대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 4, 409 ~ 429. Dec 2012

수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화

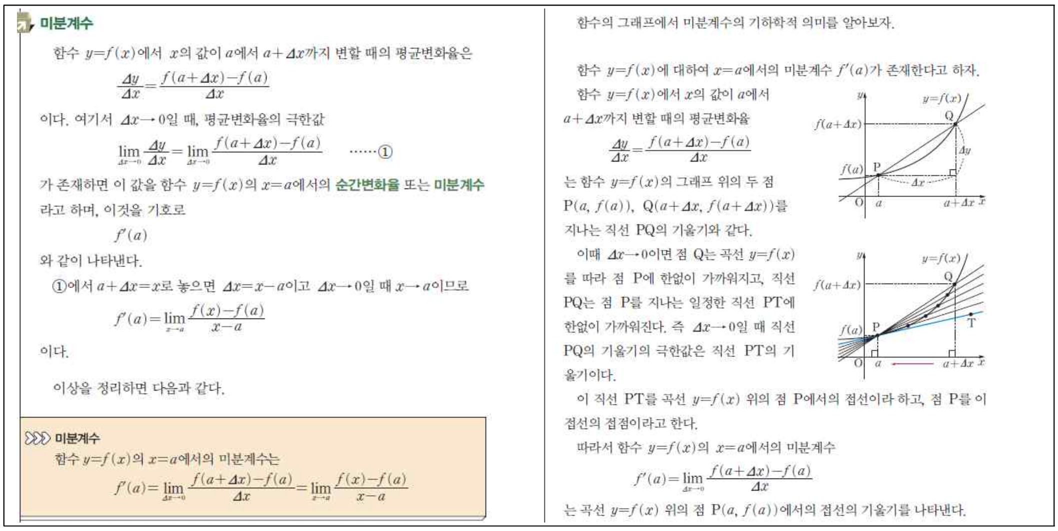
강 향 임*

본 연구의 목적은 학생들이 수학적 모델링 활동을 통해 미분계수를 재발명하는 과정을 분석하여 학교현장의 미분계수 지도에 의미 있는 시사점을 제공하는 것이다. 이를 위해 고등학교 2학년 문과 학생 2명을 대상으로 모델링 과정과 그 과정을 통해 나타나는 수학적 개념 변화를 분석하였다. 그 결과, 학생들은 할선의 극한으로 접선을 재구성하고 접선의 기울기와 순간속도를 연결하기 위해 미분계수를 재발명하였다. 이 과정을 통해 학생들의 접선 개념과 시간-속도 그래프에 대한 개념이 변화되었음을 확인하였다. 본 연구의 모델링 과정에서는 학생들의 시각적인 이해를 돕고, 수학적인 개념을 탐구하는 본질적인 사고에 집중할 수 있도록 테크놀로지를 활용하였다.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

현재 우리나라 7차 개정 교육과정에 따른 ‘미적분과 통계기본’ 교과서에서는 미분계수(순간변화율)를 ‘평균변화율의 극한값이 존재할 때 그 값’으로 정의한 후, 미분계수의 기하학적인 의미



미분계수

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots ①$$

가 존재하면 이 값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라고 하며, 이것을 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

①에서 $a+\Delta x=x$로 놓으면 $\Delta x=x-a$이고 $\Delta x\to 0$일 때 $x\to a$이므로

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수
함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

함수의 그래프에서 미분계수의 기하학적 의미를 알아보자.

함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재한다고 하자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $P(a, f(a))$, $Q(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.

이때 $\Delta x\to 0$이면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 점 P를 지나는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다. 즉 $\Delta x\to 0$일 때 직선 PQ의 기울기의 극한값은 직선 PT의 기울기이다.

이 직선 PT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이라 하고, 점 P를 이 접선의 접점이라고 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

[그림 Ⅰ-1] 황선욱 외(2010)의 미적분과 통계기본 교과서

* 한국교원대학교 대학원, hikang2002@hanmail.net

로 접선의 기울기를 제시하고 있다.

미분계수의 개념은 역사적 근원 중에 하나인 접선 문제를 통해 점진적인 형식화의 과정을 거치면서 발전해 왔다. 이에 따라 미분계수 개념은 그 형식화 과정에서 고려된 기하학적 측면에서 접선의 기울기, 운동학적 측면에서 순간 속도, 대수적인 측면에서 평균변화율의 극한값을 의미하는 등 다양한 측면을 포함한다. 그러나 앞에서 언급한 것처럼 현재 우리나라 교과서에서는 완성된 미분계수 개념을 연역적으로 제시하며 교과서의 순서에 따라 형식적으로 지도되고 있다. 이것은 미분계수의 다양한 측면을 파악하지 못하고 제한된 개념을 갖게 한다. 실제로 미분계수 지도가 대수적으로 강조되고 있기 때문에 많은 학생들이 미분계수를 단지 산술적인 계산으로 유도된 하나의 함숫값으로만 간주하는 것으로 나타났다(김정희, 조완영, 2006; Tall, 1991a; White & Mitchelmore, 1996). 또한 접선을 미분계수의 기하학적인 의미로 연결하지 못하는 것으로 나타났다(Oton, 1980; Tall, 2003a; Vinner, 1982). 이러한 문제점들을 개선하기 위해 특별한 교수학적 처방이 필요함을 알 수 있다.

미분계수의 교수-학습에 관한 연구들은 역사발생적 원리(박문환, 민세영, 2002; 송정화, 신은주, 2006; 정연준, 2010; Freudenthal, 2008; Toeplitz, 2006), 테크놀로지(손홍찬, 2004; Kaput, 1994; Tall, 1991b, 2003a, 2003b; Thomson, 1994; Weber, Tallman, Byerley, & Thompson, in press) 또는 모델링(Gravemeijer & Doorman, 1999)의 활용 등을 제안하고 있다. 그러나 이러한 연구들은 학생들에게 적용한 실제적인 사례를 제공하지 않고 있다. 단지 Doorman과 Gravemeijer(2008, 2009)가 현실 문제(예, '태풍의 속도)에서 다양한 그래프(자취 그래프, 변위 그래프, 이동 거리 그래프 등)를 활용하여 움직이는 대상의 속도를 질적으로 추론하는 학생들의 모델링 과정을 제공한 사례가 있으나 이 연구도 미적분과 운동학을 연결하는 중재자로서 그래프의 역할을 강조하였을 뿐 미분계수를 구체적으로 표현하거나 설명하는 과정을 분석하지는 못하였다.

따라서 본 연구에서는 개념의 형성 과정을 경험할 수 있는 모델링 활동을 통해 학생들이 미분계수 개념을 재발명할 수 있도록 돕고자 한다. 이를 위해 역사적으로 미분의 발생 맥락인 속도 문제를 개발하고 고등학교 2학년 문과 학생 2명을 대상으로 다음과 같은 연구 문제를 설정하여 분석할 것이다.

[연구문제 1] 수학적 모델링 활동에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수 재발명 과정은 어떠한가?

[연구문제 2] 수학적 모델링 활동을 통해 나타나는 학생들의 수학적 개념(접선, 시간-거리와 시간-속도 그래프 사이의 관계) 변화는 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 접선과 미분계수 교수-학습에 관한 선행연구

미적분을 학습한 많은 학생들은 미분계수의 개념적인 이해보다는 대수적인 절차만을 기억하고 있기 때문에 현실 문제를 해결하기 위해 미적분을 활용하는 것에 어려움을 경험한다(Tall, 1992; White & Mitchelmore, 1996). 이러한 문제를 개선하기 위해 개념의 역사 발생 과정을 반영할 수 있는 역사 발생적 원리의 활용(박문환, 민세영, 2002; 송정화, 신은주, 2006)과 변하는 현상의 역동성을 수치적이고 기하적으로 표현할 수 있는 테크놀로지의 활용(손홍찬, 2004; Kaput, 1994; Tall, 1991b, 2003a, 2003b; Thomson, 1994)은 의미가 있다.

우선, 역사 발생적 원리의 활용은 미분계수의 발생적 접근을 통해 점진적인 수준의 상승을 안내할 수 있고 미분계수의 역사적 발달 과정의 분석을 통해 잠재적 장애 요인을 예측(정연준, 2010)할 수 있도록 돕는다. 이는 미적분의 역사적 발달 과정과 개인의 인식론적 발달 과정 사이에 약간의 평행성이 있기 때문이다(Cornu, 1991; Ely, 2007; Kaput, 1994; Lakoff & Nunez, 2000; Sfard, 1991).

미분계수의 교수-학습에 활용할 수 있는 테크놀로지로는 변하는 현상을 해석하는데 수치적 접근을 가능하게 하는 Excel(손홍찬, 2004)이나 속도-거리에 관한 다양한 문제 상황을 다룰 수 있는 simCalc Project(Kaput, 1994), 무한소 개념에 기초하여 직관적인 이해를 돕기 위해 개발된 Graphic Calculus 프로그램(Tall, 1991b, 2003a, 2003b) 등이 있다. 이러한 테크놀로지의 활용은 미분계수의 교수-학습에서 구체적인 상황의 직관적인 이해를 위한 보조 역할을 할 수 있다.

