대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 4, 565 ~ 577. Dec 2012

역동적 기하 환경에서 비례를 이용한 이차방정식의 지도[1)]

류 희 찬[*] · 윤 옥 교[**]

본 연구에서는 중학교 3학년 학생들에게 닮은 삼각형의 대응변 사이에 성립하는 비례적 성질에 기초하여 역동적 기하환경에서 이차방정식 $x^2 - ax + b^2 = 0$의 해를 작도할 수 있는 기회를 제공하였다. 이 예비연구를 통해 이차방정식의 해에 대한 학생들의 기하학적 직관을 촉진시키고 a와 b의 값에 따라 이차방정식의 해가 어떻게 달라지는지 시각적으로 확인해 보게 하였다. 또한, 이 과정에서 학생들이 이차방정식의 해를 구하기 위해서 어떤 전략을 사용하는지 분석하여 이차방정식 지도 방법의 새로운 가능성을 살펴보고자 하였다.

I. 서론

현재 우리나라에서 중학교 3학년 학생들에게 이차방정식을 지도하는 일반적인 방법은 다음과 같다. 도입부분에 이차방정식으로 나타낼 수 있는 상황을 제시한 후 이를 바탕으로 이차방정식의 뜻을 정의하고 이차방정식의 해의 의미를 설명한다. 이어서 인수분해나 제곱근을 이용해서 이차방정식의 해를 구하는 과정을 연습하게 하고 이를 바탕으로 근의 공식을 유도하게 한다. 이 과정은 대부분 대수적인 방법에 의존하고 있으며 학생들은 이차방정식의 해를 구하거나 근의 공식을 이용하는 대수적 절차를 연습하는데 주력하게 되는 측면이 강하다. 또한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$의 해 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$가 $b^2 - 4ac > 0$일 때 서로 다른 두 개가 되고, $b^2 - 4ac = 0$일 때 중근이 된다는 것도 주로 대수식을 통해서 이해를 하게 되는 상황이다. 따라서 학생들은 이차방정식의 해를 구하는 과정이나 해의 의미를 기하학적인 관점에서 살펴볼 기회를 제공받지 못함으로써 기하학적인 사고 방법과 대수학적인 사고방식이 서로 보완될 때 얻을 수 있는 다양하고 풍부한 관점(Banchoff, 2008)을 놓치고 있다고 볼 수 있다.

Allaire와 Bradley(2001)도 대수적 연산은 현실적인 문제와의 관련성이 적으며 기호적 접근이 매우 효율적이기는 하지만 이차방정식을 기하학적으로 해결할 경우의 장점도 여전히 많이 있다고 주장하면서 대수적 기호에 익숙한 경우에도 이차방정식을 해결하는 데 있어서 기하학적 접근 방식도 함께 경험한다면 좀 더 다양하고 풍부한 관점을 지니게 될 것이라고 하였다. 그럼에도 불구하고 대수적 접근 방식 위주인 현재의 이차방정식 지도에 대한 대안적인 지도 방법에 관한 연구는 미미한 실정이다. Eves는 Euclid의 <Elements>에 담겨 있는 이차방정식에 대한 기

* 한국교원대학교(hclew@knue.ac.kr)
** 대전탄방중학교(okyoyoon@hanmail.net)
1) 이 논문은 한국교원대학교 2011학년도 KNUE 학술연구비 지원을 받아 수행하였음

하학적인 해법을 소개하고 있는데 이것은 기하학적인 사고 방법과 대수학적인 사고 방법을 연결하고 있는 하나의 예라고 볼 수 있다(1995, p.74-79).

이에 본 연구에서는 중학교 3학년 학생들에게 이차방정식 $x^2-ax+b^2=0$의 해를 구할 때 비례와 닮음을 이용함으로써 대수학적인 사고 방법과 기하학적인 사고 방법을 연결시키는 경험을 제공하고 역동적 기하환경에서 a와 b의 값에 따라 이차방정식의 해가 어떻게 달라지는지 학생들이 시각적으로 직접 확인해 보게 하였다. 또한, 이 과정에서 학생들이 이차방정식의 해를 구하기 위해서 어떠한 전략을 사용하는지 분석하여 이차방정식 지도 방법의 새로운 가능성을 살펴보고자 하였다.

II. 이론적 배경

본 연구에서는 이차방정식에 대한 대수학적인 사고 방법과 기하학적인 사고 방법을 연결시키기 위해 비례식과 닮음을 이용하고 있으며 그 사고 과정은 분석법을 바탕으로 하고 있다. 또한, 역동적 기하환경에서 닮은 도형을 작도해 봄으로써 이차방정식 $x^2-ax+b^2=0$의 해가 a와 b의 값에 따라 어떻게 달라지는지 시각적으로 확인하고 판별식의 의미도 기하학적으로 살펴볼 수 있게 하였다.

1. 비례추론(Proportional Reasoning)

비례추론은 비례 개념이 포함된 문제 상황에서 비례식을 세우고 이를 대수적으로 풀 수 있는 능력으로 구성(Lamon, 1993)되며 두 비 간의 동등한 관계를 포함하는 이차적 관계(second-order relationship)로 정의할 수 있다(Christou & Philippou, 2002). 또한, 비례추론은 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$사이의 승법적 관계(multiplicative relationship)에 대한 이해를 포함하며 일상생활뿐 아니라 수학과 과학에서 중요한 구조적 관계를 특징짓는 추론의 한 형태이다(Cramer & Post, 1993).

