응용통계연구 (2012)
25(1), 81–87
DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2012.25.1.081

재충전이 있는 연속시간 리스크 모형에서 파산확률 연구

고한나[1] · 최승경[2] · 이의용[3]

[1]숙명여자대학교 통계학과, [2]숙명여자대학교 통계학과, [3]숙명여자대학교 통계학과

(2011년 9월 30일 접수, 2011년 12월 23일 수정, 2011년 12월 26일 채택)

요 약

재충전이 있는 연속시간 리스크 모형이 고려된다. 프레미엄은 일정한 율로 들어오고, 보험금 청구는 복합 포아송 과정을 따라 이루어진다. 초기 잉여금 $u > 0$로 시작하여 잉여금은 프레미엄에 의해 증가하고 보험금 청구에 의해 감소한다. 잉여금의 수준이 $\tau\,(0 < \tau < u)$아래로 떨어지면 초기 잉여금 수준까지 재충전이 이루어진다고 가정한다. 재충전이 고려된 리스크 모형에서 잉여금이 없어지는 파산확률을 적미분 방정식을 통해 유도하고, 보험 청구액이 독립적으로 지수분포를 따르는 경우는 파산확률의 명확한 공식이 유도됨을 보인다.

주요용어: 리스크 모형, 잉여금 과정, 파산확률, 재충전, 적미분 방정식.

1. 서론

보험 수리에서 다루는 일반적인 리스크 모형은 다음과 같다. 보험 상품의 잉여금은 초기치 $u > 0$에서 시작하여 단위 시간당 $c > 0$로 들어오는 보험료에 의해 증가하며 고객의 보험금 청구가 발생할 때마다 감소한다. 여기서, 보험금 청구는 발생률 $\lambda > 0$인 포아송 과정 $\{N(t), t \geq 0\}$을 따라 발생하며, 지급되는 보험금의 크기는 서로 독립이고 평균 $\mu > 0$인 일반적인 분포 F를 따른다. 시간 $t > 0$에서 잉여금을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0.$$

여기서, X_i는 i번째 보험 청구액이고, $c = (1 + \theta)\lambda\mu$이다. $\theta > 0$는 상대적인 보완 부가금(relative security loading, premium loading factor)으로 이로 인해 보험료율 c가 단위 시간당 기대되는 보험 청구액 $\lambda\mu$보다 커진다. 이와 같은 보험 상품의 잉여금 과정에서 $U(t)$의 값이 0보다 작아지면 보험 상품이 파산한다고 말한다.

잉여금 과정의 모형화와 파산확률을 구하는 기존의 연구는 Klugman 등 (2004)에 잘 요약되어 있다. Dufresne와 Gerber (1991)는 확산(diffusion) 과정이 더해진 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 연구하였다. 파산할 때까지의 시간에 대한 연구는 Gerber (1990)와 Gerber와 Shiu (1997) 등에 의해 연구되었고, Dickson과 Willmot (2005)은 라플라스 역변환을 통해 파산할 때까지 시간의 확률밀도함수를 명확하게 구하였다. Oh 등 (2007)은 마팅게일 이론을 이용하여 잉여금이 주어진 범위를 벗어나는데 걸

본 연구는 숙명여자대학교 2010학년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.
[3]교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