최근 무한소 개념을 적극 활용하도록 도와야 한다는 입장에서 Calculus Triangle 개념(Weber, Tallman, Byerley, & Thompson, in press)이 제안되었다. Calculus Triangle 개념은 Graphic Calculus 프로그램에 적용된 국소적 직선(local straightness) 개념을 보완하여 변하는 두 양 사이의 비를 명확히 드러내고자 미분계수 개념이 접선의 기울기로 형성되기 보다는 변하는 두 양 사이의 관계에 대한 비율 개념으로 전이되어야 한다고 강조하고 있다. 그러나 무한소 측면에서 두 양 사이의 관계에 대한 비율 개념만을 강조하는 것은 할선의 극한인 접선을 미분계수의 기하학적 측면으로 연결하는데 어려움을 갖게 한다. 이것은 접선의 초기 개념이 적절히 재구성되지 않는다면 미분계수와 연결하지 못한다(Amit & Vinner, 1990; Orton, 1980, 1983; Thompson, 1994; Ubuz, 2001; Vinner, 1982; Zandieh, 2000)는 주장과 양립될 수 있다. 무한소 개념은 미분계수의 직관적인 이해를 위해 도움을 줄 수 있지만 미분계수를 개념적으로 이해하고 재발명하도록 돕는 것에는 한계가 있다.

사실 미분계수를 개념적으로 이해한다는 것은 미분계수가 포함하는 다양한 측면을 인식하고 문제 상황에 적용할 수 있는 것이다. 따라서 역사 발달 과정의 접선 개념에 대한 역동성(조영미, 1999)을 바탕으로 테크놀로지를 활용한 반성, 수정, 개선의 학습 경험(임재훈, 박교식, 2004; 안병국, 김병학, 박윤근, 2010)을 제공하여 상위 학년으로 진학하면서 점진적으로 수준의 상승을 요구하는 접선 개념의 재구성 과정을 통해 자연스럽게 미분계수를 재발명하도록 해야 한다.

미분계수 개념 구성을 위한 교수-학습 전략으로는 속도 맥락을 기반으로 한 수학화가 활용되고 있다. 그 예로, Freudenthal의 수학화 과정과 Dienes의 다양성 이론을 토대로 미적분 교수 학습 자료를 개발한 연구(조완영, 2006)와 수학화를 기반으로 교사의 교수법을 위해 제안된 emergent modeling 발견술에 관한 연구(Doorman & Gravemeijer, 2008, 2009)가 있다. emergent modeling 발견술은 운동학적인 측면에서 실생활 맥락과 테크놀로지를 동시에 고려한 연구로서 주어진 상황을 나타내는 그래프를 질적으로 추론하거나 현실 문제를 해석하는 모델링을 제안한 것으로 미분계수 개념에 대한 구체적인 학생들의 결과를 분석하지는 못하였다.

지금까지 살펴 본 많은 연구들은 대체로 미분계수의 개념 이해를 위해 맥락(발생맥락, 현실맥락)의 중요성과 테크놀로지의 활용을 제안하였다. 그러나 실제적인 실험으로 연결되어 학생들의 활동 과정을 언급한 연구는 Doorman & Gravemeijer(2008, 2009) 뿐이며 미분계수 개념의

직접적인 개념 구성 활동을 분석한 실험 연구는 거의 없는 실정이다. 이에 미분계수의 역사적 발생 맥락을 고려한 수학적 모델링 활동에서 학생들이 실제적으로 어떠한 과정과 변화를 경험하는지 살펴보는 것은 수학교육의 관점에서 의미 있는 연구가 될 것이다.

2. 접선과 미분계수 역사적 발달 과정

현재까지 수학사적인 측면에서 미분계수 개념의 발달 과정에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다(정연준, 2010; Boyer, 1959, 1968, 1976; Boyer & Merzbach, 2010, 2011; Edwards Jr, 1979, 2012; Eves, 1960, 2005; Toeplitz, 2006). 이 연구들에 따르면, 기원전 3세기 이전에 Aristoteles는 실무한을 받아들이지 않았기 때문에 변화의 순간적인 비에 관해 물체의 움직임에 대한 순간속도$\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$를 부인하고 평균속도$\left(\dfrac{\triangle s}{\triangle t}\right)$만을 받아들였으며(Boyer, 1959, p43), Euclid는 정적 기하(static geometry)의 측면에서 원과 한 점에서 만나는 직선을 접선이라 정의하였다(Boyer, 1959, p57). 이때까지 미분계수의 기하학적 의미로서 접선은 정적인 측면에서 원과 한 점에서 만나는 직선으로 간주되었다. 이후 BC 3세기 Archimedes는 나선(spiral)을 연구하는 가운데 운동학적인 측면에서 곡선에서 그은 접선을 발견하였다(Boyer & Merzbach, 2010, p204-205). 그러나 기하적인 상황에 맞추어져 있었고 도형에서 수치적인 상황으로의 전이는 일어나지 않았다. 이후 운동의 측면에서 순간의 속도를 이해하기 위해서는 0에 가까워지는 두 양 사이의 관계를 설명해야 하는 미분의 문제 상황에 놓이게 되었다. 17세기 전반에 이르러 Fermat와 Descartes에 의해 해석기하학의 관점에서 접선이 다루어 졌다. Fermat는 假-동등 방법(Pseudo-equality Methods)을 통해 $y=f(x)$ 형태의 다항식의 곡선에서 극대점 및 극소점의 좌표를 얻었다(Boyer, 1968, p382-383; Edwards Jr, 1979, p122). 이 과정은 식

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$$

이 $x=a$에서 곡선 $f(x)$의 기울기라는 사실을 나타내는데 Fermat는 무한소 측면에서 접근한 이 과정을 충분히 설명하지 않았다(Boyer & Merzbach, 2011, p568). 비슷한 시기에 Descartes는 곡선의 접선을 작도하는 흥미 있는 방법을 고안했다(Eves, 1960, p280). 그러나 대수학적 관점에서 중근 아이디어를 활용한 원 방법(Circle Method)을 사용했지만 Fermat의 방법에 비해 번거로웠다(Boyer & Merzbach, 2011, p560). 미적분 발명의 시기로 일컫는 17세기 후반, Newton과 Leibniz는 비 아이디어를 이용하여 미분계수의 기하적 측면과 운동학적 측면, 대수적 측면을 통합하였다(정연준, 2010). 그러나 Newton과 Leibniz 등에 의해 무한소 관점에서 비 아이디어를 기반으로 곡선을 따라 움직이는 순간적인 운동과 접선 개념이 연결될 수 있었지만 무한소의 과정에서 계산을 가능하게 하는 기본 개념의 해석이 분명하지 않았다(Boyer, 1976, p394-396). 결국 무한소 개념을 대신할 극한 개념이 18세기 후반 d'Alembert에 의해 시도 되었다. 그는 순간속도의 개념을 차분의 극한 개념과 연결하고자 노력하였으며, 비록 극한의 개념을 명확하게 설명할 수는 없었지만 미분을

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

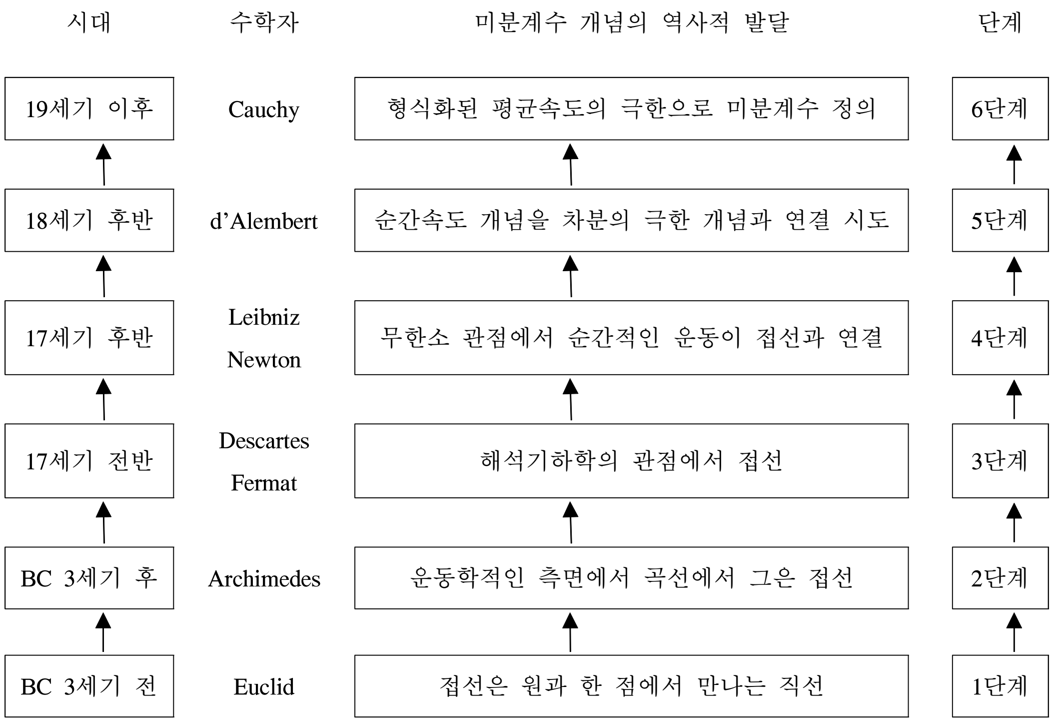
라 표현하였다(Edwards Jr, 1979, p293-296). 이어 19세기 이후 Cauchy는 d'Alembert의 극한 개념을 더욱 명확히 하고자 무한소 개념을 '변수'로서 정의하고 극한 개념을 기본으로 미적분학을 전개하였다. Cauchy에 의해 극한 개념이 명확하게 정의되면서 미분의 개념에서 무한소를 제거할 수 있게 되었고 미분계수의 개념도 형식화된 평

균속도의 극한으로 정의될 수 있게 되었다. Cauchy는 먼저 x에 관한 $y=f(x)$의 미분을 정의할 때에 변수 x의 증분 $\Delta x = i$를 부여하여 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

를 만들고 i가 0에 한없이 가까이 갈 때 이 차의 몫의 극한을 x에 관한 y의 도함수 $f^{'}(x)$로 정의하였다(Boyer & Merzbach, 2011, p835-836). 이것은 오늘날 우리가 사용하고 있는 개념과 거의 같으며 이러한 개념은 19세기 전체에 걸쳐 계산적인 식과 함수가 관련되거나 독립적으로 발전하였다(Toeplitz, 2006). 위에서 살펴본 바와 같이 미분계수는 그 형성 과정에서 대수적, 기하적, 운동학적 관점 포함하면서 발달해 왔다. 따라서 학생들에게는 이렇게 다양한 관점을 서로 구분지어 차이를 분명히 하는 것 보다는 통합된 관점에서 상호 관련지어 제시되는 것이 더욱 효율적일 것이다.