비례추론은 중학교 교육과정에 있어 중요한 수학적 아이디어 중의 하나이며 대수의 중요한 기초가 된다(Cramer & Post, 1993; Langrall & Swafford, 2000; Lanius & Williams, 2003; Slovin, 2000). 또한, 비례추론 개념을 이해하지 못한 학생의 경우에는 상위 단계의 수학 특히, 대수를 이해하는 데 있어 장애를 겪게 되는 경향이 있다. 따라서 교사는 비례 추론 문제의 맥락과 수치적 관계를 다양화해서 지도해야 하고(Cramer & Post, 1993; Touriaire & Pulos, 1985) 학생들이 문제를 해결할 때 충분한 시간을 주어야 하며 비례 추론을 생산적으로 사용할 수 있는 능력이 개발될 수 있는 다양한 맥락 문제를 제공해야 한다. 또한, 단순히 비례식의 계산 알고리즘을 사용하는 것으로는 학생들이 비례 속에 내재한 곱셈의 관계를 얼마나 이해했는가를 알 수 없으며 기하학적인 도형을 시각적인 모델로서 제공하는 것이 학생들이 비례에 대해 진지하게 탐색해볼 수 있는 대안적인 접근방법이 될 수 있다(Slovin, 2000).

Lamon(1993, p.44)은 비례 추론 문제를 문제 상황 구조에 따라 4가지 의미론적 유형(semantic type)으로 구분하였다([표 Ⅱ-1]). 이 중에서 유형 4는 확대와 축소의 문제 상황을 포함하는데 Lamon은 학생들이 다른 유형의 문제들을 통해 승법적 관계에 대한 이해가 발달될 때까지 기다린 후 유형 4의 문제들을 지도해야 한다고 주장하였다. 우리나라 중학교 2학년 학생들이 학습하는 “닮음”은 유형 4의 문제로 범주화될 수 있다.

[표 Ⅱ-1] Lamon(1993)의 비례추론 문제 유형

유형1: Well-Chunked Measure	한 운전사가 각각 2, 5, 7, 8시간동안 130, 325, 445, 510마일을 운전하였다. 이 운전사는 항상 일정한 속도로 운전했다고 말할 수 있는가?
유형2: Part-Part-Whole	두 개의 계란 판이 있는데 한 판에는 8개의 흰 계란과 4개의 갈색 계란이 들어 있고, 다른 판에는 10개의 흰 계란과 8개의 갈색 계란이 들어 있다. 어느 계란 판에 갈색 계란이 더 많이 들어 있다고 할 수 있는가?
유형3: Associated Sets	7명의 여학생이 3판의 피자를 먹고 3명의 남학생이 1판의 피자를 먹는다. 남학생과 여학생 중 누가 피자를 더 많이 먹는다고 할 수 있는가?
유형4: Stretchers and Shrinkers	높이가 6 피트이고 가로의 길이가 8피트인 직사각형과 가로의 길이가 12피트인 두 직사각형이 닮음이 되려면 두 번째 직사각형의 높이는 얼마가 되어야 하는가?

권오남, 박정숙, 박지현(2007)은 '닮음'은 기하학적 맥락에서 비의 좋은 소재이고 길이, 부피, 넓이 등 다양한 차원에서 비례식을 이해하고 시각화할 수 있는 이점에도 불구하고 비례추론과 관련된 활동은 소홀히 다루어지고 있다고 지적하였다.

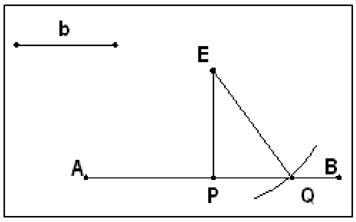
본 연구에서 닮음은 이차방정식의 대수적 상황과 기하학적 상황을 연결시키는 수단으로서뿐 아니라 학생들의 비례추론능력을 강화할 수 있는 맥락 문제로서 기능하기도 한다.

2. 이차방정식의 기하학적 해법

Eves(1995)는 유클리드 <원론> 제 Ⅵ권의 명제 28의 특별한 경우로서 다음의 작도 문제를 소개하고 있다.

> 주어진 선분을 두 부분으로 분할할 때 각 부분을 두 변으로 하는 직사각형은 주어진 선분의 반을 한 변으로 하는 정사각형을 초과하지 않는 정사각형과 같다.

이 문제를 보다 명확히 하기 위해 $\overline{AB}$ 와 b를 두 선분이라고 하고 b는 $\overline{AB}$의 반보다 크지 않다고 가정한다. 위의 조건을 만족하기 위해서 $\overline{AB}$를 $\overline{AQ}\times\overline{QB}=b^2$인 점 Q에 의해 분할해야 한다. $\overline{AB}$의 길이를 a로 표시하고 $\overline{AQ}$의 길이를 x라 하면 $x(a-x)=b^2$ 즉 $x^2-ax+b^2=0$이 된다. 이를 위해 $\overline{AB}$의 중점 P에서 $\overline{AB}$와 수직이 되면서 $\overline{PE}=b$가 되는 점 E를 표시하고 다시 중심이 E이고 반경이 $\overline{PB}$인 원을 그릴 때 이 원과 $\overline{PB}$가 만나는 점을 Q 라 할 수 있다 ([그림 Ⅱ-1]).



[그림 Ⅱ-1] $x^2-ax+b^2=0$과 Q

그 증명은 제 Ⅱ권 명제 5에 의해 제공된다. 즉 $\overline{AQ}$와 $\overline{QB}$에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QB}=a$이고 $\overline{AQ}\times\overline{QB}=(\overline{PB})^2-(\overline{PQ})^2=(\overline{EQ})^2-(\overline{PQ})^2$ $=(\overline{PE})^2=b^2$이므로 $\overline{AQ}$와 $\overline{QB}$는 이차방정식 $x^2-ax+b^2=0$의 두 근이 되며 그 해를 구한 셈이 된다. 또 이 결과를 이용하면 이차방정식 $x^2+ax+b^2=0$의 두 근은 $-\overline{AQ}$와 $-\overline{QB}$로 표현된다. Eves(1995)는 이를 기하학적 대수라고 불렀다. 이 방법은 매우 절묘하긴 하지만 이차방정식을 학습하는 학생들이 이 과정을 자연스럽

게 떠올리거나 이해하기는 쉽지 않다. 따라서 본 연구에서는 유클리드 <원론> 제 Ⅵ권의 명제 28의 특별한 경우로서 제시된 작도 문제를 탐구 과제로 설정하되 학생들이 이미 학습한 비례식과 닮음을 이용하여 이차방정식의 기하학적 해를 구하고자 한다.