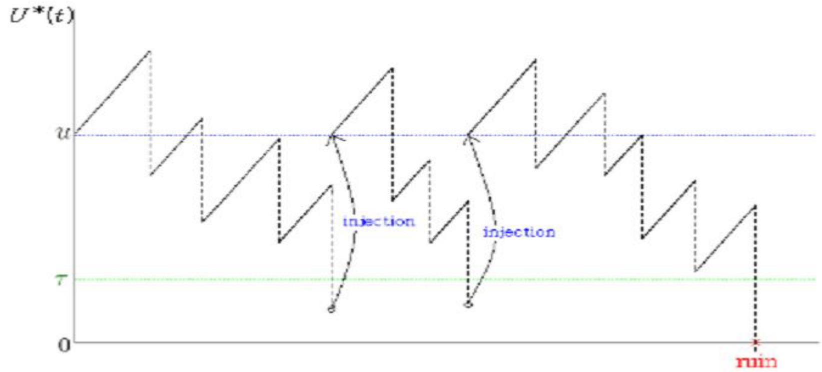

그림 1.1. $U^*(t)$의 표본경로

리는 시간과 이 시간 동안의 총 잉여금의 기대값을 구하였고, Jeong 등 (2009)은 기존의 리스크 모형에 잉여금이 충분할 때 투자(investment)와 잉여금이 부족할 때 재충전(injection)의 개념을 도입하여 잉여금의 최적 투자 정책을 연구하였다.

재충전은 기존의 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 줄이는 한 방편이다. 본 논문에서는 재충전이 고려된 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 연구한다. 즉, 적정수준 $\tau\,(0 < \tau < u)$를 설정하여 τ아래로 잉여금이 떨어지면 즉시 u까지 재충전하는 잉여금 과정을 고려한다. 이러한 리스크 모형에서 잉여금 과정을 $\{U^*(t), t \geq 0\}$라 놓으면 표본 경로는 그림 1.1과 같다. 2장에서는 기존의 리스크 모형에서 연구된 파산확률을 요약하고, 재충전이 고려된 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 적미분 방정식(integro-differential equation)을 세워 유도한다. 3장에서는 보험 청구액이 독립적으로 지수분포를 따르는 경우에 파산확률의 명확한 공식을 구하고, 수치적인 예를 통해 파산확률의 변화를 관찰한다.

2. 재충전이 있는 리스크 모형에서 파산확률

우선, Klugman 등 (2004)을 참조하여 기존의 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 요약하면 다음과 같다. 초기치 u에서 시작한 잉여금의 파산확률 $\psi(u)$는

$$\psi(u) = \Pr\{U(t) < 0, \text{ for some } t > 0 | U(0) = u\}$$

이다. Klugman 등 (2004, pp. 239–242)에서와 같이 최대 총 손실(maximum aggregate loss)을 이용하여 파산확률 $\psi(u)$를 구하면

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k S_e^{(k)}(u), \quad u \geq 0$$

이 된다. 여기서 $S_e^{(k)}(u) = 1 - F_e^{(k)}(u)$이고, $F_e^{(k)}$는 F_e의 k차 공률(k-fold recursive convolution)이고, F_e는 F의 평형분포함수(equilibrium distribution function)로

$$F_e(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u [1 - F(x)] dx$$

이다. 보험금 크기의 분포 F가 평균이 μ인 지수분포인 경우, 즉, $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, $x \geq 0$, 잉여금의

파산확률은 아래와 같이 명확하게 구해진다.

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\exp\left[-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)}\right].$$

지금부터 재충전이 고려된 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 구해보자. 이를 위해 잉여금이 u에서 출발하여 처음으로 τ아래로 떨어지는 시점 $T(u)$와 이때 τ아래로 떨어지는 양이 $l > 0$을 넘어갈 확률 $P(l,u)$를 아래와 같이 정의한다.

$$T(u) = \inf\{t > 0 : U(t) \le \tau | U(0) = u\},$$
$$P(l,u) = \Pr\{U[T(u)] < \tau - l | u(0) = u\}.$$

$P(l,u)$를 구하기 위해 작은 구간 $(0,h)$에서 보험금 청구 여부에 조건을 걸면

(i) 보험 청구가 없으면

$$U[T(u)] \le \tau - l \;\Leftrightarrow\; U[T(u+ch)] < \tau - l$$

(ii) 보험 청구가 있고, 크기 $X \ge u + ch' - \tau (h' \le h)$이면

$$U[T(u)] \le \tau - l \;\Leftrightarrow\; u + ch' - X < \tau - l$$

(iii) 보험 청구가 있으나, 크기 $X < u + ch' - \tau (h' \le h)$이면

$$U[T(u)] \le \tau - l \;\Leftrightarrow\; U[T(u + ch' - X)] < \tau - l$$

이다. 위 관계를 이용하여 $P(l,u)$에 대한 식을 세우면

$$\begin{aligned} P(l,u) &= (1 - \lambda h + o(h))P(l, u+ch) + (\lambda h + o(h))\{1 - F(u + ch' - \tau + l)\} \\ &\quad + (\lambda h + o(h))\int_0^{u+ch'-\tau} P(l, u + ch' - Y)dF(y) + o(h) \end{aligned}$$