지금까지 접선과 미분계수의 교수-학습을 위한 선행연구와 미분계수의 역사적 발달 과정을 통해 역사 발생적 원리, 테크놀로지의 활용 및 모델링의 활용이 미분계수 지도에 의미가 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 점진적인 수준의 상승이 요구되는 고등 수학적 개념으로서 접선을 재구성함으로써 미분계수 개념을 재발명하는 모델링 과정을 분석하고 미분계수의 역사적 발달 과정과 학생들의 접선 개념의 재구성 과정에 의한 수학적 개념 변화를 비교 분석한 연구는 없었다. 이에 본 연구는 미분계수 개념의 발생 맥락을 활용한 수학적 모델링 활동을 제안하고 학생들의 모델링 활동 과정과 그 과정을 통해 나타나는 수학적 개념 변화를 분석해 보고자 한다.



[그림 Ⅱ-1] 미분계수의 역사적 발달 과정

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

연구에 참여한 학생은 D시에 소재한 A고등학교 문과반 2학년 남학생 1명과 여학생 1명으로 학업성취도는 모두 상 수준이고 서로 친분이 있으며 그들은 각각 수학에 자신감이 없다고 표현하였다. 학생들의 학교 진도는 함수의 극한을 배운 직후이며 2학기 중간고사 시험을 앞두고 있어 학교 진도가 멈춘 지 1주일이 지난 상황이었다. 학생들이 중간고사 시험을 앞두고 있어 실험에 긴 시간을 투자할 수 없었고 시험이 끝나면 곧바로 미분을 배우기 때문에 짧은 기간 동안 최소의 시간으로 실험이 이루어져야 했다. 사교육을 받지 않는 학생들로 아직 미분법은 배우지 않은 상태였다. <부록 2>사전 검사지의 결과에서 두 학생은 모두 주어진 일차함수와 이차함수의 그래프를 정확히 그렸고 접선의 의미에 대해서 남학생은 원 위의 한 점을 지나는 직선으로 여학생은 곡선에 스치면서 지나는 직선으로 알고 있었다. 본 연구에서는 학생들을 1학년에서 가르쳤던 수학 교사가 함께 참관하였다. 연구에 참관한 교사는 교직 경력이 4년으로 테크놀로지를 활용한 수업에 관심은 있으나 학생들과 마찬가지로 테크놀로지를 직접 사용해 본 경험이 없는 상태였고 테크놀로지를 활용한 수업에 대해 많은 관심을 갖고 있으며 실제 수업에 적용하고 싶어 했다. 본 연구에서 실험은 교사의 진행으로 이루어질 것을 계획하였으나 교사가 촬영에 대한 부담감으로 실험 진행을 포기하고 싶어 했기 때문에 실험 과정에 참관하는 것으로 변경했다. 실험 동안 교사는 모델링 활동에 직접적인 영향을 주지 않았으며 학생들의 고민의 시간이 길어지면 격려하는 정도의 역할을 수행하였다.

2. 맥락문제 개발

본 연구에서는 미분계수의 역사적 근원인 속도 문제가 포함된 맥락문제와 수치적, 기하적, 대수적 표현을 동시에 고려할 수 있는 수학 소프트웨어 GeoGebra를 활용하였다. 특별히 맥락문제는 현 교육과정에 따른 학교수학에서 50분 수업 1차시에 해당하는 미분계수 지도에 활용될 수 있도록 모델링 과제나 맥락문제에 관한 선행연구의 분류(신현성, 2001; 정영옥, 2004; de Lange, 1999)를 참고하여 개발하였고, 현직 교사 5명과 수학교육과 교수 1명으로 총 6명의 검토가 이루어졌다.

<부록 3>학생 활동지의 맥락문제에 활용된 지도는 실험에 참가할 학생들의 현실을 고려하여 D시의 잘 알려진 공원을 선택하였으며 인터넷 지도를 캡쳐하여 활용하였다. 맥락문제의 문제(1)에서 특별히 세 번째 구간을 제시한 이유는 공학을 활용하여 그래프를 그렸을 때, 중앙에 그려질 부분으로 학생들이 그래프를 다루는데 편리할 것이라고 생각했기 때문이다. 특히, 맥락문제는 5차 곡선 모델을 구성하여 모델링 활동을 전개하도록 개발하였다. 그 이유는 2차나 3차와 같은 낮은 차수의 다항식은 학생들이 필산(연필로 식을 세우거나 계산)으로 해결하려는 습관을 벗어나지 못해서 연구의 본질적인 목적에 도달하기 힘들 것이라고 생각했기 때문이었다.

3. 연구절차

본 연구는 고등학교 학생들은 실험을 위해 많은 시간을 허락되지 않는 내외적인 문제들을 가지고 있기 때문에 11월 4일 금요일과 11일 금요일에 2주에 걸쳐 두 번의 수업이 이루어 졌고 정규수업이 끝나고 저녁 식사 후 야간 자율학습 시간을 활용하였다. 예비 수업 110분과 본 수업

110분의 수업으로 총 220분의 수업이 이루어졌다. 한 차시 수업이 110분인 이유는 50분 수업 2시간과 중간에 10분 쉬는 시간을 연결했기 때문이다. 장소는 방과 후에 학교 수학교과교실에서 실시되었으며 2명의 학생이 1대의 노트북을 함께 사용하고 활동지는 각자 사용하였다. 학생과의 첫 만남은 저녁 식사를 하면서 자연스럽게 이루어졌고 첫 주의 예비 수업 110분 동안에는 <부록1>사전 질문지와 <부록2>사전 검사지를 작성하고 난 후 본 수업에 사용할 Geogebra를 조작하는데 어려움이나 거부감을 줄이고자 여러 가지 기능들을 설명하고 조작해 보는 활동을 하였다. 활동 중에는 '두 점을 지나는 직선 그리기', '점 만들기(스프레드시트 자료를 기하창의 점으로 나타내기)', '최소제곱다항식(기하창의 점에 적합한 다항식 그래프 나타내기)으로 그래프 그리기' 등이 있다. 본 수업 110분 동안에는 <부록3>학생 활동지를 활용하여 모델링 활동이 이루어 졌고 약 47분간의 모델링 활동이 끝난 후 학생들은 <부록4>사후 검사지의 여러 가지 시간-거리 그래프를 질적 추론을 통해 시간-속도 그래프로 나타내어 보고 GeoGebra를 통해 확인해 보았다. 이후 <부록5>사후 질문지를 작성하였다.

4. 자료수집

학생과의 개별 인터뷰는 학생들의 동의를 얻어 녹음하였고 학생들의 사전-사후 질문지, 사전-사후 검사지, 활동지와 연구자의 기록노트를 수집하였다. 또한 수업의 전 과정은 video를 통해 녹화되었고 학생들의 수업 장면과 GeoGebra 조작 과정은 camtasia 프로그램을 통해 화면과 음성을 파일로 저장하였으며 본 수업에서 학생들의 담화내용은 전사되어 자료로 정리하였다.

Ⅳ. 연구결과 및 논의

본 장에서는 수학적 모델링 활동에서 접선 개념의 재구성을 통해 미분계수를 재발명하는 과정과 이 과정을 통해 학생들에게 나타나는 수학적 개념 변화를 기술한다. [발췌문의 각 대화내용 앞에 숫자는 전사 자료의 번호임]

1. 수학적 모델링 활동에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수 재발명 과정은 어떠한가?

본 수업을 위해 학생들에게 맥락문제(<부록3>학생 활동지)가 주어졌을 때 남학생은 맥락문제에 대해 충돌에 따른 속도 변화를 고려해야 하는지[76, 78], 지도에 그려진 꺽인 선으로 보이는 길을 직선으로 변환할 수 있는지[80, 84]에 대해 분명하지 않았다. 그러나 연구자에게 질문하면서 적절히 해석해 나아갔다.

[발췌문 1] 맥락문제 해석하기

76 남학생: 선생님~ 이게 충돌하면서 속력을 속력이 0으로 떨어진다고 계산해야 되요?

77 연구자: 아뇨 충돌하면서 그냥 지나간다.

78 남학생: 지나가는 거예요? 속력변화는 상관없이...

.........(생략)

80 남학생: (<부록3>학생 활동지의 지도를 가리키며)점들을 표시할 때요......기울기 같은 거 상관없이 그냥 일자로 만들어도 되나요?

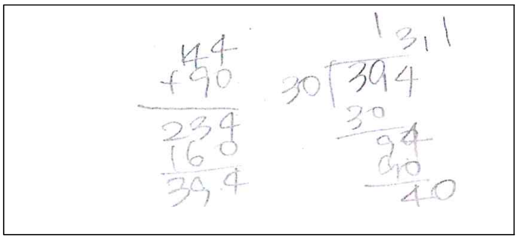
81 연구자: 무슨 말 일까요?

82 남학생: 그러니까 이게 실제로 이렇게 이렇게 이렇게(<부록3>학생 활동지에 있는 지도의 커브 길을 가리키며) 막 꺾여지는 데가 있잖아요.

83 연구자: 네

84 남학생: 이런 거를 그냥 잡고 이렇게 직선으로 찍~직선으로 만들어도 되요? 길이는 똑같이 하고...

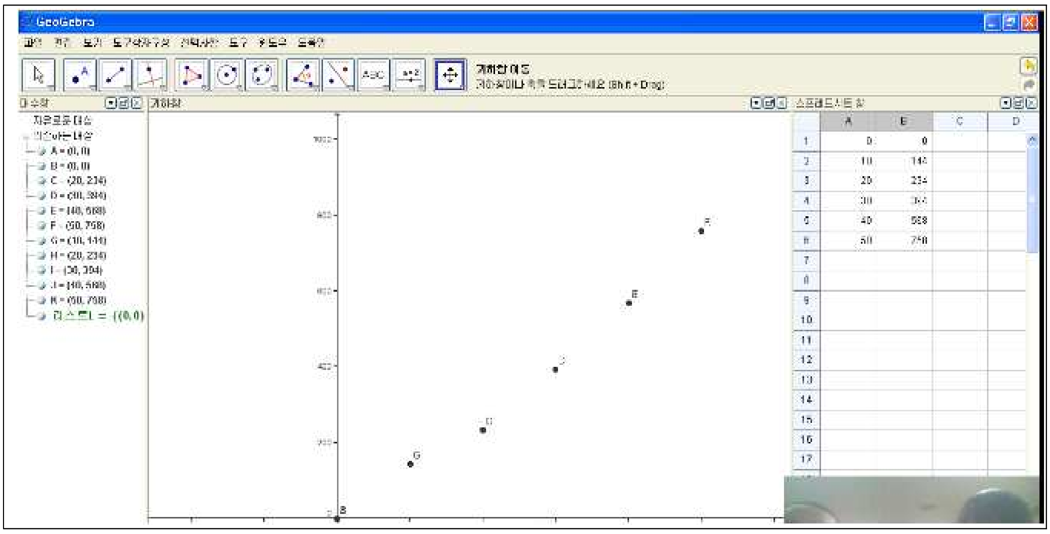
두 학생은 출발점부터 5곳의 위치에 대하여 시간과 거리를 확인하고 문제(1)의 세 번째 구간의 평균속도를 구하기 위해 시간과 거리의 차의 변화를 고려하여 스프레드시트에 시간과 거리를 입력했으나 첫 번째, 두 번째, 세 번째 구간 전체 거리의 합 394m를 30초로 나누어 답을 구했다[그림 Ⅳ-1].



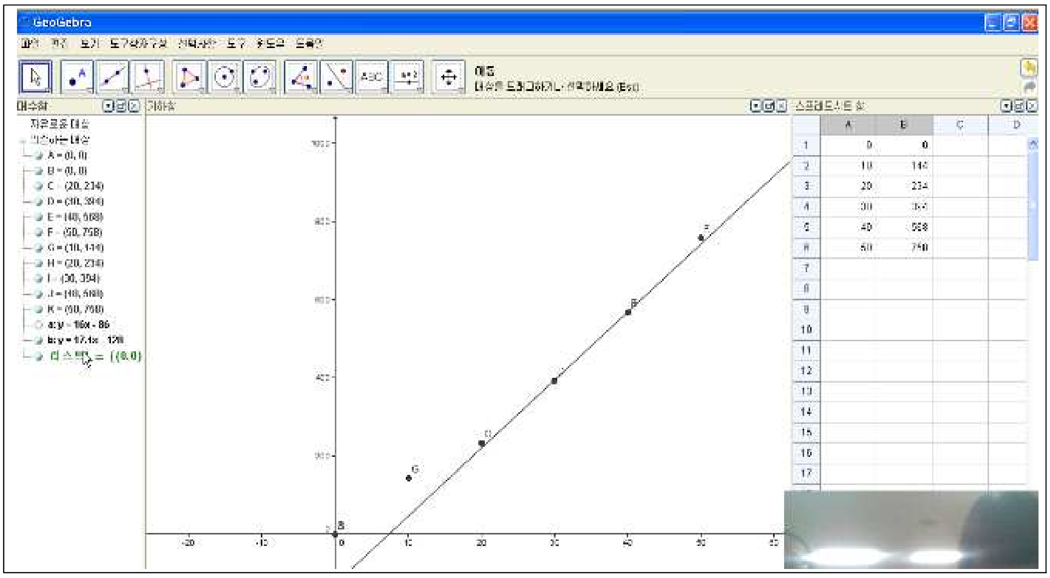
[그림 Ⅳ-1] 여학생이 해결한 문제(1)의 오답

연구자가 컴퓨터를 활용하여 확인해 볼 것을 제안하자, 학생들은 '점 만들기' 기능을 이용하여 스프레드시트의 자료를 기하창에 점으로 만들었다. 학생들에 의해 처음 기하창에 나타난 점들은 x축과 y축의 비가 1:1 이었기 때문에 흩어진 구조를 전체적으로 볼 수 없었고 연구자의 조언으로 축의 비를 1:20으로 변화시켜 흩어진 점들을 한 화면에 나타낼 수 있었다[그림 Ⅳ-2].

점들이 Geogbra의 기하창에 나타나자, 두 점 C, D(세 번째와 네 번째 점)를 지나는 직선의 기울기를 이용하여 문제(1)의 평균속도가 16임을 확인했다. 학생들은 예비 실험에서 직선의 기울기가 평균속도임을 물리 시간에 배웠다고 표현한 바 있었다. 계속해서 학생들은 문제(2)의 네 번째 구간의 평균속도를 먼저 구하기 위해 GeoGebra의 기능을 이용하여 기하창의 점D(네 번째 점)와 점E(다섯 번째 점)를 지나는 직선[그림Ⅳ-3]을 그려 놓고 직선의 기울기인 17.4를 확인한 후 구간DE 사이의 평균속도를 17.4m/s라 기록했다. 곧 학생들은 구간의 평균속도와 같은 순간속도를 갖는 지점을 찾기 위해 '순간속도'의 의미를 고민했고 순간속도는 '순간의 속도'라고 표현하였다. 남학생이 Geogebra 화면의 직선[그림Ⅳ-3]을 보다가 순간속도가 평균속도와 같기 때문에 구간DE내의 어느 순간에서도 매 순간



[그림 Ⅳ-2] GeoGebra의 스프레드시트창에서 점만들기 기능을 이용해 만든 좌표들



[그림 Ⅳ-3]　점D와 점E를 지나는 직선

17.4m/s로 일정하게 움직일 거라고 추측했다[211]. 사실 문제를 해결하는 데는 옳은 반응은 아니었지만 여기서 남학생은 직선으로 그려진 시간-거리 그래프의 속도는 일정하다는 것을 인식하고 있음을 알 수 있다[215].

[발췌문 2] 곡선 그리기

211 남학생: (평균속도와) 순간속도가 같은 거면은, 매 순간마다 17.4m/s인 거잖아

212 여학생: 응

213 남학생: 그렇지? 그러면 이게……음……이렇게 ([그림 Ⅳ-3]의 직선을 가리키며) 나오지 않어?

214 여학생: (갸우뚱)

215 남학생: 왜냐면은 속도가 시간 분에 거리니까 1초면 17.4나오고 2초면은 17.4나오고…등속 운동으로 매 순간이 같을 것 같은데? 이렇게 나올 거 같은데? 아닌가?

216 여학생: 뭐가 나오는데?

217 남학생: 아닌가?

........(생략)

221 여학생: 그런데 이 직선이 다른 점들을 모두 지나지 않잖아. 직선이 아닌가봐 점들을 모두 지나가도록 그릴 수가 없어

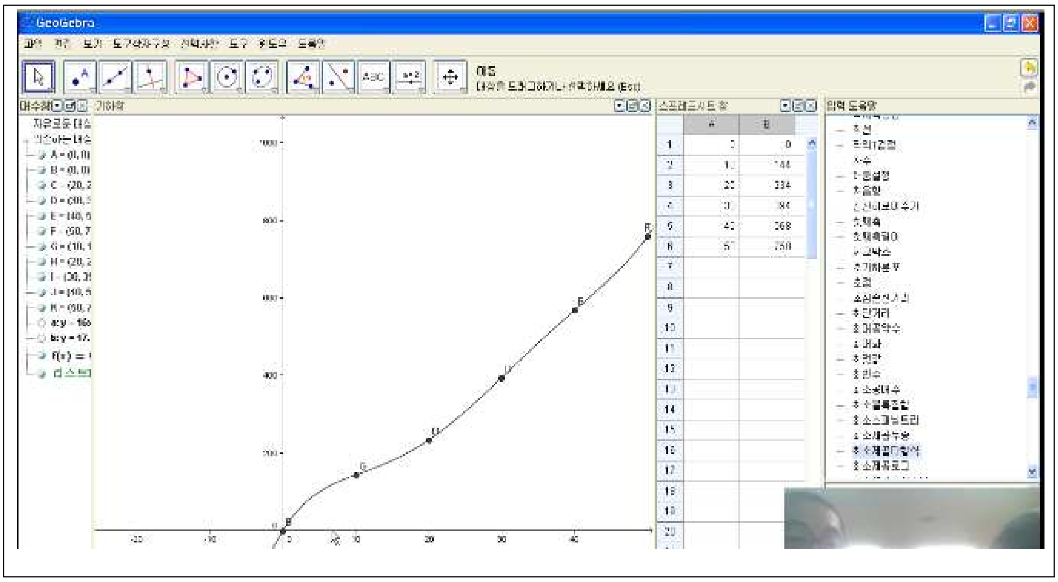
........(생략)

224 남학생: 선생님…그거 뭐였죠? 점을 다 지나도록 그래프를 그리는 거…….

이때 여학생이 직선은 5개의 점 모두를 반영하는 적합한 그래프가 아니라고 판단[221]하고 5개의 점을 모두 지나는 적합한 그래프를 찾아야 함을 느꼈다[224]. 이후, 학생들은 연구자의 도움을 받으며 GeoGebra의 최소제곱다항식 기능을 이용하여 5차 곡선의 그래프를 그렸다[그림 Ⅳ-4]. 화면의 그래프를 조작하면서 순간속도를 구하기 위해 남학생이 소리 내어 생각하고 있을 때, 여학생이 갑자기 순간속도와 접선을 연결시켜야 한다는 아이디어를 제시했다[242].

[발췌문 3] 순간속도와 접선 연결하기

242 여학생: 음…(고민) 네 번째 구간이니까 일이삼사(손가락으로 시작부터 네 번째 구간까



[그림 Ⅳ-4] 점을 모두 지나는 5차 곡선

지 세어본다) 순간속도 그러면 접선인가?(웃으면서 교사와 연구자를 바라본다) 순간속도는….평균속도는 아까처럼 총 걸린 시간분에…구간에 걸린 시간분에 그 구간 길이하고... 순간속도는..

243 남학생: 응

244 여학생: 여기 이 그래프가 지나갈 네 번째 구간에서 순간속도니까 네 번째 구간에서의 접선(남학생을 바라본다)

245 남학생: 순간속도가 순간속도는 어디에서의 순간 속도라고 안했잖아

246 여학생: 네 번째 구간에서의 순간속도잖아.

..........(생략)

269 여학생: 그러니까 여기서도 기울기를 구하면 딱 이점에서의 기울기를 구하면 그게 순간속도가 되지 않아?

270 남학생: 점의 기울기를 어떻게 구하는데?

271 여학생: 음 이 그래프를 지나는 접선의 기울기

272 남학생: 그게 점에서 기울기야?

........(생략)

287 여학생: 순간속도는 어느 딱 지점에서 순간적인 기울기를 얘기해야 되는 거잖아.

두 학생은 [발췌문 3], [발췌문 4]과 같이 10분 이상의 고민과 토론을 계속하였고 여학생은 접선의 기울기가 순간속도임을 남학생에게 설명하는 동안 자신의 생각을 점점 정교화 해 나아가면서 차분의 극한으로 형식화된 미분계수를 재발명하였다.

[발췌문 4] 차분의 극한으로 미분계수 정의하기

334 여학생: (네 번째 구간의 어느 점에서)순간적인 기울기를 구할려고 하는 거잖아 그러면 얘를 이 점으로 최대한([그림 Ⅳ-4]의 E점을 D점 가까이로 손가락으로 이동한다) 그러니까 이점이다…라고 여겨질 때까지 최대한 얘 가까이로 점을 끌어 오는 거야(남학생을 바라본다) 지금까지 기울기를 x차이 분에 y차이로 구했잖아.

335 남학생: 응.

336 여학생: 그럼 이 (두 점을 가까이 하기 위해 x와 y 각각의)차이를 최대한 줄이는 거야.

........(생략)

339 남학생: 그러니까 시간차이를 거의 없애 버린다고?

340 여학생: 거의 없애. 그래서 이렇게 딱 쫄이면?

341 남학생: 그렇지.......(학생들 모두 잠시 말이 없고 고민한다)

342 여학생: 여기서 여기로로 기울기를 해야 되잖아 이렇게 쓱! 지나가겠지? 근데 이게 차이가 너무 작아가지고 같은 점으로 생.각.해.도. 괜찮을.. 정도로?(강조하며 말한다) 차이가? 에… 그래프가 이렇게 (활동지에 [그림 Ⅳ-5] 으로 그려가며 설명한다) 그려지는 거야.

343 남학생: …(여학생을 바라본다)

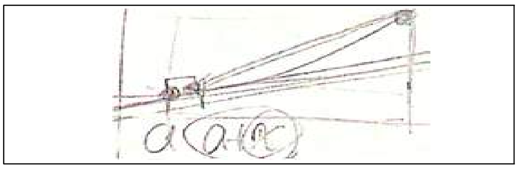
344 여학생: 같은 점으로 생각해도 된다고 얘랑 얘를([그림 Ⅳ-5] 의 두 점을)

345 남학생: 응

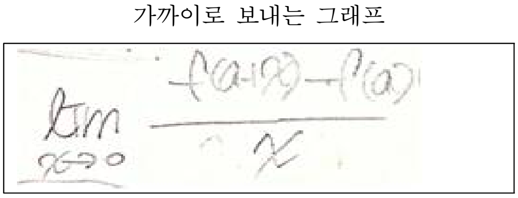
346 여학생: 그럼이게 접선이 되는 거잖아!

347 남학생: 그게 접선의 정의야?

348 여학생: 꼭 그런 건 아닌데...극한 개념으로 가봐. (잠시 생각 후 [그림 Ⅳ-6]와 같이 쓴다)



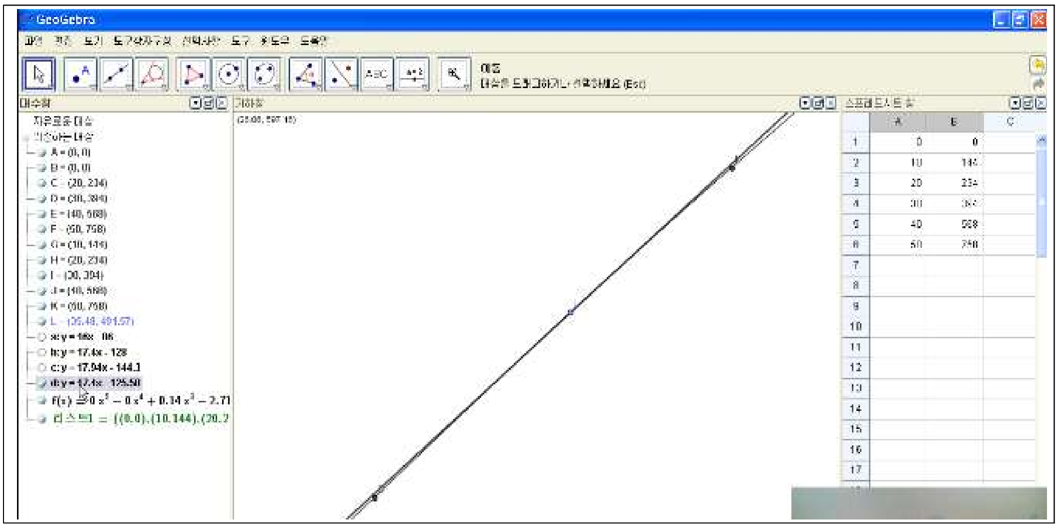
[그림 Ⅳ-5] 여학생이 그린 한 점을 다른 한 점 가까이로 보내는 그래프



[그림 Ⅳ-6] 여학생이 쓴 극한 개념의 접선의 기울기

여학생은 평균속도를 구하기 위해 두 점을 지나는 직선의 기울기를 활용한 것처럼[242], 순간속도는 어느 딱 한 지점에서의 순간적인 기울기를 나타내기 때문에[287] 두 점 사이의 거리를 완전히 줄이면 두 점이 거의 하나처럼 되고[334, 336, 340, 342] 두 점을 지나는 직선은 한 점을 지나는 접선이 되는 거라고 설명했다[346]. 그러나 남학생은 두 점이 거의 하나가 되도록 시간차를 줄여 한 점을 만드는 것에는 동의하지만[339, 341] 한 점에서 기울기를 알 수 없었기 때문에[270, 272] 여학생의 아이디어를 자신의 접선 개념으로는 받아들일 수 없었다[347]. 이때 연구자는 남학생의 질문에 따라 여학생이 남학생에게 설명한 상황을 Geogebra 화면에서 그대로 재현해 주었다. 즉 네 번째 구간의 한 점에서 접선을 그려두고 이 점과 다른 한 점을 지나는 직선을 그린 후 두 번째 찍은 점을 움직여 두 점 사이를 줄여가는 상황을 보여주었다. 학생들에게 할선의 극한이라는 용어를 사용하지 않고 단지 화면 조작 방법을 상세히 설명하면서 보여주었다. 이로써 남학생은 할선의 극한이 접선으로 근접한다는 것을 화면을 통해 확인하였다.

순간속도를 구하기 위해 접선모델을 구성한 학생들은 연구자의 Geogebra 조작을 참고하여 네 번째 구간의 양 끝점을 지나는 직선과 그 구간 안의 한 점에서 접선이 서로 평행한 곳은 어디인지를 비교하기 위해 구간 안의 점을 이동하여 대수창에 나타나는 두 직선의 기울기를 비교하는 방법으로 문제(2)를 해결하였다[그림 Ⅳ-7]. 같은 방법으로 문제(3)도 두 번째 구간의 양 끝점 B, C(두 번째 점과 세 번째 점)를 지나는 직선을 기하창에 그려 놓고 구간 BC 위의 한 점P을 잡아 그 점에서 접선을 그렸다. 그리고 직선 BC의 기울기와 점 P의 이동에 따라 대수창에 나타난 접선의 기울기의 변화를 비교하면서 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅳ-7] 문제(3)의 평균속도인 직선의 기울기와 순간속도인 접선의 기울기 비교

2. 수학적 모델링 활동을 통해 나타나는 학생들의 수학적 개념 변화(접선, 시간-거리와 시간-속도 그래프 사이의 관계)는 어떠한가?

1) 초기 접선 개념에 대한 변화

사전 검사지와 인터뷰에서 남학생은 접선의 정의에 대해 원에 한 번 만나는 직선으로 기억하고 있었다[그림 Ⅳ-8]. 이것은 운동학적인 관점이 포함되지 않은 정적인 관점에서 접선의 개념을 의미하며 미분계수 개념의 역사적 발달 단계와 비교해 볼 때 1단계로 간주될 수 있다.

원과 한점에서 만나는 직선이다

[그림 Ⅳ-8] 접선의 정의(남학생 사전검사지)

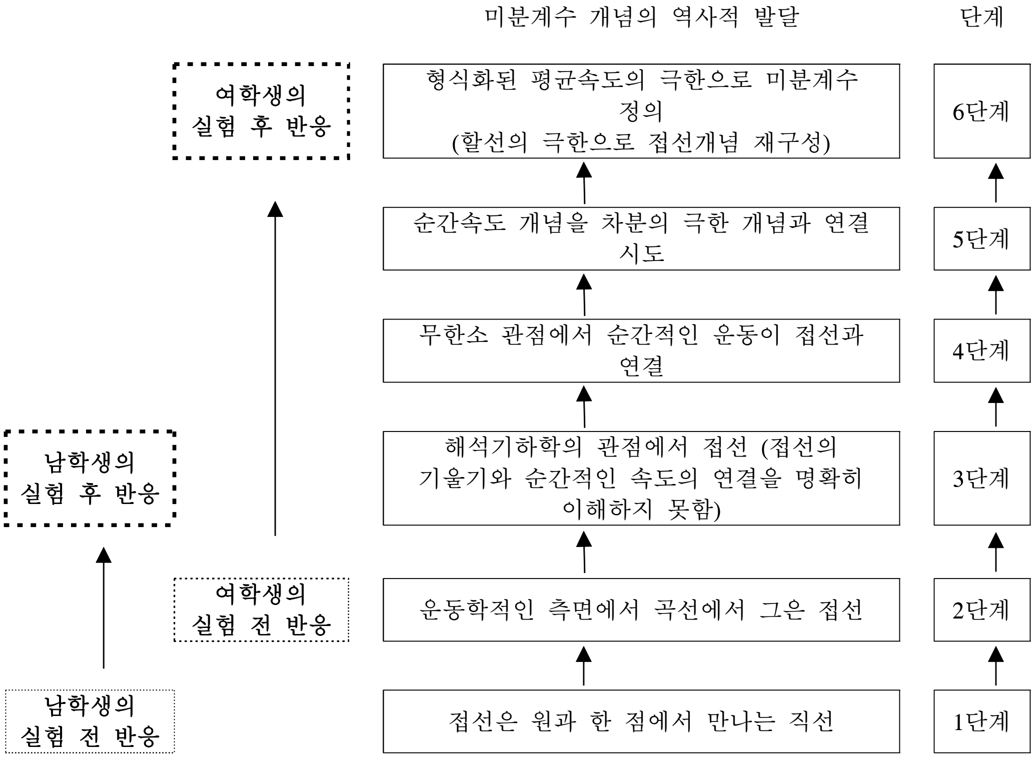
이후 모델링 과정에서 남학생은 아주 가까운 두 점을 지나는 직선[339, 341]이 접선이라고 설명하는 여학생의 말에 어느 정도 동의 하지만 접선의 개념을 할선의 극한으로 재구성할 수 없었기 때문에[347] 접선의 기울기를 순간 속도와는 연결하지 못했다. 결과적으로 해석학적인 관점에서 중근의 의미를 이해[345]하지만 순간속도와 연결하지 못하는 단계에 있다고 볼 수 있다. 따라서 미분계수 개념의 역사적 발달 단계와 비교해 볼 때 3단계 수준임을 추측할 수 있다.

한편, 여학생은 예비 수업의 질문지와 인터뷰에서 접선을 곡선에 스치면서 지나가는 직선으로 기억하고 있었다[그림 Ⅳ-9]. 이것은 미분계수 개념의 역사적 발달 단계와 비교해 볼 때 2단계인 운동학적인 관점을 포함하는 접선 개념을 의미한다.

스치면서 지나가는 직선

[그림 Ⅳ-9] 접선의 정의(여학생 사전검사지)

이후 모델링 과정에서 여학생은 자신이 가지고 있는 함수의 극한에 대한 개념을 도입하고 미분계수의 두 측면인 접선과 순간속도 개념을 연결[242, 346]하였다. 결과적으로 형식화된 극한의 개념을 이용[348]한 미분계수 개념을 재발명할 수 있게 되었다. 따라서 미분계수 개념의 역사적 발달 단계와 비교해 볼 때 6단계 수준임을 추측할 수 있다. 이로써 학생들의 초기 접선 개



[그림 Ⅳ-10] 수학적 모델링을 통해 나타난 학생들의 개념 변화

념이 어떻게 변화하였는지를 미분계수 개념의 역사적 발달 단계와 비교하여 나타내면 [그림 Ⅳ-10]과 같다.

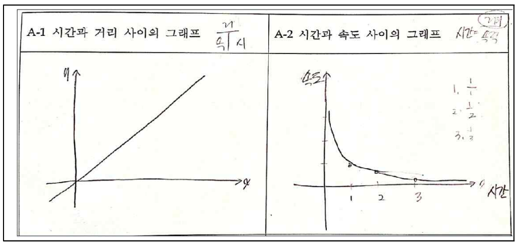
2) 시간-거리 그래프와 시간-속도 그래프 사이의 관계에 대한 개념 변화

시간-거리 그래프와 시간-속도 그래프 사이의 관계에 대해서는 두 가지 관점에서 확인된 결과가 있다. 하나는 시간-속도 그래프에 관한 내적 개념 변화이고 하나는 Geogebra화면에 나타나는 그래프 관찰을 통한 직관적인 반응이다.

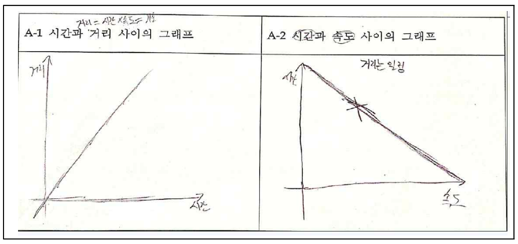
사전 검사지를 통해 학생들은 등속도 운동을 시간-속도 그래프로 표현하는 것에 대한 오개념을 드러냈다[그림 Ⅳ-11, 12]. 여학생은 속력은 거리 나누기 시간이니까 반비례 그래프가 그려질 것 같다고 대답했고 남학생은 시간이 쌓이면 속도가 누적되기 때문에 속도가 느려져도 같은 거리를 갈 수 있다고 대답했고 자신의 그래프는 물리시간에 배운 가속도 개념을 고려한 것이라고 설명했다.

모델링 과정이 끝나고, 사후 검사지에서 여러 가지 시간-거리 그래프에 대한 시간-속도 그래프를 질적으로 추측해 보도록 하였을 때, 여학생은 사전 검사지의 등속도 운동에 대해 반비례 모양으로 그렸던 그래프([그림 Ⅳ-11])가 상수함수를 나타내는 그래프([그림 Ⅳ-13])로 변했으며 시간-속도 그래프를 그리기 위해 곡선에 대한 접선의 기울기 변화를 이용([그림 Ⅳ-13]의 세 번째 곡선을 확인)하였다. 남학생도 사전 검사지에서 [그림 Ⅳ-12]와 같은 반응이 [그림 Ⅳ-14]의 첫 번째 그림과 같이 일정한 속도를 나타내는 그래프로 변했고 시간-속도 그래프를 그리기 위해

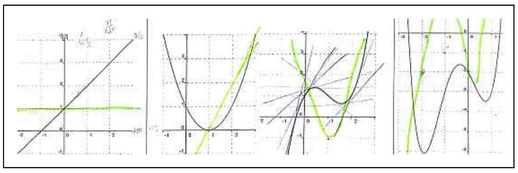
곡선 위의 어느 특정한 부분에 점을 찍어 그 점들에서 속도를 추측하는 방법을 이용([그림 Ⅳ-14]의 세 번째 그래프 확인)하여 그렸다.



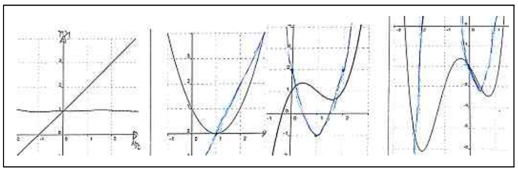
[그림 Ⅳ-11] 여학생의 실험 전 검사지 반응



[그림 Ⅳ-12] 남학생의 실험 전 검사지 반응



[그림 Ⅳ-13] 여학생의 실험 후 검사지 반응



[그림 Ⅳ-14] 남학생의 실험 후 검사지 반응

두 학생들 모두 이차 이상의 그래프에 대한 정확한 시간-속도 그래프를 완벽하게 완성하지는 못했지만 속도가 0이거나 증가와 감소와 같은 질적 추론을 통해 도함수에 다가가는 모습을 볼 수 있었다.

사후 검사지 작성 후, 연구자는 Geogebra를 이용하여 시간-거리 그래프 위의 한 점 $A(a,\ f(a))$를 잡고 그 점에 의존하는 점 $P(a,\ m)$ (이때 a는 점 A의 x좌표이고 m은 A에서 접선의 기울기)의 자취를 이용하여 시간-속도 그래프를 확인할 수 있도록 했다[그림 Ⅳ-15]. 이 활동을 통해 남학생은 시간-속도 그래프가 시간-거리 그래프보다 한 차수가 낮아진다는 사실을 발견[487]하고 만족스러워 했으며 여학생도 이에 동의했다[488].

[발췌문 5] 시간-거리와 시간-속도 그래프

482 연구자: 그냥 대략적으로 추측해 본 후에 컴퓨터로 확인해 보세요.

......(연구자는 Geogebra의 자취 기능을 활용해 시간-속도 그래프를 그릴 수 있도록 한다)

487 남학생: 어? 이거 그런데 차수가 하나씩 낮아지는 것 같아요. 맞죠? (웃음)

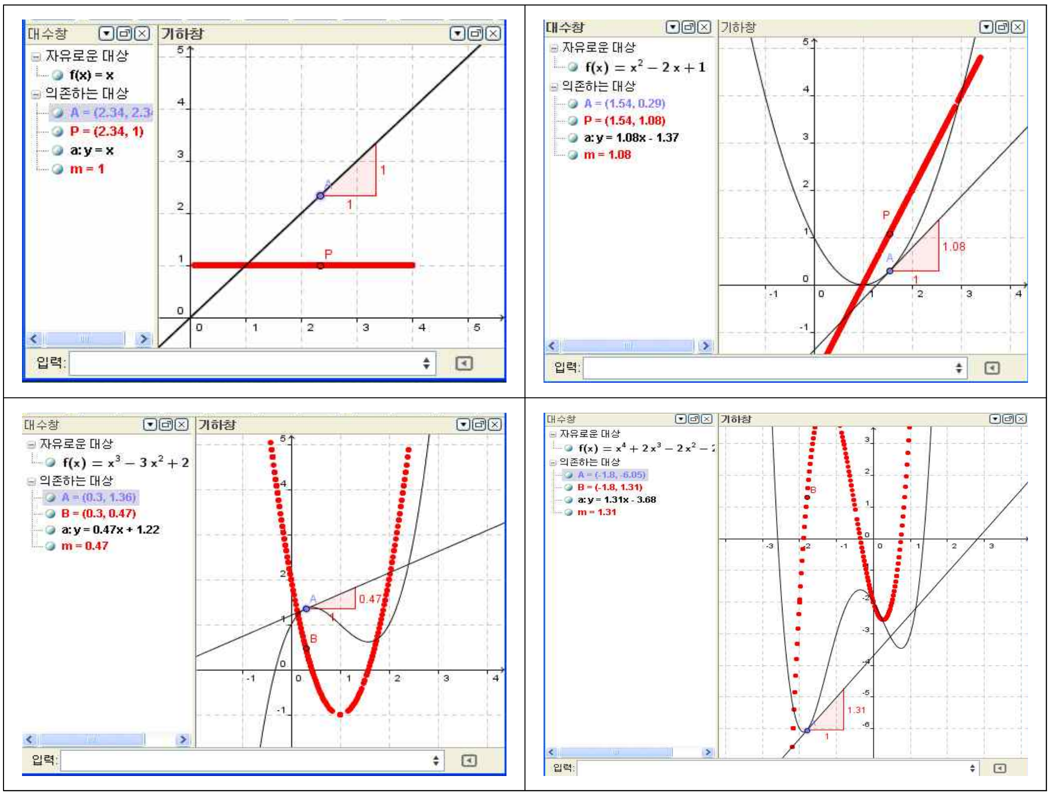
488 연구자: 음(웃는다)

489 여학생: 그렇네

.......(연구자는 학생들에게 똑같이 조작해 볼 수 있도록 조작하는 기회를 준다)

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 고등학교 2학년 문과 학생 2명이 수학적 모델링 과정에서 순간속도를 구하기 위해 할선의 극한으로 접선을 재구성하고 형식화된 평균속도의 극한으로 미분계수를 재발명하는 과정과 그 과정을 통해 나타나는 개념변화를 분석해 보았다. 학생들은 모델링 과정에서 맥락문제를 해결하기 위해 자신들이 가지고 있는 좌표, 직선, 곡선이라는 수학적 모델을 도구로 기울기, 극한, 접선의 개념을 포함하여 스스로 미분계수의 기하학적 측면에서 접선의 기울기를 이해할 수 있게 되었으며 시간-거리 그래프와 시간-속도 그래프 사이의 관계를 직관적으로 이



[그림 Ⅳ-15] 시간-거리 그래프 위의 점의 자취를 이용한 시간-속도 그래프

해할 수 있게 되었다. 그리고 학생들의 접선에 대한 초기 개념이 적절히 재구성 되지 않으면 이후 할선의 극한으로 접선을 연결하지 못하는 인지적 장애를 경험한다는 주장(Amit & Vinner, 1990; Orton, 1980, 1983; Thompson, 1994; Ubuz, 2001; Vinner, 1982; Zandieh, 2000)을 확인 할 수 있었다[그림 Ⅳ-10].

본 연구는 Doorman과 Gravemeijer(2008, 2009)의 emergent modeling에서 운동학과 미적분학의 연결을 위해 속도에 관한 그래프를 질적 추론하는 과정을 분석한 결과로부터 더 나아가 미분계수의 재발명 과정을 분석하였다는 점에서 의미가 있으며 학교 현장에서 미분계수 지도를 위한 새로운 접근법으로 활용될 수 있기를 기대한다.

본 연구의 결론을 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에 참여한 학생의 성적이 상위권인 단 두 명의 학생이라는 점이다. 현재 학교현장에서 수학 수업이 수준별로 이루어지고 있지만 한 반에 30명 정도의 학생들로 구성되어 있으므로 다양한 수준의 학생들을 대상으로 연구를 확장하여 반 전체가 함께 참여 할 수 있는 모델링 활동을 적용해 볼 필요가 있다. 특히 낮은 수준의 학생들에게는 본 연구에서 제공하는 맥락문제에서 도출해야하는 그래프를 2차나 3차로 낮추어 설계하거나 처음부터 그래프를 제시하는 방법을 고려해 볼 것을 제안한다.

둘째, 본 연구에서 학생들의 직관적인 사고를 촉진하기 위해 공학 도구를 활용하였다는 점이다. 학생들은 본 수업에서도 공학 도구의 사용에

있어 연구자의 기술적 도움이 필요했고, 본 수업이 끝난 후 인터뷰에서 GeoGebra는 누구나 무료로 사용할 수 있고 배우기에 쉬운 도구이기는 하나 새로운 수학적 개념을 배우는 것 외에 낯선 공학 도구를 또 배워야 한다는 점에 부담감을 느꼈다고 하였다. 이것은 교사의 역할에 대한 논의와 더불어 앞으로 더 고려되어야 할 부분이다. 또한 GeoGebra에서는 기술상의 문제로 할선의 극한으로서 접선을 구성하려 할 때, 두 점이 한 점으로 겹쳐지는 순간 직선이 사라지기 때문에 접선 기능으로만 접선을 나타낼 수 있다는 점에서 아쉬움이 있었다. 이점은 공학의 한계를 드러내는 것으로 이러한 장애가 없는 접근 방법을 연구해 볼 필요가 있다. 끝으로 학교 현장에의 적절한 응용과 더욱 발전된 후속연구를 기대해 본다.

참고문헌

김정희, 조완영(2006). 고등학생들의 미적분 개념 이해 및 오류유형 분석. **과학교육연구소논총, 22**(1), 87-97.

박문환, 민세영(2002). 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도. **학교수학, 4**(1), 49-62.

손홍찬(2004). Excel을 이용한 미적분 지도. **청람수학교육, 14**, 97-138.

송정화, 신은주(2006). 역사발생적 원리에 따른 미분개념의 도입 방안. **교과교육학연구, 10**(2), 595~614.

신현성(2001). 수학적 모델링을 통한 교육과정의 구성원리. **한국학교수학회논문집, 4**(2), 27-32. 한국학교수학회.

안병국, 김병학, 박윤근(2010). Lakatos이론과 GSP를 활용한 접선지도연구. **한국수학교육학회 시리즈 E, <수학교육 논문집>, 24**(3), 627-658.

임재훈, 박교식(2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구. **수학교육학연구, 14**(2), 171-185.

정연준(2010). 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. **학교수학, 12**(2), 239-257.

정영옥(2004). RME의 수학 학습 평가틀에 대한 고찰 - Jan de Lange의 수학 학습 평가틀을 중심으로 -. **수학교육학연구, 14**(4), 347-366.

조영미(1999). 접선 개념의 교육적 연구. **수학교육학연구, 9**(1), 229-237.

조완영(2006). 고등학교 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구. **학교수학, 8**(4), 417-439.

황선욱 외(2010). **미적분과 통계기본**. (주) 좋은책신사고.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus - anecdotes or the tip of an iceberg. In G. Booker, P. Cobb & T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1 (pp. 3-10). Oaxtepec, Mexico.

Boyer, C. B. (1959). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publication Inc.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc.

Boyer, C. B. (1976). The history of THE CALCULUS. In National Conuncil of Teachers of Mathematics 1969 (Eds.), *Historical topics for the mathematics classroom. Thirty-first Yearbook*, 376-408. Washington, D.C. NCTM.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2010). **수학의 역사·상**. (양영오, 조윤동, 공역). 서울: 경문사. (원저는 1991년 출판).

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2011). **수학의 역사·하**. (양영오, 조윤동, 공역). 서울: 경문사. (원저는 1991년 출판).

Cornu, B. (1991). Limits. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

de Lange, J. (1999). *A Framework for classroom assessment in mathematics.* Unpublished manuscript, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Assessment Study Group.

Doorman, L.M. & Gravemeijer, K.P.E. (2008). Learning mathematics through applications by emergent modeling: The case of slope and velocoty. In: B.Sriraman, C.Michelsen, A. Beckmann & V. Freiman (Eds). *Proceedings of the Second International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences (MACAS2).* University of Southern Denmark Press, pp.37-56

Doorman, L.M. & Gravemeijer, K.P.E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education,* 41, 199–211, springerlink.com

Eves, H. (1960). *An Introduction to the History of Mathematics.* RINEHART and company, Inc.

Eves, H. (2005). **수학사**. (이우영, 신항균, 공역). 서울: 경문사. (원저는 1991년 출판)

Edwards Jr. C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag New York, Inc.

Edwards Jr. C. H. (2012). **미적분의 역사**. (류희찬, 역). 서울: 교우사. (원저는 1979년 출판).

Ely, R. E. (2007). Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus. doctoral dissertation, The university of Wisconsin-Madison.

Freudenthal, H. (2008). **프로이덴탈의 수학교육론**. (우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화, 공역). 서울: 경문사. (원저는 1991년 출판).

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematices, 39,* 111-129.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In A. H. Schoenfeld. (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving.* (pp. 77-156). Lawrence Erbaum Press.

Lakoff, G., & Nunez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York : Basic Books.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calclulus in adolescents and young adults.* Ph. D. Thesis. Leeds University, U.K.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Tall, D. O. (1991a). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, in Tall D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer: Holland, 3-21.

Tall, D. O. (1991b). Intuition and rigour :the role of visualization in the calculus. Published in *Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham),* M.A.A., Notes No. 19, 105–119.

Tall, D. O. (1992). Students' difficulties in calculus. In Proceedings of Working Group 3, *7th International Conference on Mathematical Education* (pp. 13-28). Québec, Canada.

Tall, D. O. (2003a). **고등수학적 사고**. (류희찬, 조완영, 김인수, 공역). 서울: 경문사. (원저는 1991년 출판).

Tall, D. O. (2003b). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L. M. Carvalho and L. C. Guimaraes (Eds.), *Historia e tecnologia no ensino da matematica* (Vol. 1, pp. 1–28), Rio de Janeiro, Brasil.

Thompson, P. (1994). Images of rate operational understanding of the fundamental therem of calculus, *Educational studies in mathematics, 26*, (2/3), 229-274.

Toeplitz, O. (2006). **퇴플리츠의 미분적분학**. (우정호, 임재훈, 박경미, 이경화, 공역). 서울: 경문사. (원저는 1963년 출판).

Ubuz, B. (2001). First Year Engineering Students' Learning of Point of Tangency, Numerical Calculation of Gradients, and the Approximate Value of a Function at a Point through Computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20(1), 113-137.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions-the case of the tangent. *Proceedings of PME 6, Antwerp*, 24-28.

Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (in press). Introducing derivative via the calculus triangle. *Mathematics Teacher*.

White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.

Students' Reinvention of Derivative Concept through Construction of Tangent Lines in the Context of Mathematical Modeling

Kang, Hyang Im (Graduate School, Korea National University of Education)

This paper reports the process two 11th grade students went through in reinventing derivatives on their own via a context problem involving the concept of velocity. In the reinvention process, one of the students conceived a tangent line as the limit of a secant line, and then the other student explained to a peer that the slope of a tangent line was the geometric mean of derivative. The students also used technology to concentrate on essential thinking to search for mathematical concepts and help visually understand them. The purpose of this study was to provide meaningful implications to school practices by describing students' process of reinvention of derivatives. This study revealed certain characteristics of the students' reinvention process of derivatives and changes in the students' thinking process.

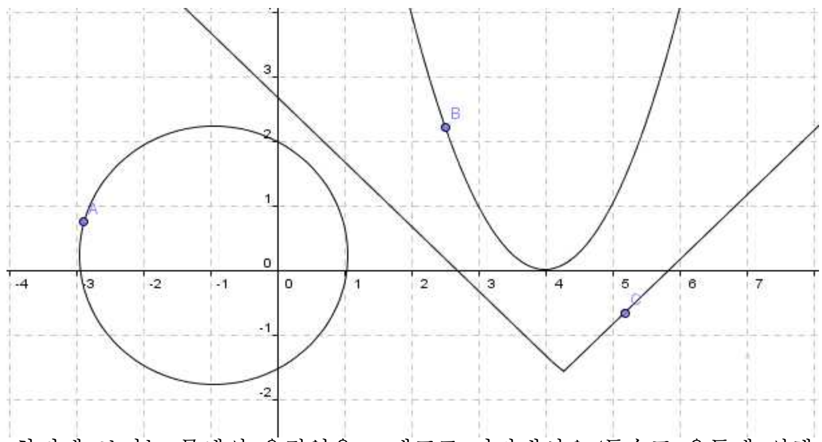
Key Words : derivative(미분계수), tangent line(접선), limit(극한), reinvention(재발명), historical development(역사적 발달)

논문접수 : 2012. 9. 16
논문수정 : 2012. 12. 3
심사완료 : 2012. 12. 14

<부록 1> 사전 질문지 (지면 관계상 각 부록의 여백을 최소화하였음)

<table>
<tr><td>면담일시</td><td>2011년 월 일</td><td>면담대상</td><td></td></tr>
<tr><td>사전 설명</td><td colspan="3">* 다음 질문에 대하여 여러분의 솔직하고 구체적인 답변을 듣고자 합니다.</td></tr>
<tr><td>질문내용</td><td colspan="3">1. 지금까지 학습한 함수의 개념을 얼마나 기억하고 있다고 생각하나요?
2. 지금까지 학습한 수학내용이 얼마나(어디에) 유용하다고 생각해 본 경험이 있나요?
3. 현재 배우고 있는 ‘미적분과 통계 기본’ 교과서는 어디까지 학습하였나요?
4. 앞으로 배우게 될 미적분에 대해 어떤 생각을 가지고 있나요?
5. 수학 시간에 컴퓨터를 활용한 수업을 받아 본 적이 있나요?
(그렇다면) 직접 사용해본 경험이 있나요?</td></tr>
</table>

<부록2> 사전 검사지

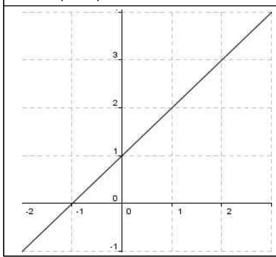
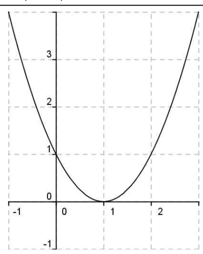
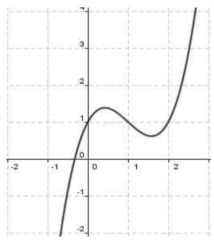
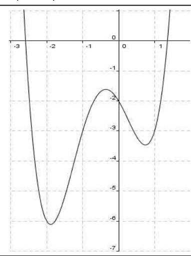
<table>
<tr><td>면담일시</td><td>2011년 월 일</td><td>면담대상</td><td></td></tr>
<tr><td>질문내용</td><td colspan="3">1. 일차함수 $f(x)=x+1$의 그래프를 그리시오.
2. 이차함수 $g(x)=x^2-x-6$의 그래프를 그리시오.
3. 접선의 정의를 쓰고 주어진 점에서 ‘접선’을 그리시오.


A. 화면에 보이는 물체의 움직임을 그래프로 나타내시오.(등속도 운동에 의해 그려진 이동거리의 자취를 보여준다)
<table><tr><td>A-1 시간과 거리 사이의 그래프</td><td>A-2 시간과 속도 사이의 그래프</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>사후 설명</td><td colspan="3">질문에 대해 성실하고 솔직하게 답변해 주셔서 감사합니다. 이 자료는 수학 수업의 향상을 위한 연구 이외의 용도로 사용하지 않을 것입니다.</td></tr>
</table>

<부록 3> 학생 활동지

당신은 스턴트맨이다. 새 영화에 출현하고 자 오디션에 참가했다. 감독은 오디션 참가자들에게 스턴트맨이 촬영 활 동선이 그려진 지도를 하나 씩 주었다. 지도에는 스턴트맨이 오토바이로 10초마다 통과해야하는 5곳의 위치가 체크 되어 있다. 감독은 이 촬영을 한 번에 마치길 원하기 때문에 똑똑한 스턴트맨을 원한다. 따라서 참가자들에게 다음과 같은 질문을 한다. (단, 각 위치마다 표시된 m는 각 구간의 거리이다) 
문제(1) 세 번째 구간의 평균 속도는 무엇인가? 문제(2) 네 번째 구간에서 평균 속도와 순간 속도가 같은 곳이 있는가? 문제(3) 두 번째 구간의 평균 속도와 같은 순간 속도는 몇 곳이나 있는가?

<부록4> 사후 검사지

B. 다음은 시간-거리의 관계를 나타내는 그래프이다. 각 그래프 위에 색 펜을 사용하여 시간-속도 그래프를 그려 보시오.			
(B-1)	(B-2)	(B-3)	(B-4)
			

<부록5> 사후질문지

면담일시	2011년 월 일	**면담대상**	
질문내용	1. 수업의 소감은 어떠한가요? 2. 수업에서 알게 된 것이 있다면 무엇인가요? 3. 수업이 재미있었나요? 재미있었다면 어떤 점인가요? 4. 수학 시간에 본 수업을 활용할 경우 특히 유의할 사항이 있다면 어떤 것일까요? 5. 본 연구와 관련하여 기타 의견이 있다면 적어 주세요.		
사후 설명	질문에 대해 성실하고 솔직하게 답변해 주셔서 감사합니다. 이 자료는 수학 수업의 향상을 위한 연구 이외의 용도로 사용하지 않을 것입니다.		