대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 4, 469 ~ 493 Dec 2012

대학생들의 증명 구성 방식과 개념 이해에 대한 분석 - 부분 공간에 대한 증명 과정을 중심으로 -

조 지 영* · 권 오 남**

본 연구는 증명을 성공적으로 구성하는 학생들은 수학적 개념을 어떻게 이해하고 있으며, 증명을 어떻게 구성하는 지를 살펴보고 이를 통해 증명을 구성하는 다양한 방식과 개념 이해의 관련성을 분석하는 데 목적이 있다. 증명 구성에 도움이 되는 수학 학습에 제언을 얻기 위해서는 증명을 구성하는 과정과 그 과정에서 개념이 어떻게 반영되고 이용되는 지를 살펴볼 필요가 있다. 이를 위하여 4명의 수학교육과 학생들을 대상으로 사례연구를 실시하였다. 그 결과 구문론적 증명을 하는 학생들은 형식적 개념의 내용을 정확하게 알고 있을 뿐만 아니라 그 개념이 담겨있는 명제는 어떠한 방식으로 증명하는 지 그 방법까지 알고 있었다. 실제 증명에서도 평소 증명 경험을 통하여 학습한 증명 전개 방법을 이용하여 증명하는 것을 볼 수 있었으며, 이로부터 증명 방법에 대한 절차적 지식이 구문론적 증명에는 중요한 요소라는 결론을 얻을 수 있었다. 의미론적 증명을 하는 학생들은 형식적 개념의 내용을 정확하게 알고 있고 그 내용과 의미를 본인만의 언어나 그림으로 표현한 개념 이미지를 가지고 있었다. 구문론적 증명을 하는 학생들의 개념 이미지와 비교해보았을 때, 의미론적 증명을 하는 학생들의 개념 이미지는 구문론적 증명을 하는 학생들의 개념 이미지보다 형식적 개념의 내용을 잘 반영하고 있었다. 이러한 개념 이미지는 개념 이미지를 활용하여 증명의 아이디어를 생각하고, 생각한 아이디어를 증명의 형식에 맞게 표현하는 데 사용된다는 점에서 의미론적 증명에 필요한 요소라는 것을 발견할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

대학 수학에서의 개념은 공리 체계와 정의, 그리고 이로부터 연역된 성질들로 이루어져 있다는 점에서 형식성(formalism)을 갖고 있다. 또한 실세계로부터 이미 수학화를 한 번 거친 다양한 수학적 대상들에 대하여 이들의 공통적 속성을 또 다시 수학화를 하여 얻어진 개념이라는 점에서 대학 수학에서의 개념은 고도의 추상성을 갖고 있다. 이러한 이유로 구체적인 맥락(context)하에 직관에 의존한 접근이 가능했던 중등학교 수학과는 다르게 대학 수학은 주어진 정의와 정리로부터 연역적이고 엄밀한 사고를 통한 증명 중심의 접근을 요하게 된다.

중등학교 수학에서 배우는 수학적 개념과 성질이 이유에 대한 설명 없이 곧바로 학생들에게 부과되는 것은 아니다. 그러나 정당화 과정이 직관에 의존하여 상당부분 그래프, 그림이나 다이어그램, 혹은 일반성을 잃지 않는 예를 이용하

* 서울방송고등학교, zickzick06@naver.com
** 서울대학교, onkwon@snu.ac.kr, 교신저자
1) 본 논문은 조지영(2011). 대학 수학에서 개념 이해와 증명의 구성 분석. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.의 일부임.

며, 이러한 정당화 과정은 대학 수학에서는 더 이상 증명으로 간주되지 않는다. 대학 수학에서의 증명은 실제 수학자들의 증명과 같거나 유사한 증명을 다루기 때문에 증명으로 간주되는 증명의 형식이 제한된다. 그렇기 때문에 학생들은 대학에 와서 중등학교 수학 학습과 큰 차이점을 갖고 있는 증명에 몰두하게 되고, 특히 증명의 형식적인 측면에 많은 주의를 기울이게 된다.

그런데 많은 대학생들은 수학적 증명의 형식에 대하여 극단적인 양상을 보이고 있다. 대학에 와서도 중등 수학에서 다루었던 비형식적 증명을 여전히 수학적 증명으로 보는 수학적 증명의 개념이 결여된 학생들이 있는 반면(Harel & Sowder, 1998; Selden & Selden, 2003; Alcock & Weber, 2005), 증명의 형식성에 잠식되어 기호나 용어가 가지고 있는 개념적인 의미에 대한 고려 없이 외적으로 보이는 형식적인 형태에만 초점을 맞춘 증명을 하기도 한다(신경희, 2005; Harel & Sowder, 1998; Alcock & Weber, 2005; Easdown, 2009; Ko & Knuth, 2009). 이는 성공적으로 증명을 구성하기 위해서는 수학적 증명으로 간주되는 표현 양식 내의 전개 양상을 따르되, 올바른 개념 이해를 바탕으로 하는 적절한 증명 전개가 필요하다는 것을 시사한다. 따라서 학생들의 증명 구성 능력을 도모하기 위해서는 증명의 형식을 올바르게 갖추는 능력뿐만 아니라 증명을 전개해 나갈 수 있는 수학적 개념의 적절한 이해가 모두 필요하다. 그렇기 때문에 대학생들의 증명 학습에 도움을 줄 수 있는 결과를 찾기 위해서는 기존의 연구들보다 넓은 관점에서 학생들의 증명 구성 과정과 수학적 개념에 대한 학생들의 이해까지 함께 살펴보는 것이 필요하다. 이는 학생들이 대학 수학에서의 형식적 개념을 어떻게 이해하고 그것이 증명 구성과 어떤 관계를 가지고 있는지를 안다는 점에서 중요하다.

그런데 학생들의 증명 구성을 살펴본 지금까지의 연구들은 대개 학생들의 증명에서 결여된 점을 부각시키고 이것의 원인이 되는 잘못된 개념 이해를 분석하는 데 초점을 두고 있다. 이러한 연구들의 결과는 학생들이 범하기 쉬운 오류를 수정하는 데는 도움이 되지만 성공적인 증명 구성의 큰 방향을 제시하는 데에는 한계가 있다. 학생들에게 제언할 수 있는 적절한 길을 찾기 위해서는 실제로 증명을 성공적으로 구성해나가는 학생들이 주로 사용하는 사고 과정과 그 과정에서 어떠한 개념 이해가 필요하며 어떻게 발현이 되는지를 알 필요가 있다.

학생들의 증명 과정을 면밀히 분석한 연구들을 살펴보면, 학생들은 증명의 아이디어를 찾을 때 증명의 전개 형식에 끼워 맞추기 위해 필요한 요소를 찾는 방식으로 형식적으로 이루어지기도 하고, 대학 수학에서 배우는 개념들에 대해서도 본인 나름대로 직관적이고 비형식적인 표현을 개발하여, 이로부터 증명의 아이디어를 찾는다고 제시하면서 증명의 결과물은 형식적으로 갖추어진 형태를 보이지만 그 이면에는 서로 다른 방식의 접근이 존재한다는 것을 경험적인 사례들을 기반으로 보여주고 있다(Pinto & Tall, 1999; Raman 2003; Weber & Alcock, 2004). 이러한 일련의 연구들과 유사한 맥락 하에서 Weber와 Alcock(2009)은 학생들의 증명 구성을 성격이 다른 두 가지 방식으로 구분하는 틀을 제시하였다. 하나는 정의와 정리를 고려하여 증명의 표현 양식 내에서 기호 조작과 연역을 통한 추론으로 구성되는 구문론적 증명(syntactic proof)이며, 다른 하나는 증명의 표현 양식에 속하지 않는 다른 표상을 추론에 이용하고 그 사고를 바탕으로 형식적 증명이 구성되는 의미론적 증명(semantic proof)이다. Weber와 Alcock(2009)은 두 가지 방식의 증명이 모두 증명 구성에 도움이 되는 독자적인 장점을 가지고 있기 때문에 어느 하나도

등한시해서는 안 된다고 강조하였다.

본 연구에서는 증명을 성공적으로 구성하는 학생들은 어떠한 개념을 가지고 있으며, 증명을 어떻게 구성하는 지를 살펴보고 그 관련성을 파악하는데 목적이 있다. 그리고 학생들의 개념 이해가 Weber와 Alcock(2009)이 제시한 증명 방식과 어떤 관계를 가지고 있는지를 파악하려고 한다. 이를 통해 구문론적 증명과 의미론적 증명이 구성될 때 일어나는 사고의 전반적인 과정과 두 증명 방식에 필요한 개념 이해에 대하여 알아볼 것이다. 따라서 본 연구에서는 “부분 공간(subspace) 개념에 대한 학생들의 이해는 어떠한가?”, “학생들은 부분 공간(subspace) 개념이 포함된 명제를 어떻게 증명하는가?”, “학생들의 개념 이해와 증명 구성 과정의 특징은 어떠한 관련이 있는가?”라는 세 가지 연구 문제를 설정하고 이를 해결함으로써 본 연구 목적을 달성하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

본 장에서는 학생들의 수학적 개념 이해의 분석틀로 사용될 Tall과 Vinner(1981)의 개념 정의와 개념 이미지를 알아보고, 본 연구의 근원이 되는 구문론적 증명과 의미론적 증명에 대한 이론적 내용을 서술하고자 한다.

1. 개념 정의와 개념 이미지

수학에서 새로운 개념은 개념이 나오게 된 배경과 맥락이 숨겨진 채, 개념이 체계 안에서 완벽하게 존재할 수 있도록 매우 정련된 형태로 형식적으로 정의된다. 특히 대학 수학에서는 위와 같은 개념의 정의가 갖는 형식성이 강하게 드러나며, 개념과 관련된 모든 성질들은 형식적 정의로부터 연역적으로 전개된다. 그러나 형식적 정의와 정리만을 수학적 개념으로 규정하지 않고, 그 개념에 대해 개인이 생각하는 모든 심상과 성질들을 수학적 개념으로 간주하고 있다 (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983).

개념 형성의 개인적인 측면을 강조하기 위하여, Tall과 Vinner(1981)는 수학적 개념을 형식적으로 기술된 정의와 정리에만 한정하지 않고 개념 정의와 개념 이미지의 두 용어를 사용하면서 각 개인에게 존재하는 다양한 개념을 부각시켰다. 개념 이미지는 개념과 관련된 모든 인지적인 구조를 말하는 것으로서, 여기에는 개념에 대한 모든 심상(mental image)과 관련된 성질(properties)과 절차(processes)를 포함한다. 이는 개인의 모든 경험들을 통해 형성이 되는 것으로 새로운 자극이 들어오거나 개인이 성숙되면서 변할 수 있는 것이다. 예를 들면, 수의 범위가 자연수로 한정된 어린 아이들은 뺄셈을 하면서 숫자의 크기가 작아지는 것을 관찰하면서, “뺄셈”에 대한 이러한 성질을 개념 이미지로 갖게 된다. 그러나 음수가 도입되면서 항상 그러한 성질이 만족하지 않음을 알게 되면서 기존에 본인이 가지고 있는 개념을 바꾸게 된다. 또한, 개념에 대한 속성 외에도 각 개인은 개념을 나타내는 본인의 표현을 갖고 있는데, 언어적인 표현 이외에도 개인의 마음에 떠오르는 모든 표상의 집합을 심상이라고 한다. 예를 들어 함수 개념의 심상으로 특정 함수의 그래프가 나타날 수 있다 (pp. 152-153).

개념 정의는 언어의 형태로서 개념을 명시하는 것을 뜻한다. 개념 정의는 암기를 해서 배우기도 하고, 정의에 대해서 개인적으로 의미를 부여하여 재구성할 수도 있다. 주로 전자를 통해 형성되는 개념 정의는 수학 공동체에서 인정되고 받아들여지는 정의이다. 이러한 정의를 형식적 개념 정의라 하고, 후자의 경우 학생 스스로

구성된 것으로 개인적 개념 정의라 한다. 개인적 개념 정의는 개념에 대한 개인 내부의 한 표현 양식이라는 점에서 개념 이미지에서의 심상으로도 볼 수 있다. 개인적 개념 정의는 개인마다 다양하며, 시간이 지나면서 변할 수 있다(pp. 152).

Vinner(1983)는 Tall과 Vinner(1981)의 연구에서 나아가 인지적 과제가 주어졌을 때 개인의 개념을 구성하는 두 요소, 즉 개념 정의와 개념 이미지가 어떻게 발현되는 지 사례들을 통하여 위의 [그림 Ⅱ-1]과 같이 정리하였다. [그림 Ⅱ-1]은 인지적 과제가 주어졌을 때 개인의 개념을 구성하는 개념 정의와 개념 이미지가 발현되는 양상을 보여준다. 수학적 개념에 대하여 개인이 개념 정의와 개념 이미지 모두를 가지고 있지 않을 수도 있다는 것과 마찬가지로 주어진 과제에 대하여 개념 정의만, 혹은 개념 이미지만 발현되기도 하고, 개념 정의와 개념 이미지가 모두 발현되기도 한다.

개인의 개념을 위의 틀로 살펴보는 것은 인지 활동에 개념이 어떻게 작용하는 지를 다양한 각도로 살펴보고 각각의 경우에 따라 심도 있는 기술과 함께 비교를 통하여 학생들의 개념 형성에서 부족한 부분을 찾아내고 이에 대한 제언을 찾을 수 있게 해줄 것이다.

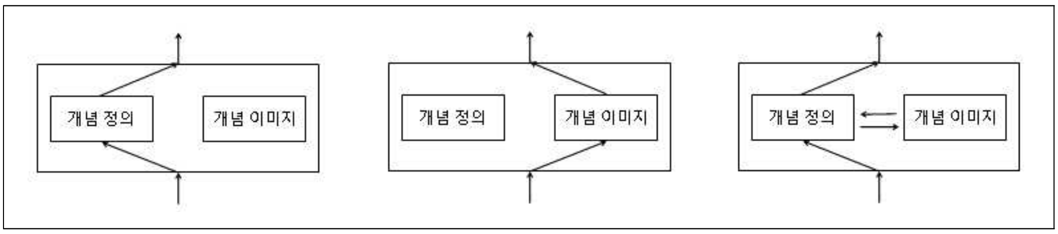
2. 구문론적 증명과 의미론적 증명

대학 수학에서 학생들의 증명 구성을 살펴본 연구들 중에는 증명의 결과물이 증명의 표현 양식에 맞게 형식적으로, 내용적으로 타당한 증명이라고 해도 증명을 구성하기 위해 접근하는 방식이나 사고 과정이 학생 개개인마다 다르다는 것을 사례를 통해 살펴보고 이를 분석하는 연구들이 지속되어 왔다(Pinto & Tall, 1999; Raman, 2003; Weber & Alcock, 2004; Weber & Alcock, 2009; Easdown, 2009).

여러 학생들의 사례를 통하여, 학생들의 증명 구성은 논리에 의해서만 이루어지는 증명과 비형식적인 표현을 이용한 사고를 통해 이루어지는 증명이 모두 나타난다는 사실이 밝혀졌다. Pinto와 Tall(1999)의 “의미를 추출하기(extracting meaning from)”와 “의미를 부여하기(giving meaning to)”, Raman(2003)의 “절차적 사고(procedural idea)”와 “핵심적 사고(key idea)”, Weber와 Alcock(2004)의 “형식적 추론”과 “비형식적 추론”은 비슷한 맥락을 의미하고 있다. 최근의 논문들은 이러한 틀 안에서 증명을 구성하는 동안 이루어지는 학생들의 사고를 분석하고 있다(Easdown, 2009).

학생들의 증명 구성 과정을 성격이 다른 두 가지 접근으로 나눌 수 있다는 위와 같은 일련의 연구들과 본인의 연구들을 바탕으로 Weber와 Alcock(2009)은 두 접근 방식을 명확히 규정하여 이론적인 틀을 만들었다.

수학 공동체에서 정의한 수학적 정의와 정리들을 논리 규칙에 의해 연역하는 것만을 이용한 사고로 증명을 구성하는 것을 구문론적 증명 구성(syntactic proof production)으로 정의하였다. 구



[그림 Ⅱ-1] 과제가 주어졌을 때 개념이 발현되는 다양한 양상(Vinner, 1983)

문론적 증명을 구성하는 사람은 수학적 개념에 대한 다이어그램이나 다른 직관적이고 비형식적인 표현을 결코 만들지 않는다. 반면, 수학적 대상에 대하여 개인의 내부에 가지고 있는 의미나 표현을 사고에 이용하여 명제가 참이 되는 이유를 발견하고 이를 기반으로 증명을 구성하는 것을 의미론적 증명 구성(semantic proof production)으로 정의하였다. 중요한 것은 수학적 개념에 대하여 수학 공동체에서 공식적으로 인정하는 것이 아닌 그림과 같은 개인적인 표현이나 개인적인 의미를 사고에 이용한다고 하여도 이것이 증명으로 기술되는 형식적인 추론으로 의미 있게 반영되는 것을 뜻하는 것이며, 개념 이미지가 형식적인 추론으로 반영이 되지 않아 비형식적인 정당화로 끝나는 경우에는 이를 의미론적 증명 구성으로 간주하지 않는다.

수학자들 역시 증명을 구성하는 데 위의 두 가지 방식을 사용하지만(Pinto & Tall, 1999; Weber & Alcock, 2004) 비전문가인 학생들의 증명 구성에는 각각의 방식에서 한계점이 드러난다. 구문론적 증명을 구성한 학생들 중에는 증명을 하고 나서도 명제가 왜 참인지 파악이 되지 않을 수 있어 증명을 하고 나서도 명제가 참인지 확신을 하지 못하기도 하며, 구문론적 증명에만 의존하게 될 경우 증명의 형식적 측면에만 집중하여 논리적 조작에 있어서 기반이 되는 개념 이해를 소홀히 하는 결과가 일어나기도 한다. 한편 의미론적 증명 역시 학생들이 구성하기에는 어려운 점이 있다. 왜냐하면 대학 수학의 모든 형식적 개념들에 대하여 학부 수준의 학생들이 비형식적인 표현을 개발하기 어려우며, 설사 그러한 표현들로부터 증명의 아이디어가 얻어졌을 때, 이를 다시 형식적인 표현으로 증명에 반영하는 것이 어렵기 때문이다. 예를 들어, 중간값의 정리는 그래프를 이용하여 그 정리가 성립함을 쉽게 파악할 수 있으나 이를 증명의 표현 양식에 맞게 증명으로 작성하는 것은 매우 어려운 일이다. 이와 같은 두 증명 방식의 한계점은 각 증명 방식과의 장점과 연결되기 때문에 서로를 보완해 준다는 점에서 모두 개발할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 및 절차

본 연구의 목적은 학생들의 수학적 개념 이해와 증명 구성 과정의 관련성을 탐구하는 것이다. 이러한 연구 목적을 달성하기 위해서는 학생들이 가지고 있는 개념과 증명을 구성하는 동안 일어나는 사고를 심층적으로 분석하는 과정이 필요하다. 그 과정은 학생들의 반응에 대한 결과적인 서술만이 아니라, 학생들의 증명 과정을 이해할 수 있는 보다 세부적이며, 미리 정해지지 않은 범주의 발견을 가능하게 하는 질적인 연구 방법이 필요하다고 볼 수 있다.

그러므로 본 연구에서는 연구 목적에 부합되는 자료를 수집하고, 수집된 자료를 근거로 학생들의 증명 과정을 심층적으로 분석하고 기술하기 위해서 각각 학생 개인들 간의 차이를 바탕으로 심층적인 정보와 체계적이며 내포적인 정보를 이해할 수 있는 사례 연구의 방법을 사용하였다. 그리고 증명 구성 과정에서 학생들의 사고 과정이 구문론적인 경우와 의미론적인 경우에 대한 그 과정과 이들의 수학적 개념 이해에 대한 이해와 증명 방식과의 관련성을 얻기 위하여 사례들을 선택하는 의도적 표본 추출(purposeful sampling)을 사용하였다. 특히 증명의 완성 결과보다는 증명을 구성해가는 과정과 그 과정에서 드러나는 학생의 개념을 충실히 이해하기 위하여 각 사례들을 상세히 기술하는 심층적인 기술(thick description)을 하였다.

사례 연구에 대한 면담은 2010년 8월 말에 4명의 학생들을 대상으로 각각 2시간 동안 시행하였다. 우선 연구 참여자들에게 과제를 수행할 시간을 주고 이후에 작성한 결과물을 바탕으로 면담을 실시하였다. 과제 수행 시간은 따로 제약을 두지 않았으나 대개 40~50분 정도 걸렸으며, 1시간 정도의 면담을 하여 총 2시간 이내로 이루어졌다. 연구 참여자들이 과제를 수행할 때, 연구자는 관찰자의 역할에 중점을 두었으며, 안내자나 조언자의 역할을 최소화 하였다. 그리고 연구 참여자들이 증명 과제를 수행할 때는 사고 과정을 말로 표현하도록(think aloud) 요청하였다. 증명을 어떻게 해 나갈지 생각하는 내용이 학생의 말로 잘 표현되지 않을 경우 현재 어떤 생각을 하고 있는지를 질문하였으며, 증명이 한 줄 한 줄 작성될 때마다 그 이유를 질문하였다. 이 모든 과제 수행 과정은 학생들이 과제를 해결하는 전반적인 수행 과정을 관찰하기 위하여 비디오로 녹화되었다. 그리고 면담은 연구 참여자가 가지고 있는 개념을 어떻게 형성하게 되었으며, 증명은 어떠한 사고 과정으로 이루어졌는지를 질문하는 중심으로 이루어졌다. 면담의 모든 진행 과정은 녹음 및 녹화되었으며 녹음된 내용은 모두 전사하여 학생들이 작성한 답안지과 함께 보관하였다.

비디오 자료와 녹음된 인터뷰 내용의 전사 자료는 상시 비교 분석법(constant comparison method)으로 분석하였다. 상시 비교 분석법은 유사점과 차이점을 결정하기 위해서 지속적으로 자료들을 비교하는 것이다(Cresswell, 2005). 본 연구에서 자료 분석은 우선 범주를 생성, 명명하기 위하여 개방형 코드(open code)를 사용하여 축성 코드(axial code)로 범주화하고 특히 빈번하게 등장하는 개방형 코드를 통하여 자료를 유형화하고 연구 문제에 대한 의미를 찾으려고 하였다. 개방형 코드는 자료의 내용을 있는 그대로 압축하여 생성한 코드로 연구자의 선입견이 개입되지 않게 학생들의 답변을 이해하여 만들기 위하여 노력하였다.

위에서 얻어진 코드는 구문론적 증명을 구성한 학생들과 의미론적 증명을 구성한 학생들에 따라 비교되었다. 개념 이해에서 나온 코드와 증명 구성 방식에서 나온 코드를 같은 증명 구성 방식을 사용한 참여자들 사이에서 발견되는 유사성과, 다른 증명 구성 방식을 사용한 참여자들 사이에서의 차별성을 찾으려 하였다.

질적 연구는 타당도와 신뢰도가 뒷받침될 수 있는 자료 수집과 분석이 이루어져야 그 결과를 신뢰할 수 있다. 우선, 타당도를 높이기 위하여 다음과 같은 전략을 사용하였다(Maxwell, 2005; Merriam, 2005; Cresswell, 2005). 우선, 학생들이 증명을 구성하는 상황을 상세하게 알 수 있도록 다양한 종류의 자료를 수집하였다. Maxwell (2005)는 연구자가 관찰한 상세하고 구체적인 사건들에 대하여 세밀하게 서술하는 자료를 풍부한 자료라고 설명하였다. 이와 같은 자료 수집은 연구의 내적 타당도와 신뢰도를 높이는 방법으로 삼각 검증법의 한 요소가 된다(Merriam, 2005; Cresswell, 2005). 본 연구에서 수집된 자료를 통해 연구자는 학생들이 작성한 과제의 결과물뿐만 아니라 전사 자료와 비디오 자료를 이용하여 학생들이 증명을 구성하는 상황을 세세하고 면밀하게 살펴볼 수 있었다.

또한, 자료를 분석하고 해석하는 동안 동료 연구자들의 검토를 통하여 내적 타당도 높였다. 동료 연구자들의 지속적인 검토를 통하여 자료 분석 결과와 해석은 지속적으로 수정, 보완되었다.

2. 연구 대상

본 연구 수행을 위한 표집 방법은 연구자가 탐구하고자 하는 과정에 대하여 접근할 수 있는

사례를 선택하는 의도적 표본 추출이다. 연구자가 의도하는 적절한 사례를 찾기 위해서는 사례 선정을 위한 기준이 마련되어야 하는데 표본 추출의 근거를 서술하면 다음과 같다.

우선, 본 연구는 학생들의 증명 구성 방식을 살펴본 기존의 연구들을 학생들이 갖고 있는 개념 이해와 연결시킴으로써 심화, 발전된 의미를 발견하고자 하는데 그 목적이 있다. 그러므로 과제로 주어지는 벡터 공간에서의 개념들에 대한 학습이 이뤄진 상태여야 한다. 또한 과제로 주어지는 명제를 증명할 수 있어야 하며, 그 방식은 구문론적인 경우와 의미론적인 경우를 찾을 수 있는 학생들이 필요하다.

앞에서 제시한 표본 추출의 근거들을 만족하는 학생들을 선정하기 위하여 본 연구자가 연구가 가능한 서울시에 소재한 대학교의 수학교육과에서 수학 동아리를 하는 학생들에게 구문론적 증명과 의미론적 증명을 설명하고, 평소 함께 공부하면서 구문론적 증명의 경향을 느낄 수 있던 학생들과 의미론적 증명의 경향을 느낄 수 있었던 학생을 추천받았다. 수학 동아리 학생들은 각 증명 방식에 따라 2명씩 총 4명의 학생을 추천하였으며, 4명의 학생에게 본 연구자가 간단하게 명제의 증명을 시켜 보았을 때에도 수학 동아리 학생들이 느낀 증명 방식과 일치하였다. 이러한 과정으로 이 4명의 학생들을 연구 참여자로 수집할 수 있었다.

3. 검사도구

학생들의 수학적 개념에 대한 이해와 증명 구성 과정을 탐구하는 본 연구는 선형 대수의 영역에서 이루어졌다. 과제 제작을 위하여 연구 문제의 맥락에서 요구되는 개념을 찾는 근거는 다음과 같다. 먼저, 본 연구는 개념 이해와 관련지어 구문론적 증명과 의미론적 증명 과정에 대하여 심화된 내용을 발견하는 것을 목적으로 한다. 그러므로 학생들이 개념에 대해서 형식적으로 명시된 정의나 정리를 잘 알고 있으면서 다양한 표상들도 가질 수 있는 개념이어야 한다. 또한, 연구의 결과가 대학 수학을 배우는 학생들에게 기여하는 바를 높이기 위하여 많은 학생들이 배우는 개념이면서도 그 내용이 중요한 개념이어야 한다.

위에서 제시한 근거를 만족하는 개념을 선정하기 위하여 선형 대수를 다루는 수학 교육 논문들과 선형 대수 교재들을 살펴보았다. 그 결과 부분 공간(subspace), 일차 독립(linearly independence), 일차 종속(linearly dependence), 고유 벡터(eigenvector) 개념에 대하여 학생들은 어떻게 이해하고 있으며 이와 관련된 문제를 어떻게 해결하는 지를 탐구하는 것은 주로 등장하는 주제였다(Uhlig, 2002; Bogomolny, 2007; Maracci, 2008; Stewart, 2008). 또한 이들은 형식성과 추상성을 갖는 개념일 뿐만 아니라 벡터의 시각적인 표현을 이용하여 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 상에서 기하학적인 의미를 형성할 수 있으며, 행렬 표현을 이용하여 상황에 맞는 예와 의미도 형성할 수 있는 개념임을 알 수 있었다(Hillel, 2000; Stewart, 2008). 선형 대수 교재들도 이 개념들에 대하여 다양한 예를 제공하고 컴퓨터 프로그램을 이용한 시각적인 표현을 담고 있다는 점(Anton, 2004; Lay, 2006)에서 학생들이 형식적인 표현 외에도 다양한 표상을 형성할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 부분 공간, 일차 독립, 일차 종속, 고유 벡터의 개념 중 부분공간에 대한 개념을 묻고 관련된 명제를 증명하는 과제를 제작하였다. 수학과 박사과정생의 조언을 얻어 구문론적인 증명과 의미론적인 증명이 가능한 명제들을 선정하고, 4명의 수학교육과 학생을 대상으로 예비 조사를 실시하였다. 그 결과, 학생들에게 구문론적으로 증명이 쉽게 되어 의미론적으로

증명의 아이디어를 얻을 필요성을 느끼지 못하는 명제와 증명이 어려운 명제를 제외하고 구문론적 증명과 의미론적 증명이 모두 나온 아래의 명제를 과제로 선정하였다.

명제 : 벡터 공간 V의 두 부분 공간 W_1, W_2에 대하여 $W_1 \cup W_2$가 V의 부분공간이면, $W_1 \subseteq W_2$ 또는 $W_2 \subseteq W_1$이다.

이 명제는 예비 조사를 통하여 부분 공간의 정의를 이용하여 구문론적으로 증명 가능하고, 각 개념들의 기하학적인 의미를 기반으로 의미론적 증명도 가능한 과제임을 확인할 수 있었다.

Ⅳ. 연구 결과

본 사례 연구 결과는 학생들이 증명을 하기 이전에 명제의 내용을 직관적 혹은 개인적인 언어나 표현을 이용하여 이해하는 과정이 있는지, 증명 과정에서 각자가 가지고 있는 개념 이미지를 이용하는지를 기준으로 크게 구문론적 증명을 하는 학생과 의미론적 증명을 하는 학생으로 분류되었다. 분석 결과 연구 참여자 1과 2는 구문론적 증명 방식으로 증명을 구성하였으며, 연구 참여자 3과 4는 의미론적 증명 방식으로 증명을 한 것으로 나타났다. 본 장에서는 각기 다른 증명 방식을 가진 학생들이 개념을 어떻게 이해하고 있는지 Tall과 Vinner(1981)가 제시한 개념 정의와 개념 이미지로 나누어 분석하였다. 증명을 구성해가는 과정에서 어떠한 사고 과정이 이루어지는 가를 살펴보았다. 마지막으로 수학적 개념과 증명 구성 방식의 관련성에 대한 결론을 모색해보고자 한다.

1. 각 연구 참여자들의 개념 이해

가. 형식적 개념

각 연구 참여자들이 제시한 부분 공간의 형식적 정의와 동치 명제 - 이를 하나로 묶어 형식적 개념이라 하겠다. - 는 아래 표 <Ⅳ-1>과 같다. 네 학생은 모두 형식적 개념을 정확하게 알고 있을 뿐 아니라 단지 내용 진술에 그치지 않고 부연된 설명도 함께 제시하였다. 그런데 같은 형식적 개념이라도 학생들마다 이를 인지하는 방식은 다양하다는 것을 알 수 있었다.

연구 참여자 1은 면담 과정에서 본인이 제시한 형식적 개념들에 대하여 다음과 같이 설명하였다.

연구자 : 어떤 게 이 개념에 대한 정의이고 어떤 게 동치 명제인지 말해 줄 수 있을까요?

<표 Ⅳ-1> 각 연구 참여자들이 제시한 부분 공간의 형식적 개념

참여자 1	정의	$\varnothing \neq W \subseteq V,\ \forall v, w \in W$에 대하여 $v+w \in W,\ av \in W$
	동치명제	$\varnothing \neq W \subseteq V,\ \forall v, w \in W$에 대해 $av+bw \in W$
참여자 2	정의	$\varnothing \neq W \subseteq V,\ \forall v, w \in W$에 대하여 $v+w \in W,\ av \in W$
	동치명제	$\varnothing \neq W \subseteq V,\ \forall v, w \in W$에 대해 $av+bw \in W$
참여자 3	정의	$\varnothing \neq W \subseteq V,\ \forall v, w \in W$에 대하여 $v+w \in W,\ av \in W$
참여자 4	정의	$\varnothing \neq W \subseteq V,\ \forall x, y \in W,\ \forall a, b \in F,\ ax+by \in W$

참여자 1 : 사실 책에 따라 이렇게 정의하는 데도 있고 이렇게 정의하는 데도 있어요. 그런데 전 이 쪽($\varnothing \neq W \subseteq V$, $\forall v, w \in W$에 대하여 $v+w \in W$, $av \in W$)이 더 좋아요. 왜냐면 이거 ($\varnothing \neq W \subseteq V$, $\forall v, w \in W$에 대해 $av+bw \in W$)를 한 번에 다 보일 때가 복잡한 점이 더 많았어요.

연구자 : 아.. 부분 공간인 걸 보일 때요?

연구 참여자 1은 부분 공간의 정의가 유일한 것이 아니라 책마다 다르게 정의되는 개념으로 알고 있으며, 여러 정의들 가운데 본인이 부분 공간임을 증명할 때 편한 내용을 부분 공간의 정의로 받아들이고 있다. 이로부터 연구 참여자 1은 증명과 문제 풀이에 이용되는 상황과 연결하여 동치 명제들을 기억하고 있다는 것을 알 수 있다.

연구 참여자 2, 3, 4는 형식적 개념을 작성하기에 앞서 부분 공간에 대하여 아래와 같은 설명을 하고 작성하였다. 부분 공간이란 부분 집합인데 벡터공간을 이룬다는 것인데 이러한 표현들은 부분 공간과 벡터 공간이라는 두 개념 간의 관계를 설명해주는 것으로 이 세 학생들은 단순히 정의만을 기억하는 것이 아니라 정의가 뜻하는 의미와 함께 형식적 정의를 받아들이고 있다는 것을 알 수 있다.

나. 개념 이미지

각 연구 참여자들이 제시한 개념 이미지는 언어적인 표현과 비언어적인 표현으로 나누어 특성을 살펴보았다.

연구 참여자 1은 다른 연구 참여자들이 형식적 개념으로 알고 있는 내용과 벡터 공간과 부분 공간의 관계에 대한 비유적인 표현을 제시하였다. 이 표현들에 대해서 연구 참여자 1은 “증명에는 잘 이용되지 않지만 개념이 무엇인지에 대한 느낌을 주기 때문에 개념의 내용을 기억하는 데 도움이 된다.”라고 설명하였다. 연구 참여자 2는 연구 참여자 1과 유사하게 형식적 정의를 그대로 진술하는 내용과 “부분 공간이라고 하면 가장 먼저 떠오르는 것”이라며 벡터 공간의 예로 기본적이자 가장 많이 탐구되는 예인 $\mathbb{R}^2$와 $\mathbb{R}^3$에서의 부분 공간인 $\mathbb{R}^2$에서의 직선, $\mathbb{R}^3$에서의 xy평면을 제시하였다. 연구 참여자 3이 제시한 개념 이미지를 살펴보면, 우선 “ W를 벗어나지 않는다.”라고 기술한 표현은 “연산에

<표 Ⅳ-2> 각 연구 참여자들이 제시한 부분 공간의 개념 이미지(언어적 표현)

참여자 1	W도 그 자체로 벡터 공간인데, V 안에 다 포함되는 것이다.
	아빠와 아들, 집과 방 같은 관계를 가진다.
참여자 2	스칼라 곱이랑 벡터의 덧셈 연산에 대해서 잘 굴러가는 공간
	$\mathbb{R}^2$에서의 직선, $\mathbb{R}^3$에서의 xy평면, yz평면, zx평면.
참여자 3	W는 V에 완전히 포함되며 W에서 어떤 원소들의 선형 결합을 만들어도 W를 벗어나지 않는다.
	$\mathbb{R}^3$에서 원점을 포함하는 평면
참여자 4	V의 basis에서 일부를 택하여 표현이 가능한 공간.
	$\mathbb{R}^3$에서의 원점을 포함하는 평면

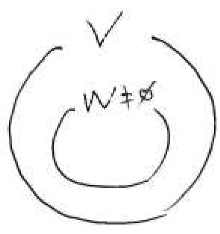
대하여 닫혀 있다"는 부분 공간의 형식적 정의를 알기 쉽게 표현한 것이다. 연구 참여자 3도 연구 참여자 2처럼 벡터 공간의 전형적인 예인 $\mathbb{R}^3$ 공간에서의 평면을 개념 이미지로 가지고 있었다. 연구 참여자 4는 연구 참여자 2와 3처럼 개념에 대한 전형적인 예를 심상으로 가지고 있다. 연구 참여자 4는 유일하게 기저(basis)라는 단어가 담긴 표현을 제시하였다. 연구 참여자 4는 아래의 진술에서 기저가 갖는 의미를 설명하고 있다.

참여자 4 : vector space 자체가 원소들 간의 곱이 아니고 그 원소에 대해서 상수배라는 것을 정의한 다음에 그 원소를 가지고 쭉 늘리고 줄이고 더하고 해가지고 연결을 짓는 것이기 때문에 중요한 것은 그 원소를 어떻게 확장을 하냐, 다른 원소와 어떻게 결합을 하냐, 그러니까 덧셈을 하느냐 이런 문제이기 때문에 결국에 근간이 되는 것은 basis라고 생각을 해요.

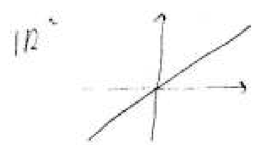
연구 참여자 4는 벡터를 기저의 원소들의 일차 결합으로 보고, 벡터를 이루는 기저의 원소들이 어떠한 지를 살펴보는 관점을 가지고 있으며 따라서 기저가 벡터의 근간이 된다고 생각하고 있다. 연구 참여자 4의 표현에서만 볼 수 있는 이 특성은 부분 공간 자체가 가지고 있는 내용뿐만 아니라 "기저"라는 다른 개념과 연결된 시각으로 개념을 살펴봄으로써 얻어진 개념 이미지가 있다는 것이다. 이는 기존에 배웠던 개념들에 대해서 새로운 개념을 반영하여 재조명하는 것이 개념 이미지를 풍부하게 하는 한 방법이 됨을 시사한다.

한편 각 연구 참여자들이 제시한 부분 공간에 대한 비언어적인 표현은 다음과 같다.

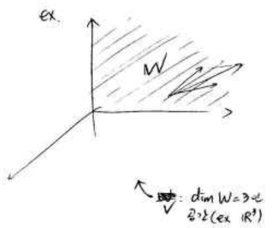
위의 [그림 Ⅳ-1]을 살펴보면, 연구 참여자 1의 부분 공간의 그림은 부분 공간의 형식적 정의에서 "$\varnothing \neq W \subseteq V$"에 대해서만 기술된 다이어그램이다. 즉, 이 표현은 부분 공간을 단순한 부분집합과 구별하는 내용을 담고 있지 않다. 따라서 언어적인 설명의 추가 없이 이 다이어그램으로



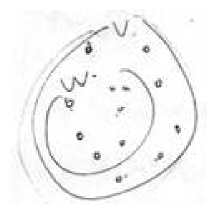
참여자 1



참여자 2



참여자 3



참여자 4

[그림 Ⅳ-1] 각 연구 참여자들이 제시한 부분 공간의 개념 이미지(비언어적 표현)

부분 공간을 표현하는 것은 한계가 있을 것이다. 참여자 2는 부분 공간의 한 예를 그림으로 표현하였고, 이 그림은 앞에서 기본적인 예로 제시한 부분 공간의 개념 이미지와 같은 내용이다. 부분 공간에 대하여 연구 참여자 3이 그린 그림은 연구 참여자 2와 마찬가지로 부분 공간의 한 예로 제시한 본인의 개념 이미지를 그림으로 표현한 것이다. 그런데 연구 참여자 3이 제시한 그림에서 W 안에 표현된 세 화살표는 앞서 이 학생이 부분 공간에 대하여 가지고 있던 "선형 결합이 벗어나지 않는 것"을 그림에 반영하였다는 점에서 단순히 예를 표현한 연구 참여자 2의 그림과는 차이가 있다. 연구 참여자 4의 비언어적인 표현은 연구 참여자 1의 다이어그램과 마찬가지로 다이어그램을 제시함으로써 일반성을 잃지 않는 그림이다. 그러나 부분 공간의 형식적 정의에서 "$\emptyset \neq W \subseteq V$"만 표현된 연구 참여자 1의 다이어그램과는 달리 "V의 기저의 일부를 택해서 만들 수 있는 공간"이라는 부분 공간의 속성에 관한 개념 이미지가 반영된 다이어그램이다. 연구 참여자 3과 연구 참여자 4는 언어적 표현과 비언어적 표현의 개념 이미지가 잘 대응된다는 특성이 있다.

지금까지 학생들이 각 개념에 대하여 가지고 있는 개념 이미지를 살펴보았다. 학생들은 책에 쓰인 형식적 개념만을 받아들이는 것이 아니라 스스로 개념 이미지를 형성하려는 노력을 하였다. 이들은 다음과 같은 이유로 형식적 개념에 대하여 개념 이미지를 형성하고 있었다. 연구 참여자 1과 연구 참여자 3은 개념 이미지가 증명에 잘 이용되지는 않지만 개념이 무엇인지에 대한 느낌을 주기 때문에 개념의 내용을 기억하는 데 도움이 된다고 진술하였다. 형식적으로 기술된 개념의 내용 자체를 그대로 인지 구조에 넣는 것은 이를 기억하기 어렵기 때문에 개념 이미지로 변환하여 형식적 개념의 내용을 기억하기 쉽게 개념 이미지를 이용한다고 하였다. 연구 참여자 2는 이와 같은 개념에 대한 "직관적인 이해"에 개념 이미지를 쓸 뿐만 아니라 증명의 내용을 부분적으로 이해할 때도 이용한다고 진술하였다.

네 연구 참여자들 모두 정확한 개념 이해를 하고 있었으나 보유하고 있는 형식적 개념이나 개념 이미지의 특성이 구분되었다. 그렇다면 증명과 같은 개념을 적용하는 상황에서는 어떤 개념이 발현(evoked)될 것인지를 고려하면서 다음 절에서는 각 개념을 포함하는 명제에 대한 증명 구성과정을 살펴보고자 한다.

2. 각 연구 참여자들의 증명 구성 과정

가. 연구 참여자 1

연구 참여자 1이 주어진 명제를 보고 가장 먼저 진술한 내용은 다음과 같다.

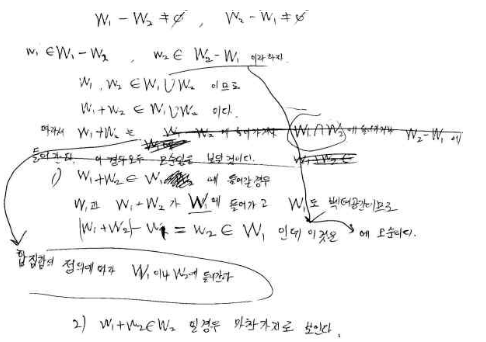
참여자 1 : 결론을 부정해서 앞에 거를 모순인 거를 보일 생각이에요. 왜 그러냐면 이게 벡터 공간에 대한 거 인데 사실 이런 비슷한 거를 Group에 대해서 해본 적이 있어요.

연구자 : 비슷한 걸요? 그럼 그 때 이런 식으로 증명을 했었나요?

연구 참여자 1은 이전에 수강했던 현대 대수학의 군에 대한 명제가 이와 유사했다는 점을 착안, 그 명제와 증명 내용을 함께 기억하여 이전의 증명 경험을 바탕으로 주어진 명제를 귀류법으로 증명할 계획을 세웠다. 그 이후의 과정에서도 평소 본인이 사용하는 증명 방법을 떠올려 전개하고자 하였는데 이는 대학 수학을 배우면서 증명 경험을 통하여 증명 방법을 습득하고

이를 이용하여 자동적으로 증명을 구성하는 것으로 해석될 수 있다. 이 사례는 증명을 학습할 때, 증명을 전개해 나가는 방법, 즉 증명 전개의 절차적 지식을 함께 확장해야 된다는 것을 제시한다.

아래 [그림 Ⅳ-2]의 학생이 수정한 부분에서 연구 참여자 1이 본인이 알고 있는 증명 방법은 “부분 공간”이라는 조건을 이용할 수 없다는 것을 알게 되었다. 그래서 부분 공간을 규정하는 형식적 정의의 내용 중 “$v+w\in W$”를 생각하여 두 벡터 w_1, w_2를 더한 w_1+w_2를 잡게 되었다. 이와 같은 증명 아이디어의 고안은 집합의 포함 관계에 대한 형식적 개념, 부분 공간의 정의에 의해서 자연스럽게 이끌어졌다고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-2] 연구 참여자 1의 증명

연구 참여자 1의 증명 과정에서 나타났던 위의 두 가지 특성은 다음의 두 가지 내용을 시사한다. 첫째, 증명 방법을 아는 것은 일종의 절차적 지식으로 볼 수 있으며, 증명 구성의 양식(template)을 제공하기 때문에 학생 스스로 증명을 구성하는 데 어려움을 덜어준다. 둘째, 증명 방법이라는 절차적 지식의 습득도 중요하지만 실제 증명에서 절차적 지식은 형식적 정의의 내용과 잘 연결이 되었을 때, 적합하게 이용된다. “이런 증명은 이렇게 가능하다”라는 절대적인 증명 방법, 규칙이라는 것은 없으며, 절차적 지식만으로는 구문론적 증명이 가능하지만은 않다는 것을 알 수 있다.

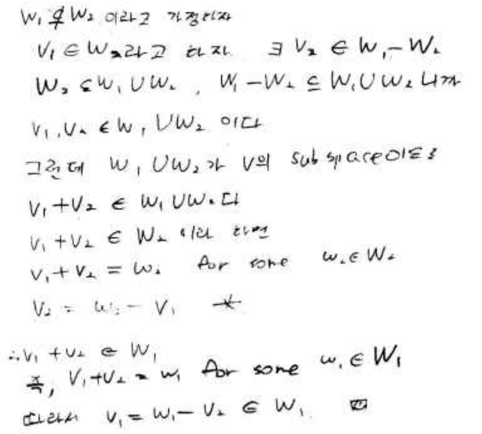
나. 연구 참여자 2

연구 참여자 2는 주어진 명제를 보자마자 “$W_1 \not\subseteq W_2$라고 가정하자”라고 작성하면서 명제의 증명을 시작하였다.

연구자 : 일단 처음에 시작을 W_1이 W_2에 들어가지 않는다라고 가정하자라고 시작했는데 어떻게 이렇게 시작을 하게 된 건가요?

참여자 2 : 음.. 이거는 되게 논리적인 것 같아요. 명제가 이런 형태면 항상 출발을 이렇게 해왔던. p이면 q 또는 r이다. 이러면 습관적으로 일단 $\sim q$라고 해보자. 라고 써놓고 시작을 하는 게 저한테는...

연구 참여자 2는 명제의 구조를 살펴보고 “q 또는 r”이 결론인 명제를 증명하는 방법은 $\sim q$를 가정했을 때 r을 이끌어 내는 것이라고 설명하였다. 그에 따라 $W_1 \not\subseteq W_2$을 시작으로 $W_2 \subseteq W_1$을 이끌어 내려는 계획을 수립하였다. 연구 참여자 2 역시 연구 참여자 1과 유사하게 명제에 대해서 증명 구성의 양식을 가지고 있었으며, 평소의 증명 경험을 통해 이를 본인의 인지구조에 형성하게 되었다. 연구 참여자 1과 연구 참여자 2는 명제의 내용을 이해하는 과정 없이 이전의 증명 경험으로부터 형성된 증명 구성의 양식, 즉 일종의 절차적 지식을 통해 명제를 어떻게 증명할 지 증명의 아이디어 혹은 증명 계획을 수립하였다.



[그림 Ⅳ-3] 연구 참여자 2의 증명

[그림 Ⅳ-3]은 명제에 대한 연구 참여자 2가 작성한 증명의 결과물이다. 연구 참여자 2가 세운 증명의 계획은 다음과 같이 구체화되었다. 우선, "$W_2 \subseteq W_1$"임을 이끌어 내기 위하여 연구 참여자 2는 $W_2 \subseteq W_1$의 형식적 정의에 따라 "$v_1 \in W_2$이면 $v_1 \in W_1$"를 보이는 것으로 가정 부분과 결론 부분의 양방향의 계획을 세워 과정을 좁혀나갔다. 또한, 연구 참여자 1과 같이 "$W_1 \not\subseteq W_2$"에서 $v_2 \in W_1 - W_2$를 이끌어 내었고, $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이라는 가정을 이용하여 부분 공간의 형식적 정의의 일부인 "$v+w \in W$"를 기반으로 v_1과 v_2를 더하여 v_1+v_2 역시 $W_1 \cup W_2$에 들어간다고 하였다. 이러한 전개 과정은 연구 참여자 2 역시 연구 참여자 1과 마찬가지로 형식적 정의를 기반으로 증명을 전개한다는 것을 말해준다.

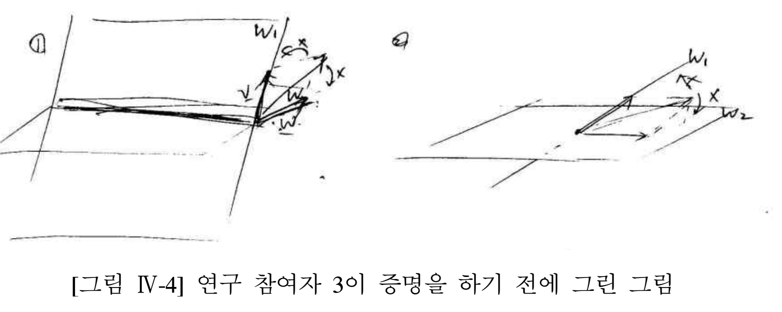
한편, 연구 참여자 2는 가정에서 출발하여 연역을 하는 것과 동시에 결론에 이르기 위한 충분조건도 함께 찾아가면서 증명을 양방향으로 좁혀 나가는 방식으로 증명을 구성하였다. 보이려고 하는 결론인 "$v_1 \in W_1$"를 위해서 연구 참여자 2는 $(v_1+v_2)-v_2$를 고려하였고, $v_1 \in W_1$의 충분조건으로 "$v_2 \in W_1$이기 때문에 $W_1 \cup W_2$에 속하는 v_1+v_2가 W_1에 속해야 한다"는 증명의 작은 목표를 세웠다. 새롭게 생긴 작은 목표 $v_1+v_2 \in W_1$는 $v_1+v_2 \in W_2$임을 가정했을 때, 모순이 생기면서 증명되었다.

정리하면, 이 증명에는 학생이 가지고 있는 증명 구성의 양식과 형식적 개념이 이용되었다. 연구 참여자 1과 구분되는 특성으로 결론에 이르기 위한 충분조건을 찾아가는 분석법적 사고를 살펴볼 수 있었다. 이 증명은 기반이 되는 사고가 모두 증명의 표현 양식 내에서 이루어졌다는 점에서 구문론적 증명으로 분류할 수 있다.

다. 연구 참여자 3

명제를 보고 이전의 증명 경험을 떠올렸던 연구 참여자 1, 2와는 달리 연구 참여자 3은 주어진 명제를 보고 명제의 내용에 대한 그림을 그리는 시도를 하였다.

위의 [그림 Ⅳ-4]에 대한 설명은 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-4] 연구 참여자 3이 증명을 하기 전에 그린 그림

참여자 3 : 일단 3차원에서 뭘 잡긴 잡아야 되는 데 평면 두 개를 생각해서 보니까 저 경계선에 해당한다고 해야 되나 어쨌든 저 경계 쪽에 있는 두 벡터를 더하니까 전혀 안에 안 들어가더라구요. 그래서 아마 맞는 명제겠구나 이게 써놓은 문장이 맞는 명제겠구나 하고 생각을 했구요. 차원 두 개의 공간 가지고는 뭔가 좀 커버 안 되는 경우가 있을 수 있잖아요. 그래서 이차원 공간 말고 뭐가 있나 보면 2차원과 1차원 쌍이 있으니까 걔를 보고서 아 걔도 이렇구나하고 생각을 한 다음에 증명으로 들어간 거에요.

연구 참여자 2는 명제의 결론 "$W_1 \subseteq W_2$ 또는 $W_2 \subseteq W_1$"이 성립하지 않는 두 부분 공간 W_1, W_2을 부분 공간의 한 예인 $\mathbb{R}^3$에서의 평면 또는 직선으로 그림을 그렸다. 우선, 결론을 부정한 상황을 생각한 이유는 결론의 부정이 틀리면 원래 결론이 맞다고 생각할 수 있기 때문에, 결론의 부정이 틀리다는 것을 보여주는 반례를 생각한 것이라고 진술하였다. 이는 어떤 명제와 그것의 부정 가운데 하나는 반드시 참이어야 한다는 형식 논리학의 사유 법칙 중의 하나인 배중률에 입각한 사고로 볼 수 있다. 그리고 반례를 찾기 위하여 결론의 부정을 만족하는 예를 $\mathbb{R}^3$-공간에서 찾고 이를 시각적으로 표현하여 가정 $W_1 \cup W_2$가 성립을 할 것인지에 대하여 시각적으로 탐구하였다. 그리고 부분 공간의 정의의 내용 중 $w_1 + w_2 \in W$를 기반으로 하여 $W_1 \cup W_2$의 두 벡터를 잡고 이를 더해서 $W_1 \cup W_2$ 안에 다시 들어가는 지를 그림으로 판단하였다.

그림을 탐구한 결과 연구 참여자 3은 자신이 설정한 예들이 W_1과 W_2에서 각각 선택한 벡터 v와 w를 더했을 때, $W_1 \cup W_2$에 들어가지 못한다는 점에서 $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이라는 가정을 만족하지 못한다는 것을 발견하였다. 따라서 연구 참여자 3은 이 그림에서 결론의 부정이 가정된 상황에서 가정에 발생된 모순을 바탕으로 귀류법 증명을 계획하였다.

[그림 Ⅳ-4]을 기반으로 작성된 연구 참여자 3의 증명은 다음과 같다.


By Contradiction. Suppose that there exist two subspace of V W_1, W_2 s.t.
$W_1 \cup W_2$ is also a subspace of V and $W_1 \not\subseteq W_2$, $W_2 \not\subseteq W_1$.
~~If one of W_1, W_2 is $\{0\}$,~~
If $W_1 = \{0\}$, $W_1 \subseteq W_2$. So, W_1, W_2 is not $\{0\}$.
~~Then we can take~~ If $W_1 - (W_1 \cap W_2) = \phi$, $W_1 \subseteq W_2$,
So $W_1 - (W_1 \cap W_2) \neq \phi$ and $W_2 - (W_1 \cap W_2) \neq \phi$.
Then we can take $\underline{v} \in W_1 - (W_1 \cap W_2)$, $\underline{w} \in W_2 - (W_1 \cap W_2)$.
~~By the hypothesis, $\underline{v} + \underline{w} \in W_1 \cup W_2$.~~
Suppose $\underline{v} + \underline{w} \in$ ~~$W_1 \cap W_2$~~ $W_1 \cup W_2$.
Then $\underline{v} + \underline{w} \in W_1$ or $\underline{v} + \underline{w} \in W_2$.
Case 1 $\underline{v} + \underline{w} \in W_1$
Since W_1 is a vector space, $(\underline{v} + \underline{w}) - \underline{v} \in W_1$. ※
Case 2. $\underline{v} + \underline{w} \in W_2$.
Similarly, ※
Thus $\underline{v} + \underline{w} \notin W_1 \cup W_2$.
~~But by the hy~~ But by the hypothesis, $\underline{v} + \underline{w} \in W_1 \cup W_2$. ※

[그림 Ⅳ-5] 연구 참여자 3의 증명

연구 참여자 3은 시각적인 표현과 예를 이용하여 명제를 탐구하였지만 이를 바탕으로 생성한 증명의 결과물은 [그림 Ⅳ-5]에서 보이는 바와 같이 증명의 표현 양식으로 작성된 타당한 수학적 증명이 되었다. 하지만 수학적 증명을 구성하는 그 이면의 과정에는 증명의 표현 양식이 아닌 그림과 같은 다른 표현 양식에서의 사고가 반영되었다는 점에서 연구 참여자 3의 증명은 Weber와 Alcock(2009)이 제시한 의미론적 증명으로 분류할 수 있다. 실제로 [그림 Ⅳ-4]를 통하여 [그림 Ⅳ-5]의 증명을 작성해 나가는 과정을 구

체적으로 알아보면 다음과 같다.

연구 참여자 1의 증명처럼 연구 참여자 3의 증명의 도입부는 결론의 부정, 즉 "$W_1 \subseteq W_2$ 또는 $W_2 \subseteq W_1$"의 부정을 가정하고 이로부터 "$W_1 - W_2 \neq \varnothing$이고 $W_2 - W_1 \neq \varnothing$"를 이끌어 낸 후 $W_1 - W_2$와 $W_2 - W_1$의 두 집합에서 각각 벡터 v, w를 선택하고 이들을 더한 $v+w$를 고려하였다. 작성된 증명의 내용만을 비교하면 두 학생의 증명에는 차이가 없지만 도입부를 구성하게 된 사고 과정에는 큰 차이가 있다. 연구 참여자 1의 경우 이전의 증명 경험으로부터 귀류법으로 증명할 것을 계획하였고 부정된 결론의 형식적 개념과 부분 공간의 정의에 의해 $v+w \in W_1 \cup W_2$에 이르렀다. 반면, 연구 참여자 3이 $W_1 - W_2$와 $W_2 - W_1$에서 각각 벡터 v, w를 선택한 이유는 다음과 같다.

참여자 3 : 그림에서 vector space 두 개가 있으면 교선이 당연히 생길 수가 있잖아요. 교선이나 교점이 생길 수가 있는데 그걸 이제 그거를 집어넣고 생각을 하면 교선 안에서 더하면 당연히 교선 안에 들어가니까 걔는 우리가 원하는 증명에서 요구하는 대상이 아니잖아요. 그래서 그림 그릴 때도 교선을 빼놓고 생각했으니까 교선이나 교점을 빼놓고 생각했으니까 교선을 제외하기 위해서 W_1에서 뺀 거에요.

[그림 Ⅳ-4]에서 연구 참여자 3이 관찰한 내용은 교선 위에 있지 않은 W_1의 벡터 v와 W_2의 벡터 w를 선택하여 더했을 때, $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이라는 가정에 모순이 된다는 것이었다. 여기서 교선이란 두 평면의 교집합으로 증명의 표현 양식에 맞게 기술했을 때는 $W_1 \cap W_2$가 되며, 그림에서 선택된 v와 w는 교집합이 아닌 부분에서 선택하였다는 점에서 $v \in W_1 - (W_1 \cap W_2)$, $w \in W_2 - (W_1 \cap W_2)$가 되는 것이다. 이 두 벡터에 대해서 $v+w$가 모순을 유발하는 대상이 되기 때문에, $v+w$에 대하여 증명의 나머지 부분을 전개하려고 하였다.

또한 $v+w \in W_1 \cup W_2$는 연구 참여자 1의 경우 부분 공간의 정의에 의해 참인 것으로 연역된 내용이고, 나중에 연역된 다른 내용들과 함께 모순을 이끄는 데 이용된 반면, 연구 참여자 3의 경우 $v+w \in W_1 \cup W_2$는 실제로 불가능하지만, 모순 유발을 위해서 의도적으로 선택되었다는 차이가 있다.

모순을 이끌어내는 증명의 나머지 과정을 위하여 연구 참여자 3은 $v+w$에 v, w를 각각 빼 보는 생각을 하였다. 이는 그림에서는 드러나지 않는 내용이며, 이에 대하여 연구 참여자 3은 다음과 같은 진술을 하였다.

참여자 3 : 이 그림이 사용된 거는 여기까지일 거 에요. 그 다음에 가정부터는 이 그림 자체가 먹혀드는 상황이 아니니까 그냥 평면 위에 벡터 두 개가 있고 벡터 두 개를 어떻게 요리해먹을까 생각을 하고 있는 거구요. 그 다음에 목표달성이죠. 지금 둘 중에 하나가 다른 녀석에 들어가면 안 되잖아요. 가정을 잡은 게 있으니까. v가 W_2에 들어가거나 w가 W_1에 들어가면 말이 안 되는 상황이니까 걔로 어떻게든 모순을 이끌어 내자라는 생각으로 진행을 했어요.

연구자 : 그러면 본인이 생각하기에는 이 명제를 증명할 때 이 그림이 증명하는 데 도움이 되었다고 생각하나요?

참여자 3 : 아이디어 잡는 데는 좋았어요. 아이디어 잡고 나서는 이제 거의 반자동으로 푸는 건데 아이디어를 못 잡으면 못하

잖아요. 이 증명을 하기 위해서 이제 뭐라 그래야 되지 서로 다른, 서로 포함되지 않는 두 벡터 공간이 있으면 거기서 각각의 다른 쪽 대상에 포함되지 않는 두 벡터를 잡아서 더하면 공간 밖으로 빠져나간다는 건데 공간 밖으로 빠져나가는 녀석을 찾기 위해서는 이렇게 잡아야 된다라는 아이디어를 잡았구요. 나머지는 목표를 위해 반자동적으로. 모순을 보여야 된다는 거를 목표로 삼고 반자동으로 간 거죠.

위의 면담 내용은 그림을 통해 생각해 낸 v, w, $v+w$를 이리저리 조합해서 빼보는 생각이 모순 유발을 목표로 부분 공간의 형식적 정의를 사용하여 이끌어 낸 생각임을 말해준다. 연구 참여자 3은 이러한 생각을 기반으로 하여 모순을 유발, 귀류법에 의하여 명제의 증명을 완성하였다.

위와 같은 증명 과정의 일부는 그림과 같이 증명의 표현 양식 이외의 다른 표현 양식에서 이루어진 사고가 형식적으로 전개되는 증명의 모든 과정을 뒷받침하지 않을 수도 있음을 보여준다. 따라서 의미론적 증명의 전개 과정에는 구문론적 증명이 필요한 부분이 있으며, 따라서 구문론적 증명 능력이 기반이 되지 않을 경우 의미론적 증명도 완성되기 어려울 수 있다. 이러한 점에서 연구 참여자 3의 증명은 의미론적 증명 안에서 구문론적 증명이 필요한 시점을 보여 주는 사례가 된다. 증명을 위한 사고에 이용된 그림이 비형식적 정당화로만 머물지 않고 이러한 시점을 극복하여 의미론적 증명에 이르기 위해서는 구문론적 증명 능력도 함께 개발할 필요가 있다.

라. 연구 참여자 4

명제에 대하여 연구 참여자 4가 가장 먼저 진술한 내용은 다음과 같다.

참여자 4 : 단순히 합집합이라서 vector space의 구조에서 집합과 집합을 그냥 합한다라는 것은 사실 큰 문제가 있을 것 같아요. 예를 들어서 이것(W_1)과 이것(W_2)에 대해서 이런 구조(W_1+W_2) 같은 경우에는 vector space를 이룰 거에요. 그런데 덧셈이나 그런 구조가 아니라 단순히 집합과 집합, vector space의 구조를 이용하지 않고 집합과 집합을 단순히 합한다라고 하면 거기에는 충분히 문제가 생길 수 있을 것 같아요.

연구 참여자 4는 일반적인 두 부분 공간에 대해서는 $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이라는 명제의 가정이 쉽게 만족되기 어렵다고 진술하였다. “W_1, W_2가 부분 공간이면, W_1+W_2도 부분 공간이다”라는 정리(Theorem)는 선형 대수 교재에서 흔히 접할 수 있는 정리이다(Anton, 2004; Lay, 2006). 그리고 이 정리는 구문론적 증명으로 쉽게 증명할 수 있다. 따라서 증명하는 것에만 의의를 두고 이 정리를 살펴본다면 크게 주목할 부분은 없다. 그런데 연구 참여자 4는 명제의 내용에 연산 구조를 이용하여 결합시켜야 구조가 유지된다는 의미를 부여하였다. 연구 참여자 4는 부분 공간에 대한 이미지를 진술할 때, 구조를 갖고 있는 집합임을 강조하였고, 그 구조를 결정하는 것이 기저라고 하였다. 그런 이유에서 연구 참여자 4는 이 명제를 이해할 때 그 초점을 구조에 맞추었음을 알 수 있다. 정리하자면 개념에 대한 연구 참여자 4가 가지고 있는 이러한 언어적 표현은 명제를 파악하는 데 이용되었음을 알 수 있다.

명제의 가정이 일반적인 두 부분 공간으로 성

립하지 않기 때문에 연구 참여자 4는 귀류법으로 증명할 계획을 세웠다. 증명을 작성하기 이전에 결론의 부정을 가정하고 다음과 같은 생각을 통하여 모순이 발견되는 부분을 찾았다.

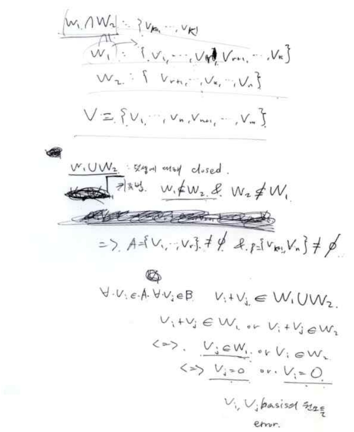
참여자 4 : W_1이 W_2에 속하지 않는다라는 것은 W_2에 속하지 않는 근간을 W_1이 갖는다라는 소리고 여기($W_2 \not\subset W_1$)에서도 W_2가 W_1에 속하지 않는다라는 것은 W_1에 속하지 않은 근간을 하나는 갖는다. 그래서 이런 식으로 일반화를 할 수가 있을 거 같아요.

연구 참여자 4는 부분 공간을 기저와 연결하여 생각하였는데, 서로 포함 관계가 성립하지 않는다는 결론의 부정으로부터 다른 세 연구 참여자들은 $W_1 - W_2$와 $W_2 - W_1$ 각각에 벡터가 존재한다고 제시한 반면, 연구 참여자 4는 W_1과 W_2의 기저의 원소 중에 다른 것이 있다고 생각을 하였다. 이러한 생각을 W_1과 W_2를 [그림 Ⅳ-6]와 같이 표현하였다.

[그림 Ⅳ-6] 연구 참여자 4가 증명을 하기 전에 작성한 내용

그리고 W_1과 W_2의 기저의 원소를 각각 W_1에만 있는 것과 $W_1 \cap W_2$에 있는 것, W_2에만 있는 것과 $W_1 \cap W_2$에 있는 것으로 총 세 부분으로 나누었다. 각 부분에서 기저의 원소들을 하나씩 꺼내어 조합해서 더한 것이 $W_1 \cup W_2$에 다시 들어가기는 어렵다는 것을 생각하여 본인이 $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이 되기 어려울 것이라는 본인의 생각을 구체화하였다. 그리고 문제가 되는 부분이 W_1에만 있는 기저의 원소와 W_2에만 있는 기저의 원소라는 것을 더했을 때라는 것을 찾아냈다.

연구 참여자 4는 이러한 생각을 기반으로 [그림 Ⅵ-7]의 증명을 작성하였다.



[그림 Ⅳ-7] 연구 참여자 4의 증명

증명을 작성하기 전에 연구 참여자 4가 생각한 모순이 일어나는 상황은 증명의 전반부를 전개하는 데 이용이 되었다. W_1과 W_2를 기저를 이용하여 표현하고, W_1에만 있는 기저의 원소와 W_2에만 있는 기저의 원소를 선택하여 증명을 전개해 나갔다.

그런데 증명 안에서 모순을 일으키는 과정은 연구 참여자 3의 경우와 마찬가지로 “두 벡터의 합이 $W_1 \cup W_2$에 들어가지 않는다”라고 직관적으로 판단을 내렸던 생각만으로는 전개되기 불충분하다. 모순이 일어나는 과정이 증명 안에서는 구체적으로 작성될 필요가 있지만, 이 부분은 연구 참여자 4의 직관적인 해석에서는 나타나지 않는 내용이다. 따라서 증명 이전의 사고에서는 성립하지 않았던 $v_i + v_j \in W_1 \cup W_2$가 실제 증명

<표 Ⅳ-3> 각 연구 참여자들의 증명 과정

	참여자 1	참여자 2	참여자 3	참여자 4
계획 수립	유사한 명제에 대한 증명 경험	명제의 구조 + 증명 방법	$\mathbb{R}^3$ 공간에서 $\sim q$를 표현, 그림에서 모순이 되는 부분 발견	"구조"라는 관점에서 명제의 의미 파악, 모순이 되는 부분을 기저를 이용하여 발견
증명 방법	귀류법	직접 증명	귀류법	귀류법
증명 전개	절차적 지식 (식의 조작 방법) + 형식적 개념	분석법 (결론의 충분조건 탐색) + 형식적 정의	모순을 일으키는 상황을 증명의 표현 양식에 맞게 표현 + 구문론적 증명으로 모순 유발	모순을 일으키는 상황을 증명의 표현 양식에 맞게 표현 + 구문론적 증명으로 모순 유발
증명 구성 방식	구문론적 증명		의미론적 증명	

에서는 $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이기 때문에 연역되므로, 이를 이용하여 모순을 일으키는 과정은 증명을 완성하기 위해 또 다시 생각해야 될 부분이다. 연구 참여자 4도 연구 참여자 3과 유사하게 이러한 증명의 후반부 내용을 모순 유발이라는 목표를 위하여 합집합의 정의와 부분 공간의 정의를 이용하여 구문론적으로 해결하였다.

정리하면, 연구 참여자 4는 기존에 알고 있는 명제 " 두 부분 공간 W_1, W_2에 대하여, $W_1 + W_2$는 부분 공간이다"에 대하여 주어진 부분 공간을 가지고 만든 집합이 부분 공간이 되기 위해서는 연산 구조를 이용하여 만든 집합이어야 된다는 본인의 해석을 가지고 있었다. 이는 부분 공간 사이의 결합에 대하여 연구 참여자 4가 가지고 있는 개념 이미지라고 볼 수 있으며, 부분 공간의 형식적 정의로부터 연역된 명제를 통해 형성되었음을 알 수 있다. 부분 공간에 대한 명제를 통해 형성된 이해를 바탕으로 명제의 내용을 살펴보았으며, 그 결과 $W_1 \cup W_2$가 부분 공간이라는 가정이 일반적으로 성립하지 않는다는 것에 착안하여 귀류법으로 증명을 하려는 계획을 세웠다.

형식적으로 증명하기에 앞서 연구 참여자 4는 모순을 유발하는 상황을 직관적으로 발견한다. 이는 연구 참여자 3과 유사한 증명 구성 과정이며, 이러한 점에서 두 연구 참여자의 증명 모두를 의미론적 증명으로 분류할 수 있었다. 그러나 연구 참여자 3의 경우에는 주로 사용하는 증명의 아이디어 구성 전략 자체가 일단 결론이 부정된 상황을 $\mathbb{R}^3$ 공간에서의 예를 그림으로 표현하여 탐구하는 것이고 여기서 이루어진 사고를 증명에 반영하기 위하여 귀류법을 이용한 반면, 연구 참여자 4의 경우에는 명제의 가정이 일반적으로 성립하지 않는 경우이기 때문에 쉽게 모순을 유발할 수 있을 것이라는 생각을 기반으로 결론이 부정된 상황을 생각한 것이다. 또한 이에 대한 탐구 역시 특정한 예 대신 기저를 이용하여 주어진 부분 공간을 표현하여 부분 공간을 일반적인 수준에서 기술했다는 점에서 차이가 있다.

지금까지 각 연구 참여자들이 과제로 주어진 명제들을 증명하는 과정을 살펴보았다. 이를 종

합하여 학생들이 명제를 어떻게 증명하는 지를 살펴보고자 하는 연구 문제 2에 대한 연구 결과를 정리하면 위의 <표 Ⅳ-3>과 같다.

3. 개념 이해와 증명의 구성 간의 관계

이 절에서는 연구 결과에서 나타난 각 연구 참여자들의 개념 이해와 증명 구성 과정을 연결하여 그 관련성을 찾고, 학생의 개념 이해가 증명 구성 과정에 어떻게 반영이 되는 지를 중심으로 그 결과를 제시하려고 한다.

아래 <표 Ⅳ-4>~<표 Ⅳ-7>는 각 연구 참여자들의 개념 이해와 증명 구성 과정을 하나의 표로 정리한 것이다. 우선 연구 참여자 1의 개념 이해와 증명 구성 과정을 <표 Ⅳ-4>에 정리하였다.

연구 참여자 1은 개념의 정의와 관련된 동치 명제들을 언급할 때 증명에 잘 이용되는 동치 명제를 제시한 특성이 있었다. 이는 증명을 구성할 때에도 개념 이미지의 참조 없이 형식적 개념을 이용한 증명을 가능케 하였고 증명의 계획이나 전개가 빠르게 이루어질 수 있도록 하였다. 특히, 증명을 전개할 때 이용된 절차적 지식은 형식적 개념이 증명에 잘 이용될 수 있도록 하는 역할을 한다. 이 사례로부터 학생 스스로가 인지 부하를 덜 느끼는 자동적인 증명 구성을 위해서는, 증명에의 이용과 연결된 형식적 개념, 그리고 절차적 지식이 필요함을 알 수 있다. 개념에 대하여 비유적인 표현을 가진 연구 참여자 1의 개념 이미지의 특성은 증명에 큰 영향을 미치지 못하였다.

<표 Ⅳ-5>에서는 연구 참여자 2의 개념 이해와 증명 구성을 함께 살펴볼 수 있다. 연구 참여자 2도 연구 참여자 1과 마찬가지로 증명에의 이용에 초점을 맞추어 형식적 개념을 알고 있다.

<표 Ⅳ-4> 연구 참여자 1의 개념 이해와 증명 구성 과정

<table>
<tr><th colspan="2">개념 이해</th><th rowspan="2">증명 구성(구문론적)</th></tr>
<tr><th>형식적 개념</th><th>개념 이미지</th></tr>
<tr><td>· 증명에 유용한 내용을 정의로 택함
· 증명, 문제 풀이와 연결하여 동치 명제를 기억함
· 부분 공간의 의미(부분 집합이면서 벡터 공간)를 알고 받아들임</td><td>· 수학 기호로 표현된 형식적 개념을 본인의 말로 서술
· 비유적인 표현
· 다이어그램(비언어적)</td><td>· 증명의 계획 수립
: 유사한 명제에 대한 증명 경험

· 증명의 전개
: 형식적 개념과 절차적 지식(식의 조작)의 이용</td></tr>
</table>

<표 Ⅳ-5> 연구 참여자 2의 개념 이해와 증명 구성 과정

<table>
<tr><th colspan="2">개념 이해</th><th rowspan="2">증명 구성(구문론적)</th></tr>
<tr><th>형식적 개념</th><th>개념 이미지</th></tr>
<tr><td>· 부분 공간의 의미(부분 집합이면서 벡터 공간)를 알고 받아들임</td><td>· 수학 기호로 표현된 형식적 개념을 본인의 말로 서술
· $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$공간에서의 예
· 개념에 대한 $\mathbb{R}^3$에서의 예를 그림(비언어적)</td><td>· 증명의 계획 수립
: 명제의 구조와 관련된 증명 방법

· 증명의 전개
: 형식적 정의와 분석법</td></tr>
</table>

<표 Ⅳ-6> 연구 참여자 3의 개념 이해와 증명 구성 과정

개념 이해		증명 구성(의미론적)
형식적 개념	개념 이미지	
· 부분 공간의 의미(부분 집합이면서 벡터 공간)를 알고 받아들임	· 수학 기호로 표현된 형식적 개념을 본인의 말로 서술 · $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$공간에서의 예 · 개념에 대한 $\mathbb{R}^3$에서의 예를 언어적인 개념 이미지와 함께 그림으로 표현	· 증명의 계획 수립 : $\sim q$를 $\mathbb{R}^3$ 공간에 표현, 모순점 발견 · 증명의 전개 : 모순을 일으키는 상황을 형식적으로 표현, 구문론적 증명으로 모순 유발

이는 증명을 구성할 때 형식적 정의를 이용하여 분석법을 쓰는 기반이 됨을 알 수 있다. 또한 개념 이해 이외에도 명제의 구조를 파악하여 증명하는 증명 방식을 추가적으로 알게 됨으로써 증명 구성이 가능하였다. 한편, 연구 참여자 2의 개념 이미지는 주로 형식적 개념을 본인의 말로 풀어서 설명하는 언어적인 표현이 많았고, 비언어적 표현은 부분 공간의 한 예를 그림으로 표현하는 데 그쳤다. 이와 같은 연구 참여자 2의 개념 이미지 역시 연구 참여자 1의 개념 이미지와 마찬가지로 증명에는 이용되지 못하였다. 이는 명제를 이해하고 의미론적 증명을 구성이 가능했던 연구 참여자 3과 4의 개념 이미지의 특성을 부각시킬 것이다.

<표 Ⅳ-6>는 연구 참여자 3의 개념 이해와 증명 구성을 함께 제시한 표이다. 연구 참여자 3의 개념 이해는 형식적 개념과 개념 이미지에서 모두 $\mathbb{R}^3$공간에서 개념 이미지들이 연결되고 연결된 개념 이미지들을 일반화 하여 형식적 개념도 형성하고 있다는 특징을 보이고 있다. 이러한 개념 이해와 유사하게 연구 참여자 3의 증명 구성에서도 $\mathbb{R}^3$에서의 시각적인 표현을 이용한 명제 탐구 과정을 볼 수 있다.

앞서 연구 참여자 2의 개념 이미지도 $\mathbb{R}^3$공간에서의 내용을 다수 포함하고 있음을 알 수 있었으나 <표 Ⅳ-16>에서 나타난 연구 참여자 3의 개념 이미지는 $\mathbb{R}^3$공간에서의 설명이나 그림 표현들이 서로 연결된 것이고 그것이 형식적 개념에도 반영이 되기 때문에 증명 구성에도 이용 가능했을 것이라는 추측을 할 수 있다. 연구 참여자 2의 개념 이미지는 형식적 개념에 대한 직관적인 이해, 혹은 형식적 개념에 대한 체화된 세계를 형성하는 데에는 큰 역할을 하지만 이것

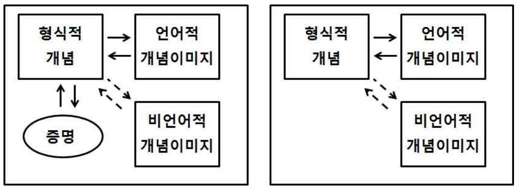
<표 Ⅳ-7> 연구 참여자 4의 개념 이해와 증명 구성 과정

개념 이해		증명 구성(의미론적)
형식적 개념	개념 이미지	
· 부분 공간의 의미(부분 집합이면서 벡터 공간)를 알고 받아들임	· $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$공간에서의 예 · 기저와 연결하여 형성한 내용 · 다이어그램을 기저와 연결된 언어적인 개념 이미지와 함께 표현(비언어적 표현)	· 증명의 계획 수립 : 이전에 배웠던 정리에 부여한 의미로 명제를 파악, 모순이 되는 부분을 기저를 이용하여 발견 · 증명의 전개 : 모순을 일으키는 상황을 형식적으로 표현, 구문론적 증명으로 모순 유발

이 증명과 같은 개념의 적용에 작용하기에는 한계가 있다. 이에 반해 연구 참여자 3은 형식적 개념, 언어적 표현의 개념 이미지, 비언어적 표현의 개념 이미지가 서로 연결되어 있으면서 이들을 이용한 개념 이해가 이루어졌기 때문에 증명 구성에도 시각적 표현을 이용하여 명제를 탐구하여 절차적 지식에 의한 자동적인 증명 구성이 아니라 본인 스스로 증명의 아이디어를 발견할 수 있었다.

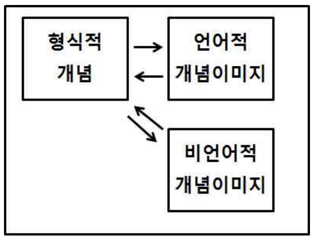
마지막으로 <표 Ⅳ-7>을 통해 연구 참여자 4의 개념 이해와 증명 구성을 함께 살펴보자. 기저와 연결된 부분 공간의 속성, 부분 공간을 보존하면서 부분 공간을 확장하는 방법과 같이 다른 개념과 연결하여 형성된 내용이나 형식적 개념에 대하여 본인이 부여한 의미가 증명의 계획을 수립하는 데 이용되었다.

개념 이해와 증명 구성 과정을 함께 살펴본 위의 연구 결과는 개념을 이해하는 다양한 방식과 증명을 구성하는 방식이 서로 관련되어 있음을 시사한다. 각 증명 구성 방식에 따라 개념 이해의 양상을 도식화하여 정리하면 아래 [그림 Ⅳ-10]~[그림 Ⅳ-11]와 같다. 두 가지 증명 방식의 학생들 모두 개념에 대한 형식적 개념을 정확하게 알고 있었고 언어로 표현된 개념 이미지와 그림 등으로 표현된 비언어적 개념 이미지를 가지고 있었기 때문에 이를 도식화하고 개념 간의 관계를 화살표로 표현하였다. 형식적 개념에서 개념 이미지로 가는 화살표는 형식적 개념의 내용이 모두 개념 이미지에 반영되었을 경우 실선으로, 일부만 반영된 경우 점선으로 표현하였다. 개념 이미지에서 형식적 개념으로 가는 화살표는 명제를 이해하거나 형식적 개념을 학습할 때 이용을 하는 경우 실선으로, 그렇지 않은 경우 점선으로 표현하였다.



[그림 Ⅳ-10] 구문론적 증명을 하는 학생들의 개념

구문론적 증명을 하는 학생 중에는 증명 전개 과정에서 유용하게 쓰일 수 있도록 한 개념에 대한 여러 가지 동치 명제들을 기억하였고, 반대로 특정 개념을 증명하기 위한 접근 방식도 함께 알고 있었다. 이것이 구문론적 증명을 하는 학생들이 개념을 이해하는 주된 방식이다. 언어적 개념 이미지는 형식적 개념의 의미를 담는 내용이었는데, 이는 형식적 개념을 기억할 때에 유용하게 이용되었다. 비언어적 개념 이미지는 형식적 개념의 내용을 다 반영하지는 못하였다. 그리고 이들은 명제가 주어졌을 때 그 내용과 의미를 이해하는 과정에서 비언어적인 개념 이미지를 이용하지는 않았다.



[그림 Ⅳ-11] 의미론적 증명을 하는 학생들의 개념

반면, 의미론적 증명을 하는 학생들은 구문론적 증명을 하는 학생들과 비교해볼 때, 상대적으로 형식적 개념과 개념 이미지가 상당히 연결되어 있다는 특징이 있다. 형식적 개념이 개념 이미지 형성의 배경이 되기도 하고 개념을 기술하는 정의와 동치 명제들 중에 개념 이미지에 의해서 특히 기억을 하고 있는 것들이 존재하기도 하였다. 그리고 언어적 개념 이미지와 비언어적

개념 이미지가 연구에 이용된 모든 개념들에 대하여 존재하였고 이들 사이에는 연결고리가 있었다.

대학 수학에서 형식적으로 기술된 수학적 개념을 내용 그 자체로만 안다고 해서 증명을 잘 할 수 있는 것은 아니다. 수학적 개념을 증명과 관련하여 이해하느냐, 개념 이미지를 형식적 개념과 잘 연결되도록 개발시켜 수학적 개념의 이해를 풍부하게 하느냐에 따라 학생들의 증명 구성 과정도 다르게 일어날 수 있음을 볼 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 사례 연구에서는 증명을 성공적으로 구성하는 학생들은 어떠한 개념을 가지고 있으며, 증명을 어떻게 구성하는 지를 살펴보았으며, 학생들의 증명 방식을 Weber와 Alcock(2009)가 제시한 구문론적 증명과 의미론적 증명의 경우로 구분할 수 있었다. 그리고 각 증명 방식에 따라 학생들이 가지고 있는 개념과 개념 이미지의 특성, 증명 구성 과정을 분석하여 개념 이해와 증명 구성 간의 관련성을 파악하였다.

구문론적 증명을 하는 학생들은 형식적 개념의 내용을 정확하게 알고 있을 뿐만 아니라 그 개념이 담겨있는 명제는 어떠한 방식으로 증명하는 지 그 방법까지 알고 있었다. 실제 증명에서도 평소 증명 경험을 통하여 학습한 증명 전개 방법을 이용하여 증명하는 것을 볼 수 있었으며, 이로부터 증명 방법에 대한 절차적 지식이 구문론적 증명에는 중요한 요소라는 결론을 얻을 수 있었다. 의미론적 증명을 하는 학생들은 형식적 개념의 내용을 정확하게 알고 있고 그 내용과 의미를 본인만의 언어나 그림으로 표현한 개념 이미지를 가지고 있었다. 구문론적 증명을 하는 학생들의 개념 이미지와 비교해보았을 때, 의미론적 증명을 하는 학생들의 개념 이미지는 구문론적 증명을 하는 학생들의 개념 이미지보다 형식적 개념의 내용을 잘 반영하고 있었다. 이러한 개념 이미지는 개념 이미지를 활용하여 증명의 아이디어를 생각하고, 생각한 아이디어를 증명의 형식에 맞게 표현하는 데 사용된다는 점에서 의미론적 증명에 필요한 요소라는 것을 발견할 수 있었다.

구문론적 증명을 구성한 학생들은 증명에의 이용과 연결된 형식적 개념을 보유하였고 의미론적 증명을 구성한 학생들은 형식적 개념과 개념 이미지가 연결된 개념 이해를 하고 있었다. 구문론적 증명을 구성한 학생들의 개념 이미지는 형식적 개념과는 대응이 되지만 내용면에서 형식적 개념을 반영하기에는 한계점이 있었다. 반면, 의미론적 증명을 구성한 학생들의 개념 이미지는 비언어적 표현에 언어적인 표현이 반영되고, 언어적 표현이 형식적 개념을 기반으로 형성된 개념 이미지라는 점에서 명제를 이해하는 데 개념 이미지를 통한 사고가 가능하였다.

그 동안 학생들의 증명 구성을 살펴본 연구들은 증명의 결과물만을 분석하였다. 따라서 학생들의 증명에서 형식적으로 표현되는 내용에 대해서만 탐구되었을 뿐, 증명의 아이디어가 형성되는 과정과 사고 실험에 대한 내용을 심도 있게 탐구하는 연구는 부족하였다. 본 연구에서는 학생들이 증명 구성의 아이디어를 떠올리고 아이디어를 실제 증명으로 옮겨 적는 증명 과정의 전반을 살펴봄으로써 구문론적 증명과 의미론적 증명을 구성할 수 있는 증명 방법과 여기에 필요한 개념 이해의 정도를 구체적으로 찾아낼 수 있었다. 실제로 학생들이 증명 구성의 오류는 많이 탐구되었지만 증명을 성공적으로 구성하는 학생들의 사고 과정을 탐구한 연구는 드물다. 이러한 점에서 본 연구의 결과는 수학자들의 것이 아닌 학생들의 수학 활동을 보여주고 있다. 따라

서 대학생들이 충분히 실행할 수 있는 증명 구성의 과정을 제안할 수 있다. 그리고 증명을 하기 위해서는 단순히 형식적으로 표기된 개념의 내용만을 기억하는 것이 아니라 수많은 증명 경험을 통하여 증명 속에서 이용되는 양상을 알고, 본인의 사고에 이용할 수 있는 형식적 개념의 내용과 의미가 잘 반영된 개념 이미지를 구축할 필요가 있다는 결론을 내릴 수 있다.

선행 연구에서는 구문론적으로 추론하는 기술, 비형식적 추론과 증명의 표현 양식과의 연결이 두 증명 구성 방식을 함께 발달시키기 위해서는 중요하다고 지적하였다(Raman, 2003; Weber & Alcock 2009). 그러면서도 이런 목표들이 어떻게 달성될 수 있을지에 대한 교육학적 질문을 던지면서 후속 연구를 제언하였다. 위와 같은 본 연구의 결과는 이에 대한 답으로 증명을 성공적으로 구성하기 위한 충분조건을 개념 이해의 측면에서 제시하였다는 의의를 갖는다.

참고 문헌

신경희. (2004). 선형대수 교육 과정과 교과서의 변천. **한국수학교육학회지 시리즈 E, 수학교육 논문집, 18**(2), 133-142.

Anton, H. (2004). *Elementary Linear algebra* (9th Ed.). Wiley & Sons, Inc.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants, *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 125-134.

Bogomolny, M. (2007). Raising students' understanding: Linear algebra. In *Proceedings of the 31st PME conference*, Seoul, Korea, 2, 65-72.

Creswell, J. W. (2005). **연구 설계: 정성연구, 정량연구 및 혼합연구에 대한 실제적인 접근**. (강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 역.). 서울: 교우사. (원저 2003 출판)

Easdown, D. (2009). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 40*(7), 941-949.

Harel, G. & Sowder, L. (1998), Students' proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues I Mathematics Education, 7*, 234-283.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Stewart, S. (2008) *Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking*, Unpublished Doctoral Thesis, Auckland University.

Lay, D. C. (2006). *Linear algebra And its Applications* (3rd Ed.). Maryland, Pearson Education.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM, 40*, 265-276.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative research design: An interactive approach*. [2nd Edition.] Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Merriam, S. B. (2005). **정성연구방법론과 사례연구**. (강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 역.). 서울: 교우사. (원저 1998 출판)

Pinto, M. M. F., & Tall, D. (1999) Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 281-288.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?, *Educational Studies in Mathematics, 52*, 319-325.

Stewart, S. (2008) *Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking*, Unpublished Doctoral Thesis, Auckland University.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra, *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 335-346.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge, *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101-119.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions, *Educational Studies in Mathematics, 56*, 209-234.

Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In K. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*(pp. 323-338), New York: Routledge.

An Analysis of Students' Understanding of Mathematical Concepts and Proving

- Focused on the concept of subspace in linear algebra -

Cho, Jiyoung (Seoul Broadcasting High School)
Kwon, Oh Nam (Seoul National University)

The purpose of this study is find the relation between students' concept and types of proof construction. For this, four undergraduate students majored in mathematics education were evaluated to examine how they understand mathematical concepts and apply their concepts to their proving. Investigating students' proof with their concepts would be important to find implications for how students have to understand formal concepts to success in proving.

The participants' proof productions were classified into syntactic proof productions and semantic proof productions. By comparing syntactic provers and semantic provers, we could reveal that the approaches to find idea for proof were different for two groups. The syntactic provers utilized procedural knowledges which had been accumulated from their proving experiences. On the other hand, the semantic provers made use of their concept images to understand why the given statements were true and to get a key idea for proof during this process.

The distinctions of approaches to proving between two groups were related to students' concepts. Both two types of provers had accurate formal concepts. But the syntactic provers also knew how they applied formal concepts in proving. On the other hand, the semantic provers had concept images which contained the details and meaning of formal concept well. So they were able to use their concept images to get an idea of proving and to express their idea in formal mathematical language.

This study leads us to two suggestions for helping students prove. First, undergraduate students should develop their concept images which contain meanings and details of formal concepts in order to produce a meaningful proof. Second, formal concepts with procedural knowledge could be essential to develop informal reasoning into mathematical proof.

Key Words : syntactic proof(구문론적 증명), semantic proof(의미론적 증명), concept definition(개념 정의), concept image(개념 이미지), subspace(부분공간)

논문접수 : 2012. 10. 29
논문수정 : 2012. 12. 3
심사완료 : 2012. 12. 14