이다. 양변을 ch로 나누고 h를 0으로 보내면 아래의 $P(l,u)$에 대한 적미분 방정식이 만들어진다.

$$P'(l,u) = \frac{\lambda}{c}P(l,u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^{u-\tau} P(l, u-x)dF(x) - \frac{\lambda}{c}\{1 - F(u - \tau + l)\}.$$

위 식에서 계산상 편의를 위해, $t = u - \tau$로 치환하고, $P(l, t+\tau) = \bar{P}(l,u)$라 놓으면,

$$\bar{P}'(l,t) = \frac{\lambda}{c}\bar{P}(l,t) - \frac{\lambda}{c}\int_0^{t} \bar{P}(l, t-x)dF(x) - \frac{\lambda}{c}\{1 - F(t + l)\}$$

이 된다. 양변을 t에 대하여 0에서 u까지 적분하면

$$\bar{P}(l,u) - \bar{P}(l,0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\bar{P}(l,t)dt - \frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\int_0^{t}\bar{P}(l,t-x)dF(x)dt - \frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\{1 - F(t+l\}dt$$

가 된다. 위 식에서 이중 적분의 적분 순서를 바꾸어 정리하면, 아래의 $\bar{P}(l,u)$에 대한 다음의 재생(renewal) 방정식이 만들어진다.

$$\bar{P}(l,u) = \bar{P}(l,0) - \frac{1}{c}\tilde{F}(u) + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^{u}\bar{P}(l,u-y)dF_e(y).$$

여기서, $\tilde{F}(u) = \lambda \int_0^u \{1 - F(t+l)\} dt$이다.

위 재생 방정식의 해는 아래와 같다 (Asmussen, 1987).

$$\bar{P}(l,u) = \bar{P}(l,0)W(u) - \frac{1}{c}\tilde{F} * W(u).$$

여기서 $W(u) = \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda\mu/c\, F_e]^{*n}(u)$이고, $*$는 Stieltjes 공률(convolution)이며, $*n$은 n차(n-fold recursive) Stieltjes 공률로, $\tilde{F} * W(u) = \int_0^u \tilde{F}(u-t) dW(t)$이다.

$\bar{P}(l,0)$를 구하기 위해, 경계 조건(boundary condition)을 살펴보면, $\bar{P}(l,\infty) = 0$이므로

$$\bar{P}(l,0) = \lim_{u\to\infty} \frac{\int_0^u \tilde{F}(u-t)dW(t)}{cW(u)} = \frac{c-\lambda\mu}{c^2} \lim_{u\to\infty} \tilde{F} * W(u)$$

이다. 여기서 $\lim_{u\to\infty} W(u) = \lim_{u\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda\mu/c\, F_e]^{*n}(u) = 1/(1-\lambda\mu/c) = c/(c-\lambda\mu)$이다. 따라서,

$$\bar{P}(l,0) = \frac{\lambda}{c} \int_l^{\infty} [1 - F(t)] dt$$

이고, $P(l,u) = \bar{P}(l, u-\tau)$이다.