3. 분석법

본 연구에서 이차방정식의 상황으로부터 비례식을 찾고 그에 알맞은 닮은 도형을 찾아가는 사고 과정은, 조건을 만족하는 점 Q의 위치를 이미 찾았다고 가정하고 그 가정이 성립하기 위한 선행 조건들을 찾아가는 "분석법"에 기반을 두고 있다. 분석법은 수학적 발견술 중에서 가장 오래되었으며 피타고라스학파에 의해 자주 사용되었고 BC 3세기 경 Pappus에 의해 체계적으로 정리되었다. Pappus는 '하도록 요구되는 것이 이루어진 것처럼, 증명하고자 하는 것이 참인 것처럼' 가정하면서 시작한다. 선행하는 어떤 것으로부터 바라는 결과가 유도될 수 있는가 물으면서 그 선행하는 어떤 것이 무엇인지를 찾는 과정을 분석이라고 한다(Heath, 1981; Jones, 1986).

물론 이 분석의 과정이 쉬운 것은 아니다. 학생은 역동적 기하환경에서 작도에 필요한 일련의 조건들을 찾아야 하며 이 과정에서 동료 학생들이나 교사와의 담화를 통해 도움을 받을 수도 있다. 분석의 과정 후에 학생은 분석의 과정을 거꾸로 진행하며 종합의 과정을 거치게 된다.

작도를 지도할 때 가장 중요한 점은 학생들이 작도의 과정을 발견할 수 있도록 안내하는 것이다. 그러나 이 과정의 어려움으로 인해 교사가 작도의 과정을 먼저 제시하고 학생들은 그것을 기계적으로 수용하고 기억하게 된다면 이는 교육적으로 의미 있다고 보기 어렵다. 따라서 분석의 과정을 통해 학생들이 작도의 어려움을 극복하고 그 과정을 이해할 수 있도록 돕는 것이 필요하다(Lew & Je, 2010). 정수진(2007)은 역동적 기하 환경에서 난이도가 높은 문제를 해결할 수 있는 아이디어를 찾는데 분석법이 효과적으로 이용된다는 것을 보였다. 종합법은 분석의 과정을 뒤집어 분석에서 마지막에 도달한 것을 이미 이루어진 것으로 여기고 앞에서 선행자였던 것을 결과로 자연스러운 순서로 배열하고 그들을 차례로 잇달아 연결함으로써 마지막에 찾고 있는 것의 구성에 이르는 방식이다(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2006, p.199).

4. 역동적 기하환경

역동적 기하환경의 '역동적'인 특성은 점과 같은 도형을 연속적으로 '드래깅(dragging)' 할 수 있는 특성에서 기인된다. 또한, 드래깅하는 동안에 컴퓨터 화면에 나타나는 수학적 대상들은 항상 논리적인 관련성과 전체적인 모양을 유지하면서 움직여질 뿐 아니라, 대상들이 변하는 중간 상태를 사용자가 모두 볼 수 있다. 따라서 역동적 기하환경은 학습자로 하여금 변하는 대상을 관찰하면서 불변성이라는 기하학적 아이디어에 집중할 수 있게 해준다 (류희찬, 2004; Jones, 2002). Falcade, Laborde와 Mariotti(2007)는 역동적 기하환경에서의 움직임을 점, 선등과 같은 기본 요소들의 변화에 의한 직접적(direct)인 움직임과 작도가 완성된 후에 발생하는 간접적(indirect)인 움직임으로 구분하였다. 학습자는 드래깅 도구 등을 사용하여 두 움직임간의 관련성을 경험하게 된다. Jones(2002)는 역동적 기하소프트웨어의 사용에 관한 많은 연구들을 통해 이러한 역동적 기하환경은 학생들이 탐색하고 추측하며 기하적인 관계들을 구성하고 설명할 수 있도록 조력할 수 있음이 밝혀졌고 이것이 교실 수업에서의 토의와 집단 활동에 있어 매우 중요한 요소임은

분명하지만 역동적 기하환경 그 자체만으로는 자립적인 환경이 될 수는 없으며 결과적으로 학생들이 이론적인 사고를 할 수 있도록 안내하는 교사의 역할이 매우 중요함을 지적하고 있다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구방법 개관

본 연구는 분석법을 토대로 제작된 활동지 중심의 지필환경과 역동적 기하환경이 조화를 이룬 수업 환경 속에서 이차방정식의 해를 기하학적인 방법으로 구하기 위해 학생들이 이차방정식을 비례식으로 변형하고 이를 바탕으로 닮은 도형을 작도하는 과정을 관찰하고 이때 학생들이 사용한 전략을 분석하고자 하였다. 또한 이를 통해 이차방정식을 지도할 때 기하학적 접근 방법의 가능성을 탐색해 보는 것을 목적으로 하기 때문에 질적 사례연구 방법을 선택하였다.

