, 절차와 절차 등 어떠한 연결에도 빠져있지 않다. 반면에 학생과 학생간의 의사소통(3.5%)은 소수의 수업 사례에서만 나타났다. 대부분의 수업들이 모둠활동을 포함하고 있지만 모둠 내에서 활동만을 할 뿐 활동의 의미에 대해 학생들 간에 의사소통하는 경우는 드물었다. 교사의 설명(7.0%)은 활동 방법을 안내하거나 <에피소드 3>처럼 학생들의 답변으로 연결이 제대로 되지 않아 명확하게 정리해 주어야 할 필요가 있을 경우 나타났다.

두 번째로 빈도가 높은 표현(23.5%)은 수업의 모든 단계에 걸쳐 고르게 나타난 것으로 연결의 핵심적인 방법으로서 뿐만 아니라 보조적인 방법으로서 활용도가 높았다. 색종이나 피자와 같은 구체물을 등분하고, 그 양을 그림으로 나타내며, 분수 기호를 사용하여 형식화하는

<표 6> 수업 단계별 연결의 방법에 대한 빈도와 퍼센트

방법 / 단계	의사소통			문제		표현	학생 활동	적용	추론	계
	교사-학생	교사 설명	학생-학생	문제 제기	문제 해결					
도입	7(3.0)	2(0.9)	0(0)	15(6.5)	5(2.2)	14(6.1)	3(1.3)	0(0)	0(0)	46(20)
활동1	14(6.1)	4(1.7)	4(1.7)	0(0)	4(1.7)	18(7.8)	12(5.2)	3(1.3)	5(2.2)	64(27.8)
활동2	10(4.3)	3(1.3)	4(1.7)	0(0)	0(0)	11(4.8)	11(4.8)	2(0.9)	3(1.3)	44(19.1)
활동3	6(2.6)	1(0.4)	0(0)	1(0.4)	9(3.9)	7(3.0)	6(2.6)	4(1.7)	2(0.9)	36(15.7)
정리	13(5.7)	6(2.6)	0(0)	0(0)	12(5.2)	4(1.7)	3(1.3)	2(0.9)	0(0)	40(17.4)
계	50(21.7)	16(7.0)	8(3.5)	16(7.0)	30(13.0)	54(23.5)	35(15.2)	11(4.8)	10(4.3)	230(100)

과정에서 나타난 다양한 표현들은 연결의 핵심적인 방법으로써 활용이 되었다. 반면에 <에피소드 2>처럼 단위 넓이, 직사각형, 정사각형의 그림을 제시하는 것은 도형 개념과 넓이 개념을 연결하는데 핵심적인 방법은 아니었지만 직사각형과 정사각형의 정의, 관계를 직관적으로 인식하고 단위 넓이로 도형을 채워서 넓이를 구하는 학습을 위한 보조적인 역할을 수행하였다. 이러한 보조적인 표현의 활용은 학생들이 수학 학습에 대한 이해를 높일 뿐 아니라, 수업의 전 단계에서 높은 활용을 나타내는데 기여하였다.

세 번째로 많이 나타난 연결의 방법으로는 문제(20%)를 들 수 있다. 많은 교사들은 수업에서 문제를 제기하거나(7.0%) 학생들에게 문제를 해결(13.0%)하도록 함으로써 개념과 개념, 개념과 절차간의 연결을 추구하였다. 문제인 경우 수업의 단계에 따라 빈도가 크게 차이가 났는데 문제 제기는 도입부에서 많이 나타났고 문제 해결은 활동3이나 정리 단계에서 많이 나타났다.

네 번째로 많이 나타난 학생 활동(15.2%)은 수업의 각 단계별로 종류가 달랐다. 활동1과 활동2는 수학 개념을 탐구하기 위한 조작 활동들이 많이 행해졌으나, 활동3에서는 학습한 개념을 활용하는 게임 활동이 이루어졌고 정리 단계에서는 학습한 개념이나 절차가 들어가도록 개사한 노래 부르기 활동 등이 나타났다.

적용(4.8%)은 단순한 문제 해결이 아니라 학습한 개념을 새로운 상황으로 확장하는 것으로 추론(4.3%)과 더불어 적은 빈도로 수업에서 활용되었다. 적용이나 추론은 다른 연결의 방법과 달리 높은 수준의 사고를 요구하는 것으로 수학 수업에서 많이 이루어져야 하는 연결의 방법임에도 불구하고 수업에서 많이 나타나지 않았다. 그 이유로 다른 방법들은 독립적으로도 활용이 가능하였으나 추론이나 적용은 학생들의 이해를 돕기 위해 다른 연결의 방법과 함께 복합적으로 이루어져 상대적으로 빈도가 적게 나타났다고 추정해 볼 수 있다. 예를 들어 <에피소드 1>에서 원기둥의 부피가 직육면체의 부피와 같아서 원기둥의 부피를 구하려면 직육면체의 부피를 구하는 방법처럼 구하면 된다는 추론의 과정은 표현이나 조작활동, 의사소통과 함께 활용이 되었다. 또한 수업에 구현된 연결의 모습을 살펴본 <에피소드 1,2,3>에서 알 수 있듯이 외형적으로는 다양한 방법을 통해 연결이 잘 이루어지는 것처럼 보이지만 실제적으로는 교사가 일방적으로 제시하여 학생들이 사고하는 방향으로 연결이 행해지지 않는 것에서 추론이나 적용의 빈도가 낮은 원인을 추정해 볼 수 있다.

연결의 방법별로 단위 수업에 나타난 연결의 모습을 정리해 보면, 의사소통(32.2%)이 가장 많이 나타났고 표현(23.5%), 문제(20%), 학생 활동(15.2%), 적용(4.8%), 추론(4.3%)의 순서로 나타났다. 연결의 방법들이 수업에 구현된 모습을 살펴보면 학생들이 수학적 연결성을 구축하기 위해 다양한 연결이 나타났으며 핵심적 방법이 아니더라도 보조적으로 활용하여 여러 가지 방법이 복합적으로 활용되었다.

V. 결론 및 논의

본 연구의 결과를 바탕으로 수업의 연결성에 대한 시사점을 제시하면 다음과 같다. 첫째, 초등학교 수학수업에 나타난 연결의 대상과 방법을 수업의 단계별로 분석해 본 결과 단계별로 나타나는 연결의 모습에 특징이 있었다. 도입에서는 개념과 개념, 개념과 실생활 유형의 연결이 나타났고 다른 단계에 비해 연결하는 대상의 수가 많았다. 활동1에서는 절차와 절차, 개념과 절차 등 연결의 대상이 다양할 뿐만 아니라 이를 연결하기 위한 방법의 수도 가장 많이 나타났다. 활동2는 활동1과 유사하였으며 활동3은 문제 해결을 통한 개념과 절차 간의 연결이 많이 나타났다. 정리 단계는 문제 해결이나 의사소통을 통해서 개념과 절차의 연결이 많이 이루어졌다. 이러한 특징은 수업의 단계에 따라 목적이 다르기 때문에 추구해야 할 연결성의 모습도 다르게 나타났다고 볼 수 있다. 따라서 수학적 연결성을 구축하는 수업을 구현하기 위해 수업의 단계별로 고려하여야 할 부분에 차이가 있으며 이는 연결성의 관점에서 수업을 분석할 때 분석의 한 가지 기준을 제공할 수 있다고 생각된다.

둘째, 연결의 대상별로 단위 수업에 나타난 연결의 모습을 살펴보면, 개념과 절차(30.6%)의 연결이 가장 많이 나타났고 개념과 실생활(22.3%), 개념과 개념(19.7%), 절차와 절차(13.42%), 표현과 표현(10.2%), 개념과 다른 영역(3.8%)의 순서로 나타났다. 수업에 나타난 연결의 모습을 에피소드를 중심으로 살펴본 결과 단위 수업에서

핵심적인 연결인 개념과 절차의 연결을 형성하기 위해 다양한 연결의 방법이 복합적으로 활용되어 연결이 잘 형성되는 듯 보이나 좀 더 상세히 살펴보면, 교사에 의해 일방적으로 연결이 이루어지고 있는 경우가 많았다(<에피소드 1> 참고). 이는 장윤정(2010)이 수업에서 이루어지고 있는 수학적 연결성을 단절된 연결성, 교사 주도의 절제된 수학적 연결성, 의미 있는 수학적 연결성으로 구분한 것 중 교사 주도의 절제된 수학적 연결성에 해당된다. 그러나 미리 준비한 단계화되고 절제된 질문을 통해 수학 공식을 유도하는 수업은 학생들을 수동적이게 하며 교사의 질문에 우수한 학생들이 답을 함으로써 전체 학생들의 사고를 확장하는 방향으로 수업이 구현된다고 볼 수 없다. 따라서 단위 수업에서 가장 많이 나타나는 핵심적인 연결인 개념-절차의 연결에 대해 좋은 연결의 사례를 교사들에게 제공하고 적절한 연결이 수업 중에 구현될 수 있도록 수학적 연결성 구축을 위한 교사들의 노력이 필요하리라 여겨진다.

한편, 수업에 나타난 개념과 실생활과의 연결은 학생들로 하여금 수학 외적인 연결을 심도 있게 다루게 하기보다는 본시 학습 개념에 대한 동기 유발 자료로서 축소되어 활용되는 경우가 있었다. 이러한 연결은 생활의 문제를 모델링하여 수학적으로 해결하는 생활 속의 수학을 형성하는데 제약조건이 될 수 있다. 따라서 개념과 실생활의 연결이 도입에서만 잠시 등장하는 흥밋거리가 아니라 수업 내내 탐구해야 할 대상이고 해결해야 할 문제임을 학생들에게 인식시키고 학습한 개념을 통해 생활 속의 문제를 해결하는 기쁨을 느낄 수 있도록 하며 유사한 생활 속의 문제에 대해서도 수학적으로 해결하려는 태도를 심어주어야 할 필요가 있다.

또한, 수업 중에 나타난 개념과 개념의 연결은 본시 학습 개념을 위한 도구로서 선수학습 개념과의 연결이 이루어져 비대등한 연결이 나타났다. 물론 수학이 계통성 있는 학문으로 본시 학습 개념을 잘 가르치기 위해서는 전시 학습 개념에 대한 충분한 이해가 있어야 한다. 그러나 본시 학습 개념을 위한 도구로서의 개념이 아니라 수학을 통합된 전체로서 바라볼 수 있도록 관련 개념에 대한 연결 관계를 심층적으로 탐구할 수 있는 기회를 제공해 주어야 할 필요가 있다고 여겨진다.

절차와 절차의 연결은 다양한 방법으로 문제를 해결하고 개념을 탐구하려는 수업에서 많이 나타났다. 그러나 <에피소드 3>처럼 교사가 절차와 절차 간의 연결성을 파악하고 이들 관계를 학생들과 논의하려고 하더라도 학생들은 미처 그러한 연결 관계를 파악하지 못한 경우가 많아 교사가 예상하지 못한 답변이 많이 나타났다. 이에 대해 교사는 학생들과 함께 연결성을 탐구해 나가는 것을 포기하고 절차와 절차 사이의 연결 관계를 일방적으로 설명하였다. 이러한 현상은 장윤정(2010)이 제시한 의미 있는 수학적 연결을 수업에서 구현하려고 하나 난관에 부딪히는 예라고 할 수 있다. 그러므로 연결성 있는 수업을 구현하는데 있어서 교사가 느끼는 어려움이 구체적으로 무엇이며 그 원인에 대해서도 많은 연구가 필요하다. 그리고 이러한 어려움을 극복하기 위한 노력들이 행해져야 연결성 있는 수업이 필요함을 인식하더라도 실제 관행에서는 나타나지 않는 불일치 현상을 줄일 수 있을 것으로 여겨진다.

마지막으로 수업에 나타난 연결의 방법을 살펴보면, 의사소통(32.2%)이 가장 많이 나타났고 표현(23.5%), 문제(20%), 학생 활동(15.2%), 적용(4.8%), 추론(4.3%)의 순서로 나타났다. 선행연구에서 Lampert(2001)는 연결성을 의도적으로 구현하는 수업에서 표현, 추론, 의사소통, 학생들의 활동을 계획하였고 Coxford(1995)는 수학적 연결의 과정적 측면으로 표현, 적용, 문제 해결, 추론을 제시한 바 있다. 본 연구의 초등학교 수학수업들은 선행연구에서 나타난 다양한 연결의 방법이 모두 나타났는데, 선행연구에서 공통적으로 찾아볼 수 있는 표현과 추론에 대해서는 빈도의 차이가 크게 났다.

표현은 연결의 방법에 있어 핵심적인 방법이 아닐지라도 보조적 활용만으로도 연결성을 구축하는데 도움이 되어 활용도가 높았다. 반면에 추론은 수학적 연결성의 형성을 위해 많이 활용되어야 할 방법임에도 불구하고 수업에 나타난 빈도는 그리 높지 않았다. 이는 추론이 이루어지는 연결에는 다른 방법들이 복합적으로 활용되는 반면에, 다른 연결의 방법들은 독립적으로도 잘 활용되기 때문에 상대적으로 추론의 빈도가 낮게 나타났다고 생각해 볼 수 있다. 또 다른 이유로는 일부 에피소드에서 알 수 있듯이 학생들의 사고를 촉진하는 방향으로 연결이 이루어지지 않아서 추론과 같은 높은 수준의 사고과정이 포함된 빈도가 낮게 나타났다고 추정해 볼 수 있다.

이런 측면에서 전체 연결의 방법 중 추론에 해당하는 빈도가 상대적으로 낮은 것은 큰 문제가 되지 않을 수도 있으나 연결의 질적인 측면에서 학생들의 사고를 촉진하고 확장하는 방향으로 수업이 구현되지 않을 수 있다는 점은 재고의 여지가 많다고 생각된다. 이에 연결의 질에 초점을 두어 각각의 연결의 대상들이 어떻게 연결되고 있는지 어떻게 연결이 되어야 좋은 수학 수업을 구현하는 데 보다 도움이 될 수 있는지에 대한 많은 후속 연구가 파생되기를 기대해 본다.

참고 문헌

이종희(1999). 수학적 연결성에 대한 연구(수학과 미술과의 연결). 교과교육학연구, **3**(2), 이화여자대학교 교과교육연구소.

장윤정(2010). 초등학교 수학과 좋은 수업에 대한 실태분석 및 수업에서 이루어지는 수학적 연결성에 대한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

정영우, 김부윤, 표성수(2011). 수학적 연결성을 고려한 수 체계의 지도에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **25**(2), 473-494.

조미(1999). 중학교 수학의 외적 연결성: 연결자료를 중심으로. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

채희진(1998). 기하영역에서의 수학 외적 연결성에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

황석근, 윤정호(2011). 수학적 연결성을 고려한 연속확률분포단원의 지도방안 연구. 학교수학, **13**(3), 423-445.

Businkas, A.(2005). Making mathematical connections in the teaching of school mathematics. In G. M. Lloyd, J. L. M. Wilson, & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Virginia.

Coxford, A(1995). The case for connections. In P. House, & A. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). Reston, VA: NCTM.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics,* **66**, 349-371.

Leong, Y. H. (2012). Presenting mathematics as connected in the secondary classroom. In B. Kaur, & T. L. Toh (Eds). *Reasoning, communication and connections in mathematics* (pp. 239-260). Singapore: Association of Mathematics Educators.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author.

____________________ (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers(NGA Center and CCSSO). *Common core state standards for mathematics.* Washington, D.C.: NGA Center and CCSSO, 2010. http://www.corestandards.org.

Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics* (9th ed.). NY: John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역(2012). 초등 교사를 위한 수학과 교수법. 서울: 경문사.

Thomas, C. D., & Santiago, C. (2002). Building mathematically powerful students through connections. *Mathematics Teaching in the Middle School,* **7**(9), 484-488.

An Analysis of the Objects and Methods of Mathematical Connections in Elementary Mathematics Instruction

YuKyung Kim
Chilbo Elementary school, Suwon, Korea
E-mail : ksk9006@hanmail.net

JeongSuk Pang†
Korea National University of Education, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr

Given the importance of mathematical connections in instruction, this paper analyzed the objects and the methods of mathematical connections according to the lesson flow featured in 20 elementary lessons selected as effective instructional methods by local educational offices in Korea. Mathematical connections tended to occur mainly in the introduction, the first activity, and the sum-up period of each lesson. The connection between mathematical concept and procedure was the most popular followed by the connection between concept and real-life context. The most prevalent method of mathematical connections was through communication, specifically the communication between the teacher and students, followed by representation. Overall it seems that the objects and the methods of mathematical connections were diverse and prevalent, but the detailed analysis of such cases showed the lack of meaningful connection. These results urge us to investigate reasons behind these seemingly good features but not-enough connections, and to suggest implications for well-connected mathematics teaching.

* ZDM Classification : D42
* 2000 Mathematics Classification : 97D40
* Key Words : mathematical connection, the objects of the connection, the methods of connection
† Corresponding author