재충전이 있는 경우, 잉여금의 파산확률을 구하기 위해, 파산할 때까지 재충전의 횟수에 조건을 걸면, u에서 시작한 잉여금의 파산확률 $\psi^*(u)$는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\psi^*(u) &= \Pr\{U^*(t) < 0, \text{ for some } t > 0 | U^*(0) = u\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [P(0,u) - P(\tau,u)]^n P(\tau,u) \\
&= \frac{P(\tau,u)}{1 - [P(0,u) - P(\tau,u)]}.
\end{aligned}$$

3. 보험 청구액이 지수분포를 따르는 경우

이 장에서는, 보험 청구액이 독립적으로 평균이 $\mu > 0$인 지수분포를 따르는 경우, 잉여금의 파산확률을 라플라스 변환을 이용하여 명확히 구해본다. 지수분포의 비기억성(memoryless property)에 의해 $F_e(u) = 1 - e^{-u/\mu}$이다. 따라서, $W(u) = \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda\mu/c\, F_e]^{*n}(u)$의 라플라스 변환은

$$\mathcal{L}\{W(u)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{\frac{\lambda\mu}{c} f_e(u)\right\}^n = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{\lambda\mu}{c\mu s + c}\right\}^n = \frac{1}{s} \frac{c\mu s + c}{c\mu s + c - \lambda\mu}$$

이 된다. 역변환(inverse transform)을 통해 $W(u)$를 명확히 구하기 위해 $\mathcal{L}\{W(u)\}$를 다시 정리하면

$$\mathcal{L}\{W(u)\} = \frac{1}{s + 1/\mu - \lambda/c} + \frac{1}{\mu s(s + 1/\mu - \lambda/c)}$$

이다. 역변환을 시켜 정리하면,

$$W(u) = \frac{\lambda\mu e^{\nu u} - c}{\lambda\mu - c}$$

이 된다. 여기서 $\nu = \lambda/c - 1/\mu$ $(\nu < 0)$이다. 이제 $1/c[\tilde{F} * W(u)]$를 구해보자. F가 평균이 μ인 지수

표 4.1. 재충전을 고려한 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률

u	τ	$\psi^*(u)$	u	τ	$\psi^*(u)$
0.3	0	0.30657	0.7	0	0.08081
	0.05	0.17279		0.05	0.03738
	0.1	0.09190		0.1	0.01691
	0.2	0.02643		0.3	0.00070
0.5	0	0.15740	1	0	0.02973
	0.05	0.07752		0.05	0.01321
	0.1	0.03670		0.1	0.00582
	0.2	0.00803		0.3	0.00022

분포이므로

$$\tilde{F}(u) = \lambda \int_0^u 1 - F(t+l)dt = \lambda \int_0^u 1 - \left[1 - e^{-\frac{(t+l)}{\mu}}\right] dt = \lambda\mu \left[1 - e^{-\frac{(u+l)}{\mu}}\right]$$

따라서,

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\left[\tilde{F} * W(u)\right] &= \frac{1}{c}\int_0^u W(u-y)d\tilde{F}(y) = \frac{1}{c}\int_0^u \left[\frac{\lambda\mu e^{\nu(u-x)} - c}{\lambda\mu - c}\right] \lambda e^{-\frac{(x+l)}{\mu}} dx \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu - c} e^{-\frac{1}{\mu}} \left[e^{\nu\mu} - 1\right]\end{aligned}$$

이다. 다음으로 경계치 $\bar{P}(l, 0)$와 $P(l, u)$를 구해보자. F가 평균이 μ인 지수분포인 경우,

$$\bar{P}(l, 0) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{\frac{l}{\mu}}$$

이다. 따라서, $\bar{P}(l, u)$는

$$\bar{P}(l, u) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{\nu\mu - \frac{l}{\mu}}$$

이고, $P(l, u)$는 다음과 같다.

$$P(l, u) = \bar{P}(l, u - \tau) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{\nu(u-\tau) - \frac{l}{\mu}}.$$

이렇게 계산된 $P(l, u)$을 이용하여 파산확률 $\psi^*(u)$을 정리하면 아래와 같다.

$$\psi^*(u) = \frac{P(\tau, u)}{1 - [P(0, u) - P(\tau, u)]} = \frac{\frac{\lambda\mu}{c} e^{\nu(u-\tau) - \frac{\tau}{\mu}}}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{\nu(u-\tau)} \left[1 - e^{-\frac{\tau}{\mu}}\right]}.$$