2. 연구대상

연구에 참여하게 된 학생 A, B와 학생 C, D는 대전광역시에 소재한 T중학교 3학년 학생들이며 4명의 학업성취는 각자의 학급 내에서 높은 편이었다. 본 연구에서 학생들은 1학년에서 배운 작도와 2학년에서 배운 닮음에 대한 이해를 바탕으로 이차방정식의 기하학적 해를 작도하게 되므로 학업성취가 높은 편인 학생들을 대상으로 하였다. 연구자인 교사가 가르치는 학급의 학생들을 대상으로 개별적으로 상담하여 연구에 참여할 의사가 있는 학생들을 선정하게 되었다. 사전 면담은 방과 후에 교실에서 이뤄졌으며 학생 A는 평소에 다른 과목보다 수학을 더 좋아하는 편이고 기하 부분을 재미있게 생각하고 있었으며 증명을 좋아하는 편이지만 자신이 수학을 아주 잘 하는 것은 아니라고 말하였다. 학생 B는 집에서 혼자 공부를 하는 편이고 역시 수학에 대한 자신감이 아주 높은 편은 아니었다. 학생 C와 D는 수학을 잘 하고 싶지만 다른 과목에 비해 성적이 잘 나오는 편이 아니기 때문에 자신이 수학을 잘 하지는 못한다는 느낌이 든다고 하였다. 4명의 수학적 자신감은 학업성취에 비해 낮은 편임을 면담을 통해 확인하였다. 학생들은 지금까지 수학 시간에 컴퓨터를 직접 다뤄 본 적은 없으며 함수를 배울 때 선생님께서 GSP를 이용한 그래프를 보여주신 적이 있다고 기억하고 있었다. 이차방정식과 작도가 특별한 관계가 있다고는 생각하지 않고 있었으며 학생 A는 함수와 작도가 더 관련이 있을 것 같다고 하였다. 1학년 때 배웠던 작도에 관해서는 각의 이등분선, 선분의 수직이등분선, 각 옮기기 등을 기억하고 있었다.

3. 연구절차

본 연구는 방과 후에 교실에서 이뤄졌으며 학생 A, B와의 수업이 먼저 진행된 후 동일한 활동지를 이용해서 학생 C, D와의 수업이 진행되었다. 각각의 수업은 예비 수업 1차시와 본 수업 1차시의 2차시씩 총 4차시에 걸쳐 진행되었다.

[표 Ⅲ-1] 연구 절차

	1차시	2차시
수업 내용	· 사전 면담 · GSP 익히기	· $x^2-ax+b^2=0$의 해 작도하기
수업 설계	· 면담 · 도형을 작도하면서 GSP의 기능 익히기	· 과제 확인하기 · 비례식으로 변형하기 · 닮은 도형 그리기 (지필환경) · 닮은 도형 작도하기 (역동적 기하환경) · 활동 돌아보기 (지필환경)
수업 환경	· 역동적 기하환경	· 지필환경 · 역동적 기하환경

학생 2명이 1대의 노트북을 함께 사용하였고 활동지는 각자 사용하였다. 1차시에는 학생들과의 사전 면담과 GSP 사용 방법에 관한 예비 수업이 진행되었으며 작도에 필요한 대표적인 기능들을 교사가 먼저 안내하고 학생들이 직접 조작해 보는 방식으로 이뤄졌다. 이때, 학생 A, B는 정삼각형을 작도해보았고 학생 C, D는 마름모를 작도해보면서 프로그램의 간단한 기능들을 익혔다. 2차시는 지필 환경에서 시작하여 역동적 기하환경으로 이동하고 다시 지필 환경으로 돌아오는 순서로 진행되었으며 학생들은 활동지에 제시된 과제를 분석법을 통해 대수식으로 표현해보고 이를 여러 가지 형태로 변형하는 과정에서 닮음을 유도해 낼 수 있는 비례식을 구성하는 활동을 하였다. 그리고 이를 바탕으로 닮은 직각삼각형들의 대응변 사이의 길이의 비와 연결시키고 GSP를 이용한 역동적 기하 환경에서 작도를 진행하면서 주어진 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾는 활동을 진행하였다. 이후에 학생들은 다시 지필 환경으로 돌아와 전반적인 활동 과정을 돌아보면서 핵심적인 아이디어와 소감 등을 활동지에 정리하고 교사와 이야기를 나누었다.

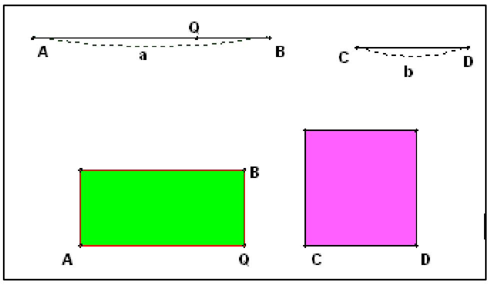
4. 과제

가. 가정

길이가 각각 a, b 인 두 선분이 있다. ($\overline{AB}=a,\ \overline{CD}=b$ 단, $a>0,\ b>0$)

나. 과제

선분 $\overline{AB}$ 위의 한 점 Q를 잡아서 두 선분 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$로 나눌 때 두 선분의 길이를 각각 가로와 세로로 하는 직사각형과 $\overline{CD}$를 한 변으로 하는 정사각형을 생각하자. 직사각형과 정사각형의 넓이가 같아지게 하기 위해서는 선분 $\overline{AB}$상의 어느 위치에 Q를 잡아야 하는가?



[그림 Ⅲ-1] 해결 과제

5. 자료 수집 및 분석 방법

학생 A, B와 학생 C, D와 함께 각각 2차시씩 총 4차시의 수업을 진행하였으며 수업 장면은 동영상으로 녹화하였다. 자료 수집을 위해 컴퓨터상에서 학생들의 GSP 조작 과정을 담은 화면과 음성을 동영상 파일로 저장하였고 학생들이 기록한 활동지와 학부모의 연구 참여 동의서, 연구자가 수업 계획과 연구 진행 상황 등을 수시로 기록한 노트 등의 자료 등이 있다. 이 자료들은 모두 학생들의 활동 분석 자료로 활용되었으며 특히 활동지의 기록 내용과 학생 간, 학생과 교사 간에 이뤄진 대화를 통해 학생들의 작도 전략을 분석하게 되었다. 학생 A, B와 학생 C, D가 과제를 해결하기 위해 사용한 전략들의 공통점과 차이점을 비교하고 주로 공통적으로 나타난 특성을 중심으로 과제 해결 과정을 기술하기로 하였다.

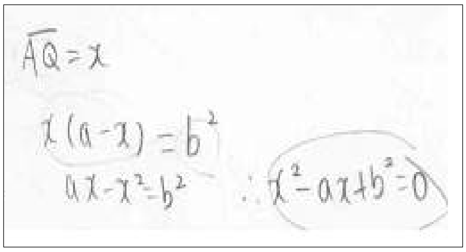
Ⅳ. 결과 분석

학생들은 먼저 지필 환경에서 직사각형과 정사각형의 넓이가 같아지는 점 Q가 존재한다고 전제하고 그 넓이 조건을 만족하는 선행 조건들을 찾는 활동에서부터 시작하였다. 이와 같이 지필 환경에서 분석법을 토대로 한 사고 활동을

마친 후 학생들은 역동적 기하환경에서 종합적인 사고 과정에 따라 점 Q를 찾는 활동을 하였다. 그리고 다시 지필 환경으로 돌아와 활동의 전반적인 과정을 돌아보았다. 이 과정에서 학생들이 과제를 해결하기 위해 사용한 전략과 활동을 분석하면 다음과 같다.

1. 지필 환경에서 나타난 학생들의 사고

학생들은 제시된 과제를 보고 곧 $\overline{AQ}$의 길이를 x로, $\overline{BQ}$의 길이를 $a-x$로 바꿔서 표현한 후 주어진 조건을 대수식 $x(a-x)=b^2$으로 나타냈고 이를 전개해서 $ax-x^2=b^2$의 형태로 정리하였다([그림 Ⅳ-1]). 여기까지는 주로 대수적인 과정이었으며 학생들은 그에 필요한 대수적인 조작 능력을 충분히 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 이 단계까지는 학생들이 문제를 해결하기 위해 새로운 전략을 세우고 이를 확인하는 과정이 수반되지는 않았다.



[그림 Ⅳ-1] 학생 C의 지필활동 : 문제 상황을 식으로 나타내기

교사는 학생들이 유도한 $x(a-x)=b^2$을 작도와 연결시킬 수 있도록 안내하기 위해서 다음과 같은 발문을 하였다.

[발췌문 1]

교사 : 그 식을 선분을 이용해서 표현하면 어떻게 되니?

학생 D : $\overline{AQ}\times\overline{BQ}=\overline{CD}^2$요

교사 : 또 다른 형태로 변형시킨다면 어떤 것들이 있을까? 우리는 닮음을 이용해서 작도를 하려고 하는데, 닮음을 배울 때 많이 나왔던 내용 중에서 생각나는 것이 있니?

학생 C : 비례식을 많이 이용했어요.

교사 : 그렇다면 $\overline{AQ}\times\overline{BQ}=\overline{CD}^2$이 나올 수 있는 비례식은 어떤 것이 있을까?

학생들 : (잠시 생각하면서 적어본다)

$\overline{AQ}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BQ}$요.

교사 : 그래, 그럼 우리가 닮음을 공부할 때 주로 어떤 도형들 간의 닮음을 많이 생각했지?

학생들 : 삼각형이요.

교사 : 닮은 삼각형 사이의 변의 길이의 비를 많이 생각했었지? 그럼 비례식 $\overline{AQ}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BQ}$이 성립하는 닮음삼각형을 생각해볼 수 있을까?

넓이 조건을 나타내는 $\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}=\overline{CD}^2$을 비례식으로 바꾸는 아이디어는 교사의 발문에 의해 유도되었으며 주어진 관계식을 만족하는 비례식을 찾는 활동은 학생들에 의해 이뤄졌다.

4명의 학생들은 주어진 비례식의 관계를 그림으로 나타내는 단계에서 고민을 하였다. [발췌문 2]는 학생 A와 B가 비례식을 나타내는 닮은 직각삼각형을 그리게 될 때까지 나눈 대화이다.

[발췌문 2]

학생 A : 아... 다 막혔어. 여러 가지 방법을 생각해 보았는데. 원에도 넣어보고. (두 개의 삼각형을 붙여서 그린 후) 이 두 개의 삼각형이 닮음일 때 어디에 어떤 점을 배열해야 할지 모르겠어.

교사 : 이 작은 삼각형과 큰 삼각형이 닮음인 상황을 염두에 둔 거니?

학생 A : 네.

교사 : 닮음이 되니?

학생 B : 닮음이 되죠. 이 겹치는 각이 같고. 또 나머지 한 각이 같고

학생 A : 대응하는 두 개의 각이 같으니까 닮음이 되요.

교사 : 그럼 어떠한 상황에서 세 개의 삼각형이 모두 닮음이 될까?

학생 B : 이 밑각도 같아야 하니까.. 여기가 직각이 되어야 하고 (A가 두 개의 직각삼각형을 그린다.)

학생들 : 직각삼각형에서는 세 개가 모두 닮음이 되요.

학생 B : 이 한 각이 60도가 되어야 하고

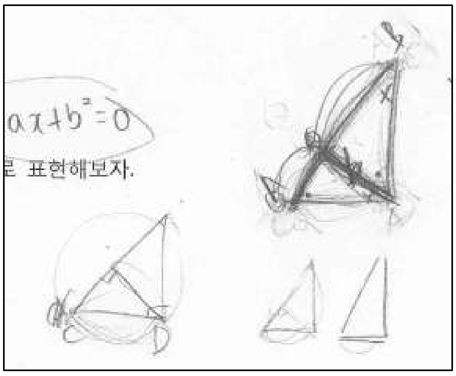
학생 A : 꼭 그럴 필요가 있을까?

학생 B : 세 개가 다 닮음이 되려면..

학생 A : 아니지 이 각이 •이고 이 각이 ×라면 합해서 90도가 되면 되니까.

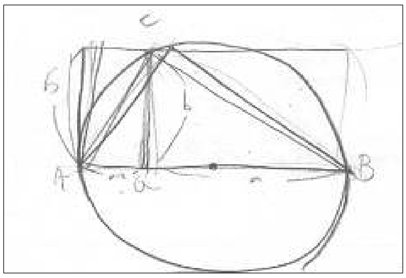
학생 B : 그런가? (각자 활동지에 그림을 그려본다. 세 개의 직각삼각형이 포개어져 있는 그림을 그린 후) 이렇게 그리면 될 것 같아요.

학생들은 [그림 Ⅳ-2]에서 세 개의 직각 삼각형이 모두 닮음이 된다는 사실을 확인하였으며 이에 따라 지필 환경에서 비례식을 만족하는 닮은 직각삼각형을 그리는 단계까지 수행하였다.



[그림 Ⅳ-2] 비례식으로부터 닮은 도형 생각하기

닮은 직각삼각형을 그린 학생들은 구체적으로 점 Q의 위치를 찾는 방법에 대하여 논의하였다. 학생 A와 B는 원의 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형을 그리는 전략을 세웠으며 꼭짓점에서 내린 수선의 발까지의 길이가 b가 되도록 하기 위해서는 가로의 길이가 $\overline{AB}$가 되고 높이가 b가 되는 직사각형을 그려서 원과의 교점을 찾고 여기서 수선을 내리면 될 것이라는 전략을 세웠다([그림 Ⅳ-3]). 학생 C와 D도 꼭지각을 직각으로 만들기 위해 외접원을 이용한다는 전략을 세웠다.

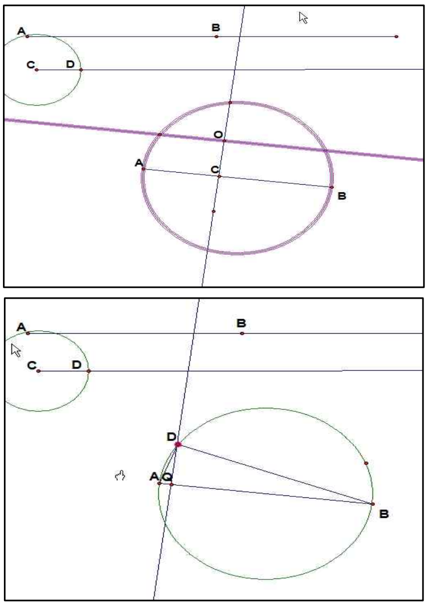


[그림 Ⅳ-3] 점 Q의 위치 찾기

2. 역동적 기하 환경에서 나타난 학생들의 사고

지필 환경에서 점 Q의 위치를 찾는 방법을 생각한 학생들은 GSP를 이용한 역동적 기하 환경에서 직접 작도를 실행하면서 자신들이 세운 전략들의 타당성을 확인해 보는 활동을 하였다. 지필환경에서는 그림을 한 번만 그리면 되지만 역동적 기하환경에서는 a와 b의 값이 변하는 것까지 고려해야 했다.

학생 C, D는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원을 작도하고 $\overline{AB}$ 위의 점 C를 지나는 수선을 작도한 후 길이가 b가 되는 점 O를 찾았다. 그리고 점 O를 지나면서 $\overline{AB}$에 평행한 직선과 이 원과의 교점 D를 작도하고 점D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 Q로 하였다([그림 Ⅳ-4]). 학생 A, B는 직사각형을 이용하기로 하여 Q를 찾는 과정은 다소 달랐으나 결과적으로는 수선과 평행선을 이용하였다는 점에서 학생 C, D의 전략과 유사하였다고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-4] 역동적 기하환경에서 점 Q의 위치 찾기

지필환경에서 역동적 기하 환경으로 이행하여 진행된 이 과정에서 학생들은 지필환경과 역동적 기하 환경의 차이점을 분명하게 경험할 수 있었다. 지필 환경에서는 먼저 그리거나 나중에 그린 점이나 선분 사이에 아무런 인과 관계가 없으므로 자유롭게 점이나 선분을 지울 수 있지만 역동적 기하 환경에서는 나중에 그려지는 하위 개체는 먼저 그려지는 상위 개체의 영향을 받기 때문에 학생들은 활동의 인과 관계를 좀 더 정교하게 고려하며 작도를 수행해 가는 모습을 관찰 할 수 있었다. 또한 활동지에서는 직각삼각형이 정적인 상태로 그려진다. 즉 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 값이 상수로 주어지기 때문에 그 한 가지 경우에 대해서만 생각하게 되지만 역동적 기하 환경에서는 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 길이가 변화되는 것을 경험하면서 작도를 하게 되므로 학생들은 목표점인 Q가 존재하게 될 범위에 대해서도 자연스럽게 고려하는 모습을 보였다. 이것은 변수 개념을 지도할 때 변하는 대상으로서의 변수 개념의 본질을 강조해야 하며 변하는 상황을 볼 수 있는 안목을 형성하는 것이 중요하다고 한 Freudenthal(1983, 김남희 외 재인용, 2006)의 주장에 근거한 지도 방법이라고 볼 수 있다. 이러한 수업 장면은 지필 환경의 약점을 극복하고 보완해 주는 역할로서의 역동적 기하 환경의 필요성을 상기시켜 준다.

3. 역동적 기하 환경에서 b^2-4ac의 의미 확인하기

역동적 기하 환경에서 점 Q를 찾은 후 학생들은 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 길이를 변화시켜 보면서 점 Q의 위치가 어떻게 변하는지 관찰하였다.

[발췌문 3]

학생들 : (D를 드래깅하다가 어느 순간에 교점이 없어지는 것을 보고) 어어.. 이거 어떻게 된거야?

학생 A : 맞아, 맞아..이거 맞아. 이건 이제 교점이 없는 거죠. 원의 반지름을 넘어갔으니까 교점이 없는 거예요.

교사 : 그럼 경계가 되는 경우를 찾아볼까? (학생 B가 D를 드래깅해서 $\overline{CD}$의 길이가 원의 반지름이 되게 하였다) 이때는 뭘까?

학생들 : 이때는 $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$인 경우예요.

교사 : 이때는 두 개의 근이 어떠니?

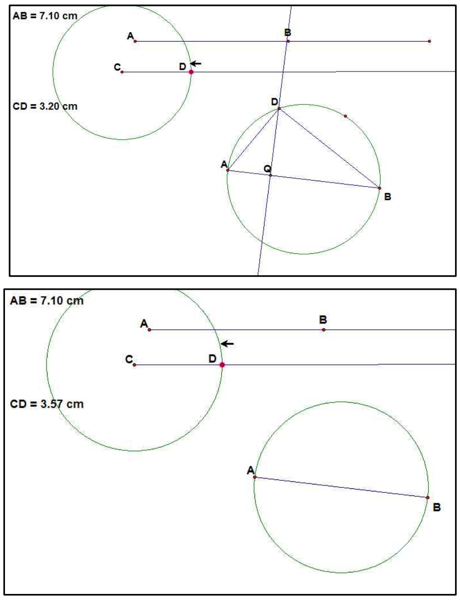
학생들 : 같아요. 중근이예요.

교사 : 그럼 교점 Q를 찾을 수 없다는 것은 이차방정식의 근이 어떻다는 걸까?

학생 A : 여기서부터는 근이 없어요.

교사 : 그럼 언제 근이 있고 언제 없는 걸까?

학생들 : $\overline{CD}$의 길이가 0보다 크고 반지름이하면 근이 존재해요.

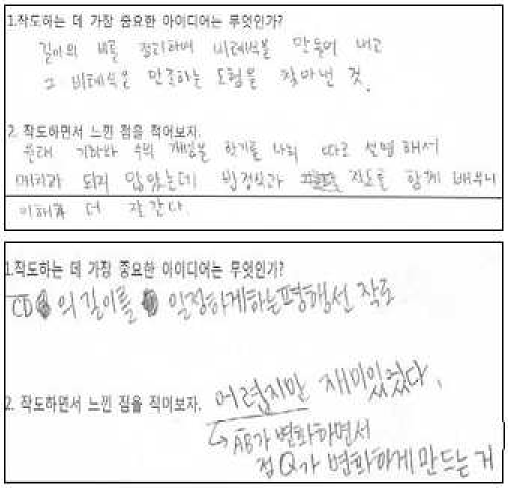


[그림 Ⅳ-5] 역동적 기하환경에서 판별식의 의미 확인하기

학생 C, D의 경우도 $\overline{CD}$의 길이를 길게 하자 점 Q가 사라졌고 그 이유를 $\overline{CD}$의 길이가 큰 원의 반지름인 $\frac{1}{2}\overline{AB}$보다 커져서 이 원과의 교점을 잡을 수 없기 때문이라고 설명하였다. 또한 Q가 나타나거나 없어지는 경계가 되는 경우는 $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$임을 확인하였고 이때가 이차방정식 $x^2-ax+b^2=0$이 중근을 가질 때라고 말하였다. 학생 C, D는 수업 시간에 근의 공식을 유도하면서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b^2-4ac의 값에 따라 실근의 개수가 달라지는 것을 이미 학습한 상태였기 때문에 작도를 통해 그 관계를 확인하고 있었으며 두 근으로서의 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$를 인식하였다([그림 Ⅳ-5]).

4. 지필환경에서 활동 돌아보기

역동적 기하환경에서의 활동 후 교사는 지필환경으로 돌아와서 작도의 전반적인 과정을 돌아보고 과제 해결 과정에 있어서 결정적인 아이디어와 느낀 점 등을 정리하도록 하면서 마무리 면담을 하였다. 학생 A, B는 작도에 있어 가장 중요한 아이디어를 비례식을 만들고 닮은 도형을 찾는 것이라고 하였고, 학생 C, D는 길이 b를 유지하기 위하여 평행선을 작도하는 것이라고 하였다.



<그림 Ⅳ-6> 작도 과정 돌아보기

특히, 학생 A는 대수와 기하가 연결될 수 있다는 사실을 흥미롭게 생각하였으며 그것을 잘 연결시킬 수 있는 능력이 중요하다고 생각하고 있었다. 학생 C, D는 작도의 과정이 신선하고 재미있긴 하지만 대수적인 방법보다 복잡하기 때문에 오래 걸리고 특히 $\overline{AB}$가 변함에 따라 점 Q의 위치가 변화되는 관계가 어려웠다고 하였다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서는 중학교 3학년 학생들이 지필환경과 역동적 기하 환경에서 비례와 작도의 방법

을 이용하여 이차방정식의 해를 구하는 활동 과정과 전략을 분석하였다. 이를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 지필 환경에서 비례식을 만족하는 점 Q의 위치를 찾는 단계에서 학생들이 사용한 전략 중 공통으로 나타난 것은 원을 이용하여 직각삼각형을 작도하는 방법이었다. 이것은 직각삼각형의 외접원이 빗변을 지름으로 한다는 사실로부터 유추한 것이었다. 학생들은 중학교 2학년 과정에서 배운 외접원의 성질과 현재의 작도 활동을 연결시켰으며 과제를 해결하는 과정에서 이차방정식에 대한 대수학적 접근과 기하학적 접근 방식의 연결뿐 아니라 2학년의 학습 내용과 3학년의 학습 내용이 연결됨을 경험하게 된 것이다.

둘째, 역동적 기하환경에서 드래깅 기능을 통해 a와 b의 값을 변화시킴으로써 점 Q의 위치가 변하고 그에 따라 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$의 길이도 변하는 것을 직접 관찰하였다. 또한 점 Q에 의해 나뉘지는 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$를 이차방정식의 두 근으로서 인식하였다. 즉, 이차방정식의 해를 기하학적인 관점에서 시각적으로 경험하게 된 것이다.

셋째, 역동적 기하환경에서 점 Q가 사라지는 것을 관찰하고 이를 통해 이차방정식의 해가 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우를 비교하면서 $b^2-4ac>0$일 때는 서로 다른 두 개의 실근이 존재한다는 것을 학습했던 경험과 연결시킬 수 있었다. 이것은 대수적인 방법 위주로 진행되는 수업 환경에서는 접해 보기 어려운 경험이라고 할 수 있다.

넷째, 비례식을 토대로 세 삼각형이 모두 닮음인 관계에 있는 직각삼각형을 그리고 실제로 닮음이 성립하는지 확인하는 과정 속에서 학생들은 분석법을 토대로 한 비례 추론 문제 맥락을 경험하였다. 즉 닮은 도형을 보고 비례식을 세우는 것이 아니라 주어진 비례식에 적합한 닮은 도형을 그려보는 반대 과정을 경험하게 되었다. 이와 같이 학생들의 비례 추론 능력과 분석적 사고 능력이 개발되기 위해서는 이차방정식의 해를 구하는 문제 맥락 이외에도 다양한 형태의 문제 맥락 개발이 필요하다고 할 수 있다.

학생들이 피타고라스의 정리를 배운 후에는 점 Q의 위치를 찾는 단계에서 Eves(1995)가 소개한 방법과 같이 좀 더 다양한 전략이 나올 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구에서는 대수적 접근 방식 중심의 이차방정식의 지도 방법을 보완하기 위해 비례와 작도를 이용한 기하학적인 접근 방식을 시도함으로써 이차방정식 지도에 있어서의 새로운 가능성을 살펴보았다.

그러나 연구 참여자를 선정함에 있어서 작도와 닮음, 비례에 관한 이해가 충분히 이뤄진 단계에서 진행하는 것이 적합하다고 판단되어 수학학업성취가 높은 편인 학생들을 선정한 점은 본 연구가 지닌 제한점이라고 할 수 있다. 그러므로 일반적인 학생들을 대상으로 한 연구와 이차방정식 $x^2-ax-b^2=0$의 경우에 대한 연구가 후속적으로 이어져서 본 연구의 미비점을 보완하게 된다면 작도와 비례를 이용한 이차방정식의 지도 방법은 대수적인 접근 방식 중심의 이차방정식 지도 방법에 대한 하나의 대안으로서의 가능성을 보여주게 될 것으로 기대한다.

참고문헌

권오남, 박정숙, 박지현 (2007). 시리즈 A: 중학교 교육과정에서 비례적 사고가 필요한 수학 개념 분석. **A-수학교육, 46**(3), 315-329.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2006). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

류희찬(2004). 작도 문제 해결을 위한 분석 도구

로서의 GSP. **청람수학교육, 14**, 17-26

정수진(2007). **역동적 기하환경에서 중학생을 대상으로 분석법을 이용한 증명학습에 관한 연구: 작도문제를 중심으로**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문,

Eve, H. (1995). **수학사**. (이우영 · 신항균, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1976년 출판).

Allaire, P. R. & Bradley, R. E. (2001). Geometric Approaches to Quadratic Equations from Other Times and Places. *Mathematics Teacher*, The National Council of Teachers of Mathematics.

Banchoff, T. (2008). Algebraic thinking and geometric thinking. In C. E. Greenes & R. Ruberstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp.99-110). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Christou, C. & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 321-336.

Cramer, K .& Post, T. (1993). Connecting research to teaching. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317 – 333.

Heath, T.L. (1981). *A history of Greek mathematics* (v.2). Dover Publications, Inc.

Jones, A. (1986). *Pappus of Alexandria: Book 7 of the collection*. New York: Springer.

Jones, K. (2002). Research on the use of dynamic geometry software: Implications for the classroom. *MicroMath, 18*(3), 18-20.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. Journal for Research in *Mathematics Education*, , 41-61.

Langrall, C. W. & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars. *Mathematics Teaching in the middle School, 6*(4), 254-261.

Lanius, C. & Williams, S.(2003), Proportionality: A unifying theme for the middle grades, *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(8), 392-396.

Lew, H. C. & Je, S.Y. (2010). Construction of quadratic curves using the analysis method on the dynamic geometry environment. Paper presented at the 5th East Asia Regional Conference of *Mathematics Education*, Tokyo, Japan (2010.08.20.).

Slovin, H. (2000). Moving to proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(1), 58-60.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Study on the teaching of quadratic equation through proportions in a dynamic environment

Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)
Yoon, Okyo (Daejeon Tanbang Middle School)

In this study, we investigated the process of constructing the geometrical solutions to quadratic equation, through proportions between lengths of similar triangles in a dynamic environment. To do this, we provided one task to 4 ninth grades students and observed the process of the students' activities and strategies. As a result of this pilot lesson study, our research shows the advantage and possibility of geometrical method in learning and teaching quadratic equation.

key words : quadratic equation(이차방정식), proportional reasoning(비례추론), analysis method(분석법), construction(작도), dynamic geometric environment(역동적 기하환경),

논문접수 : 2012. 11. 9
논문수정 : 2012. 12. 3
심사완료 : 2012. 12. 14