4. 수치적 예제

기존의 리스크 모형에 재충전의 개념을 추가로 고려함으로써 잉여금의 파산확률을 어느 정도 줄일 수 있는지 수치적으로 보이기 위해, 보험 청구액의 분포로 평균 0.05인 지수분포를 가정하였다. 여기서, 보험 청구 발생률 $\lambda = 10$, 상대적 보완 부과금 $\theta = 0.2$를 가정하였다. 다양한 초기 잉여금 u에 대해, 적정수준 τ값을 증가시키며, 잉여금의 파산확률을 구하여 표 4.1에 나타내었다. 각 u의 값에서, $\tau = 0$인 경우가 재충전을 고려하지 않은 일반적인 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률이다. τ값이 증가하면서 파산확률 $\psi^*(u)$가 빠르게 줄어드는 것을 볼 수 있다. 이러한 수치적인 결과들을 통해, 보험회사는 보험 상품을 운영할 때, 원하는 수준의 파산확률에 해당하는 적정수준의 τ값을 설정할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 기존의 리스크 모형을 일반화하여, 잉여금이 적정수준 이하로 떨어지면 재충전이 이루어지는 리스크 모형을 소개하였다. 새로운 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 적미분 방정식 기법을 도입하여 구하였다. 하지만, 보험 청구액의 분포로 일반적인 분포를 가정하면, 구해진 잉여금의 파산확률 공식이 무한 합과 공률 연산을 포함하고 있어, 실제 보험 상품에 적용하기가 쉽지 않다. 따라서, 보험 청구액이 독립적으로 지수분포를 따르는 경우에, 파산확률의 명확한 공식을 구하였다. 이 공식은 물론 보험 청구액의 분포가 일반적인 경우에 파산확률의 근사치로 활용될 수 있다. 끝으로, 수치적 예제를 통해, 재충전을 고려함으로써 잉여금의 파산확률을 어느 정도 줄일 수 있는지를 관찰하였다.

참고문헌

Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues,* John Wiley & Sons, Chichester.

Dickson, D. C. M. and Willmot, G. E. (2005). The density of the time to ruin the classical Poisson risk model, *ASTIN Bulletin*, **35**, 45–60.

Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics and Economics*, **10**, 51–59.

Gerber, H. U. (1990). When does the surplus reach a given target?, *Insurance: Mathematics and Economics*, **9**, 115–119.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1997). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, 129–137.

Jeong, M. O., Lim, K. E. and Lee, E. Y. (2009). An optimization of a continuous time risk process, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 4062–4068.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2004). *Loss Models: From Data to Decision*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Hoboken.

Oh, S., Jeong, M. O. and Lee, E. Y. (2007). A martingale approach to a ruin model with surplus following a compound Poisson process, *Journal of the Korean Statistical Society*, **36**, 229–235.

The Ruin Probability in a Risk Model with Injections

Han Na Go[1] · Seung Kyoung Choi[2] · Eui Yong Lee[3]

[1]Department of Statistics, Sookmyung Women's University
[2]Department of Statistics, Sookmyung Women's University
[3]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received September 30, 2011; Revised December 23, 2011; Accepted December 26, 2011)

Abstract

A continuous time risk model is considered, where the premium rate is constant and the claims form a compound Poisson process. We assume that an injection is made, which is an immediate increase of the surplus up to level $u > 0$ (initial level), when the level of the surplus goes below $\tau (0 < \tau < u)$. We derive the formula of the ruin probability of the surplus by establishing an integro-differential equation and show that an explicit formula for the ruin probability can be obtained when the amounts of claims independently follow an exponential distribution.

Keywords: Risk model, surplus process, ruin probability, injection, integro-differential equation.

This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2010.

[3]Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Chungpa-dong, Yongsan-ku, Seoul 140-742, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr