

Krylov 벡터를 이용한 모델차수축소법

Model Order Reduction Method using Krylov Vectors



한 정 삼*

* 안동대학교 기계설계공학과 부교수

1. 서 론

컴퓨터 전산자원의 지속적인 발전으로 합리적인 시간에 대형 문제의 구조해석이 가능하지만 다양한 기술 및 시장의 요구사항으로 기계시스템의 형태가 더욱 복잡해지고 사용 환경 또한 특수해져 유한요소법의 적용 및 해석은 항상 새로운 문제를 접하는 실정이다. 따라서 다양한 물리분야의 대형 문제에서 매우 큰 자유도를 가진 유한요소모델의 주파수응답 및 진동해석을 주어진 설계시간 내에 반복적인 설계 변경 및 최적설계를 수행하기에는 여전히 해석상 시간적 어려움을 지니고 있다. 이에 해석모델의 모델차수축소법에 관한 연구의 필요성은 계속하여 증가되고 있으며 멀티 피직스, 자동제어, 최적설계의 분야에서 중요한 연구 분야로 인식되고 있다. 일반적으로 기계시스템의 주파수응답을 고려하는 최적설계를 위해서는 여러 가지 설계변수에 대한 관심 주파수영역에서의 주파수응답과 그의 민감도 정보가 요구되므로, 특히 고려하는 유한요소모델이 대형일 경우에는 관심 주파수영역에서의 반복적인 주파수응답 해석으로 인한 계산비용 및 전산자원의 문제는 더욱 크게 대두된다. 따라서 이러한 계산상의 문제를 해결하기 위한 여러 가지 근사화기법 등이 제안되었다.

기계시스템의 주파수응답을 계산하는 근사화 방법으로 벡터중첩법이 있다. 벡터중첩법 중에서 시스템의 고유모드

를 구하여, 이를 선형결합하여 주파수 및 과도응답을 계산하는 모드중첩법(mode superposition method)이 전통적으로 많이 사용되지만 주파수응답에 사용되는 고유모드의 종류 및 개수를 결정하는 것이 문제에 의존적이며, 고유모드의 개수에 따른 응답의 정량적인 차이를 예측할 수 없는 단점이 있다. 또한, 고차까지의 고유모드가 필요할 때에는 이러한 고유치해석 자체가 해석시간의 대부분을 차지할 정도로 상당한 수치연산을 요구하는 경우가 많다. 다른 벡터중첩법으로 구조물의 고유치해석을 수행하지 않고 시스템의 질량행렬에 대하여 정규직교(orthonormal)한 Ritz 벡터를 중첩하는 방법이 Wilson에 의해 제안되었다. Ritz 벡터중첩법은 Ritz 벡터를 사용하여 초기 시스템의 차수를 줄이고, 축소된 시스템의 고유치해석을 통하여 초기 시스템의 진동해석을 근사화하였다. Ritz 벡터중첩법은 초기 시스템의 고유치해석을 수행하지 않으므로 모드중첩법보다 효율적이며, 하중분포벡터를 초기 Ritz 벡터로 사용하므로 하중분포에 대한 정보가 없는 모드중첩법에 비해 일반적으로 정확도가 더 우수하다. 이에 반하여 본 기사에서 언급하고자 하는 Krylov 벡터를 이용하는 방법은 모멘트일치법을 통한 수학적 이론상에서 전개된 방법으로 다물리 분야로의 확장 및 공학적인 관점에서 요구되는 정확도를 지니는 축소모델의 차수를 결정할 수 있는 장점을 지닌다.

2. Krylov 벡터를 이용한 모델차수축소법

일반적인 구조물의 운동방정식을 유한요소 방법의 이산화를 통하여 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1)$$

여기서 M, C, K 및 $F(t)$ 는 각각 시스템의 질량, 감쇠, 강성 및 하중이며, $x(t)$ 는 시간 t 의 함수인 상태변수벡터이다. 대부분의 경우, 식 (1)의 시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답 $y \in R^m$ 은 $y = Lx$ 처럼 상태변수벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 하중의 가진주파수를 Ω 로 하여 가진할 때, 시스템의 주파수응답함수(frequency response function)는 $K_c x = F$ 의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(-\Omega^2 M + i\Omega C + K)x = F \quad (2)$$

모델차수축소법은 다음 관계를 만족하는 변환행렬 $V \in R^{N \times n}$ 을 구하여 초기 시스템인 식 (1)의 큰 자유도의 상태변수벡터를 작은 자유도로 구성된 축소시스템의 상태변수벡터로 근사화하는 방법이다.

$$x(t) = Vz(t) \quad \text{where } z(t) \in R^n, n \ll N \quad (3)$$

물론, 여기에서 부공간 V 의 선택은 축소모델의 정확도 및 효율에 있어서 매우 중요한 부분이다. 이 관계를 이용하면 초기 시스템인 식 (1)은 동일한 형태를 지닌 이차 축소시스템으로 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} M_r \ddot{z}(t) + C_r \dot{z}(t) + K_r z(t) &= F_r(t) \\ y(t) &= L_r z(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, 축소행렬은 각각 $M_r = V^T M V$, $C_r = V^T C V$, $K_r = V^T K V$, $F_r = V^T F$ 및 $L_r = L V$ 이 된다.

전통적으로 모드중첩법(mode superposition method)이라 불리는 시스템의 비감쇠 고유모드벡터를 부공간으로 사용하는 방법이 많이 이용되었다. 그 이유는 고유모드벡터가 명확한 물리적 의미를 가지며 동시에 질량 및 강성행렬을 대각화하며, 또한 시스템의 비감쇠 주파수특성을 지니기 때문이다. 그러나 여러 연구를 통하여 이러한 비감쇠 주파수특성을 가지는 것이 시간 의존적인 가진 하에서는 계산 정확도 측면에서 그렇게 중요한 요소가 아닌 것을 알게 되었다. 모드가속화기법(mode acceleration method)으로 일부 정확도는 향상되었지만 본 기사를 통하여 소개할 방법이 좀더 직관적이고 효율적으로 축소모델을 생성한다.

Krylov 벡터는 일종의 특별한 형태의 Ritz 벡터로써 하중에 의존적인(load-dependent) Ritz 벡터와 동일하다. 이때, 첫 번째 Krylov 및 Ritz 벡터는 구조물에 가해지는 하중에 의한 정적 변형 형상에 해당된다. 또한 Krylov 벡터에 근거한 모델차수축소법은 수렴된 고유벡터를 계산하는데 필요한 많은 수치계산을 피하면서도 모델축소에 더욱 적합한 부공간을 제공한다. Krylov 벡터에 근거한 모델차수축소법에서 감쇠행렬이 비례감쇠로 표현되는 경우, 즉 $C = \alpha M + \beta K$ 인 경우에 식 (5)의 변환행렬 V 의 각 열벡터로 이루어진 모든 선형결합이 다음의 n 차 Krylov 부공간을 구성(span)하면, 초기 시스템과 축소시스템의 첫 n 번째까지의 모멘트(moment)는 서로 일치한다.

Arnoldi process:
 Given a nonzero starting vector $r (=K^{-1}F)$ and a matrix $A (=K^{-1}M)$, the algorithm produces orthonormal v_1, v_2, \dots, v_n such that
 $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \text{span}\{r, Ar, \dots, A^{k-1}r\}$ for $k=1, 2, \dots, n$

```

v1 = r / || r || 2
for k = 1, 2, ..., n-1
    vk+1 ← Avk                                     (new vector generation)
    for j = 1, 2, ..., k
        hjk ← vjT vk+1                               (orthogonalization)
        vk+1 ← vk+1 - hjk vj
    endfor
    hk+1,k ← || vk+1 || 2
    vk+1 ← vk+1 / hk+1,k                             (normalization)
endfor
        
```

그림 1 Calculation of matrix V by Arnoldi process

$$K_n(K^{-1}M, K^{-1}F) = \text{span}\{K^{-1}F, (K^{-1}M)K^{-1}F, \dots, (K^{-1}M)^{n-1}K^{-1}F\} \quad (5)$$

식 (5)을 만족하는 변환행렬 V 를 구하는 데에는 초기 시스템의 강성 및 질량행렬과 하중벡터만이 이용되며 수치적으로는 그림 1에 제시된 아놀디 과정(Arnoldi process)을 통하여 계산된다. n 차 크리토프 부공간 $K_n(K^{-1}M, K^{-1}F)$ 을 구성하는 열벡터는 실제 수치계산에 있어서 작은 n 값에도 서로 일차종속(linearly dependent)이 되기 때문에, 실제 수치계산에서는 이 열벡터를 사용하지 않고 같은 크리토프 부공간을 구성하는 새로운 기저 열벡터들을 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬 V 는 정규직교성(orthonormality)을 가진다.

$$\text{colspan}\{V\} = K_n(K^{-1}M, K^{-1}F) \quad (6)$$

$$V^T V = I_n$$

여기서, I_n 는 n 차의 단위행렬이다.

그림 1에 아놀디 과정을 통하여 변환행렬 V 의 열벡터를 생성하는 수치적 알고리즘을 설명하였다. 행렬 A 와 벡터 r 을 각각 $A=K^{-1}M$ 과 $r=K^{-1}F$ 라 할 때, 아놀디 과정을 설명한다. 초기벡터 r 을 정규화하여 v_1 을 얻고, 다음 열벡터 v_{k+1} 는 $v_{k+1}=Av_k$ 의 관계를 이용하여 다음 단계로 구한다.

- 1) Let $v_{k+1}=Av_k$ where $A=K^{-1}M$
- 2) Multiply K on both sides, $Kv_{k+1}=-Mv_k$
- 3) Decompose K , $LUv_{k+1}=-Mv_k$
- 4) Solve for w , $Lw=-Mv_k$ where $Uv_{k+1}=w$
- 5) Solve for v_{k+1} , $Uv_{k+1}=w$

즉 K^{-1} 을 직접 계산하지 않고, 2)처럼 양변에 K 를 곱하여 행렬분해(matrix decomposition)을 수행한다. 이때, LU분해 및 Cholesky분해를 사용한다. 이후에 2회의 연립방정식 풀이를 통해 열벡터 v_{k+1} 를 구한다. 따라서, v_{k+1} 를 구하기 위해서는 행렬과 벡터의 곱(Mv_k) 1회, 전방대입법(forward substitution) 1회 및 후방대입법(backward substitution) 1회의 계산이 필요하다. 또한, 생성되는 V 의 열벡터가 선형독립성을 가지도록 직교화(orthogonalization)을 수행한다. 대부분의 경우, 그람슈미트(Gram-Schmidt) 정규직교화 과정이 이용된다. 고전적 그람슈미트 정규직교화 과정은 수치계산에서 발생하는 반올림 오차로 인하여 수치적으로 불안정하므로, 수학적으로는 동등하나 수치적으로는 더 작은 오차를 포함하는 수정 그람슈미트 정규직교화 과정이 선호된다. 만약에 지정된 n 개의 선형독립인 열벡터를 구하기 전에 열벡터가 선

형종속이 되면, 선형독립인 열벡터까지만 V 의 열벡터로 취하게 된다. 따라서 최종적으로 구해진 V 의 열벡터는 식 (6)의 관계를 만족한다. 이러한 Krylov 벡터를 이용하는 방법 이외에 유사한 형태를 지니며 질량행렬 정규직교성(M-orthonormality)을 지닌 Ritz 벡터를 사용하는 모델저수축소법도 구조물의 진동해석에 사용되었다.

따라서 최종적으로 축소모델을 이용한 주파수응답 해석을 위하여 식 (3)의 관계를 식 (2)에 적용하고, 양변을 V^T 로 곱하면

$$(-\Omega^2 V^T M V + i\Omega V^T C V + V^T K V)z = V^T F \quad (7)$$

를 얻으며, 이렇게 차수 n 으로 축소된 축소시스템을 통하여 시스템의 주파수응답을 효율적으로 계산할 수 있다.

3. 수치 예제

3.1 반모노코크 평판의 주파수응답

첫째 예제로 그림 2와 같이 총 31,051개의 자유도를 가지는 반모노코크 평판의 1/4 유한요소모델을 고려하였다. 사용된 평판의 물성치는 탄성계수 $E=73\text{GPa}$, 포아손비 ν

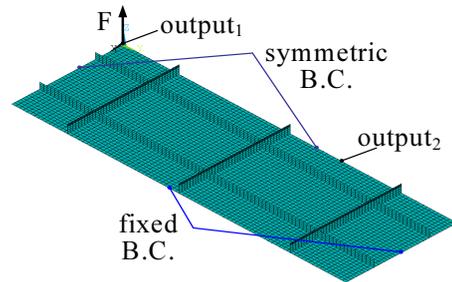


그림 2 Finite element model of a semi-monocoque shell problem

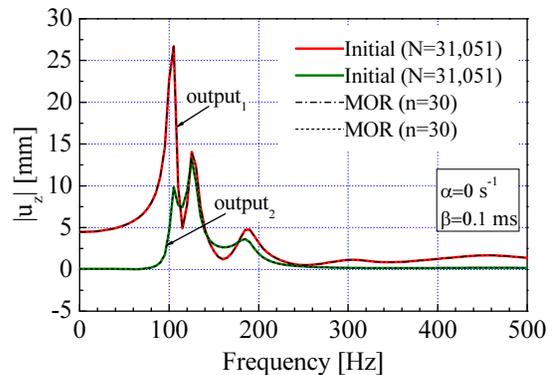


그림 3 Frequency responses

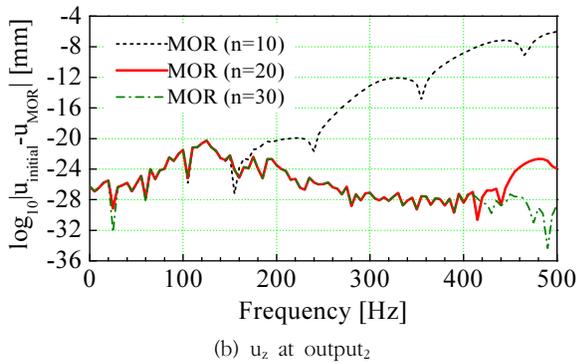
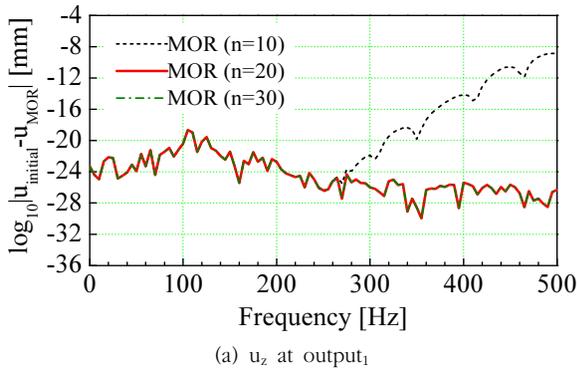


그림 4 True errors according to the order of reduced models

=0.33, 밀도 $\rho=7,850\text{kg/m}^3$ 이다. 평판의 중앙 부분에 $F=1\text{ kN}$ 의 하중이 가해지며 경계조건으로 가장자리는 고정되었고 안쪽 모서리는 대칭 경계조건을 가진다(그림 2 참조). 그림 3과 같이 이 평판의 두 출력점(output₁ 및 output₂)에서 0~500Hz의 주파수응답을 계산하였으며, 두 출력점에서 각각 105 및 125Hz에서 z방향으로의 피크값이 발생함을 알 수 있다. 이 주파수는 이 평판의 첫째 및 둘째 고유진동수인 104 및 126Hz에 해당하는 값이다.

초기 유한요소모델과 $n=30$ 의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답 결과를 함께 도시하였을 때, 그래프 상에서 각 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확히 일치하였다. 구체적인 오차를 확인하기 위하여 그림 4에 초기 유한요소 모델과 축소모델의 주파수응답의 오차를 몇 가지 축소모델의 차수(n)에 따라서 도시하였다. 이 결과로부터 $n=10$ 인 축소모델의 경우도 10^{-4} 의 매우 작은 오차를 보임을 알 수 있다. 다만 출력 주파수 대역이 점차 고주파수 영역으로 되면서 오차가 점차 증가되지만 축소모델의 차수를 $n=20$ 및 30으로 높이면 더 고주파수 대역까지 주파수응답이 일치하게 되는 특징을 관찰할 수 있다. 차수 $n=20$ 인 축소모델로 전 주파수영역에서 10^{-20} 미만의 오차를 가지는 정확한 주파수응답을 얻을 수 있다.

3.2 배열형 2×2 MEMS 공진체의 주파수응답

두 번째로 수백 MHz 주파수 대역에서 발생하는 와인 유리잔 형태의 고유진동모드(extensional wine-glass mode)를 사용하여 높은 작동 주파수 및 Q 인자를 가지도록 고안된 2×2형 MEMS 공진체에 대한 주파수응답을 고려한다.

초기 유한요소모델은 ANSYS의 2,304개의 쉘요소 및 144개의 빔요소로 구성되며 총 15,768개의 자유도를 가진다. 사용된 Si의 물성치는 탄성계수 $E=150\text{GPa}$, 포아손비 $\nu=0.226$, 밀도 $\rho=2,300\text{kg/m}^3$ 이다. 유한요소모델에서 1×1 및 2×1의 링에 표시된 화살표는 입력 구동력(1nN/μm)을 의미하며, 출력응답은 1×2 및 2×2의 공진체의 전극에서 각 단위 공진체의 중심축에 대한 반경 방향으로의 변위로 하였다. 경계조건으로 각 빔의 끝단은 완전 구속되었다(그림 5 참조). 이때, 단위 공진체의 외경, 내경, 두께(b_1), 수직빔의 폭(b_2), 수평빔의 폭(b_3), 수직빔의 길이 및 수평빔의 길이는 각각 28.2, 21.7, 2, 4, 2, 4, 8μm이다.

그림 6은 2×2형 MEMS 공진체의 출력 전극의 두 출력점 ELC₁ 및 ELC₂에서 와인 유리잔 형태 고유진동모드를 사용하는 작동주파수인 636.5~638.5MHz의 주파수응답을 201개의 가진주파수에서 도시하였다. 각 출력점에서 대략 638~638.2MHz 부근에서 피크값이 발생하며 다른 주파수대역에

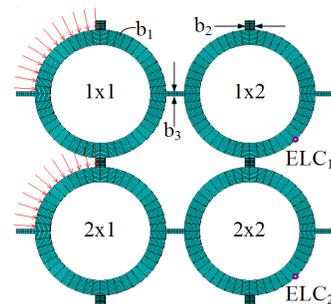


그림 5 Finite element model of an array-type MEMS resonator problem

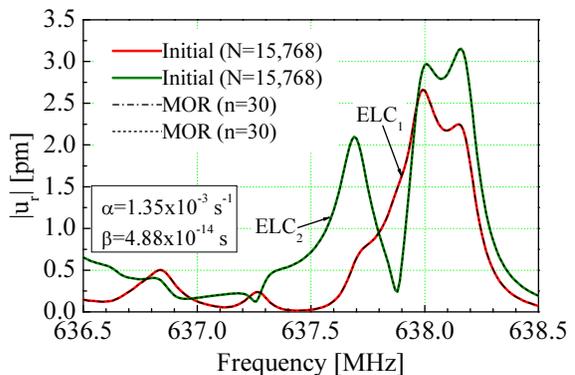


그림 6 Frequency responses

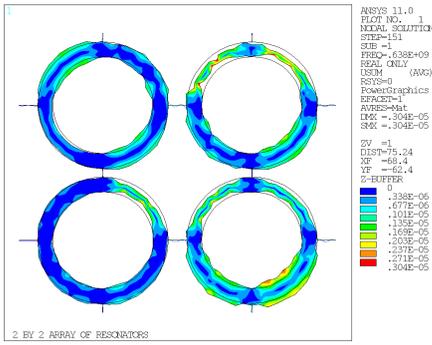
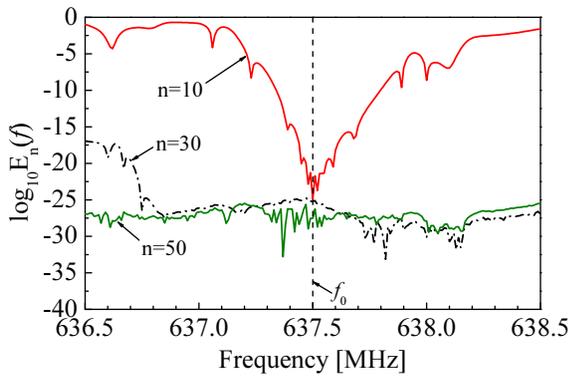
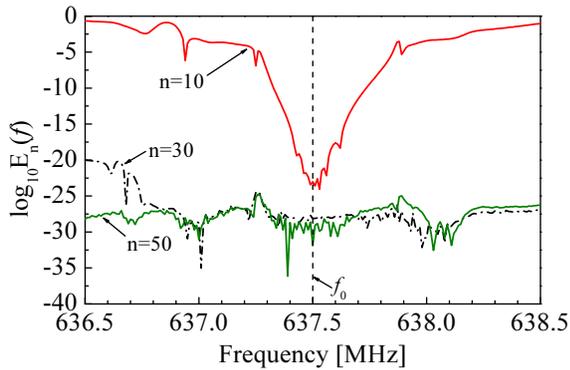


그림 7 Deformed shape around 638 MHz



(a) u at ELC₁



(b) u at ELC₂

그림 8 True relative errors according to the order of reduced models

서는 응답이 작아 신호의 필터 역할을 할 수 있음을 알 수 있다.

그림 7은 주파수응답의 피크값이 발생하는 주파수영역인 638MHz에서의 변형 형상을 나타낸다. 출력점 부근에서 반경 방향으로 주된 변위가 발생하는 와인 유리잔 형태의 변형 형상이 잘 나타남을 확인할 수 있다.

특히, 이 문제와 같이 특정한 고주파수 대역에 대한 주파수응답을 고려하는 경우에는 축소모델의 생성시, $s_0 \neq 0$ 인 관심 주파수영역의 전개점에 대하여 급수전개함으로써 일

반적으로 $s_0=0$ 인 전개점에 대한 축소모델보다 그 주파수 대역에서 더 높은 정확도를 가진 축소모델을 얻을 수 있다. 만약 주파수응답의 관심주파수를 f_0 Hz라고 하면 변환행렬 V 는 다음과 같이 계산되며, $s_0 = -(2\pi f_0)^2$ 이다.

$$\text{colspan}\{V\} = K_n \{ (s_0 M + K)^{-1} M, (s_0 M + K)^{-1} F \} \quad (8)$$

그림 6과 같이 초기 유한요소모델과 $n=30$ 의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답 결과를 함께 도시하였을 때, 그래프 상에서 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확히 일치하였다. 구체적인 오차를 확인하기 위하여 그림 8에는 아래 식 (9)로 계산된 초기 유한요소모델과 축소모델의 주파수응답의 상대오차를 몇 가지 축소모델의 차수에 따라서 도시하였다.

$$E_n(f) = \frac{\| \hat{H}_n(f) - H(f) \|}{\| H(f) \|} \quad (9)$$

이 문제에서는 $f_0=637.5\text{MHz}$ 인 전개점을 사용하였는데, 결과에서 출력 주파수 대역이 전개점에서 멀어지게 되면서 상대오차가 점차 증가되지만 축소모델의 차수를 높이면 더 넓은 주파수 대역까지 주파수응답이 일치하게 됨을 알 수 있다. 결과로부터 관심주파수의 전영역에서 $n=30$ 인 축소모델의 경우는 상대오차 10^{-15} 미만의 결과를 얻을 수 있으며, $n=50$ 인 축소모델로는 주파수영역에서 10^{-25} 미만의 상대오차를 가지는 주파수응답을 계산할 수 있다.

3.3 자동차 차체의 주파수응답

마지막으로 그림 9와 같은 자동차 차체의 주파수응답을 고려하였다. 이 유한요소모델은 91,000여개의 쉘요소와 360여개의 질량요소로 구성되어 최종 절점수는 93,000여개이

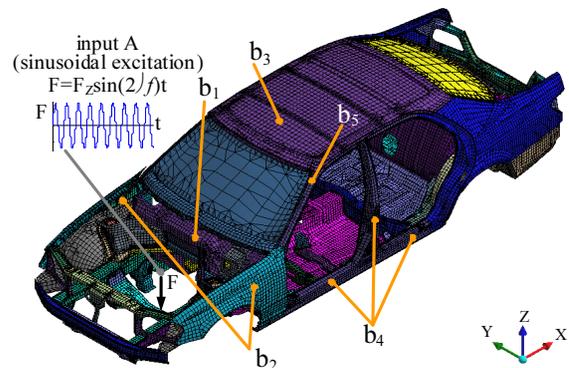
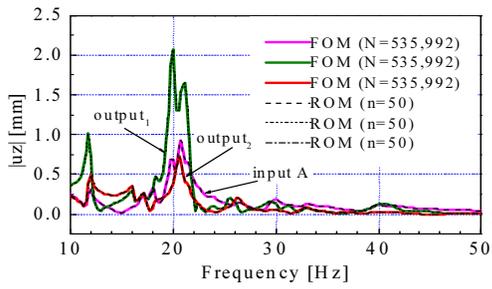
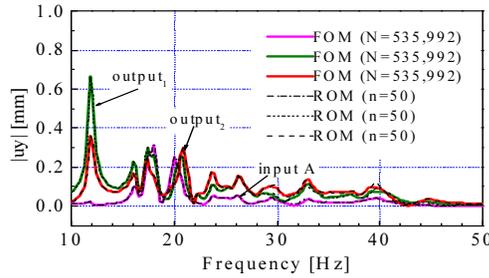


그림 9 Finite element model of a car body problem

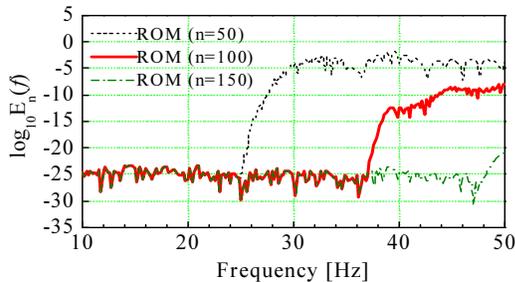


(a) u_z

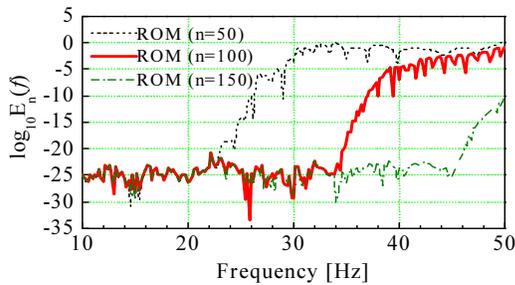


(b) u_y at output₂

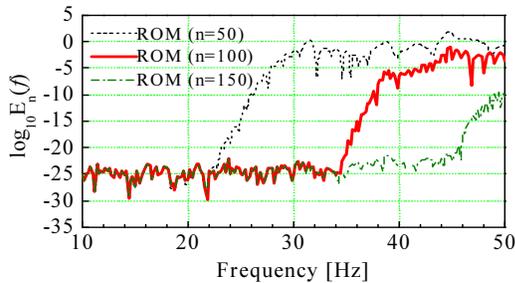
그림 10 Frequency responses



(a) u_z at output A



(b) u_z at output 1



(c) u_z at output 2

그림 11 Relative errors according to the order of reduced models

다. 차체의 두께는 111개의 부분으로 나뉘어져 있으며 0.7~4mm의 두께를 가진다. 그림 9는 하중이 가해지는 위치와 방향을 나타낸다.

그림 10은 1kN 크기의 가진력이 작용할 때, 출력점의 주파수응답을 나타낸다. 초기 유한요소모델과 $n=50$ 의 축소모델로 각각 계산한 주파수응답 결과를 함께 도시하였을 때, 그래프 상에서 각 결과의 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확히 일치하였다. 구체적인 오차를 확인하기 위하여 그림 11에 초기 유한요소모델과 축소모델의 주파수응답의 상대 오차를 몇 가지 축소모델의 차수(n)에 따라서 도시하였다. 이 결과로부터 $n=50, 100, 150$ 인 축소모델의 경우에 각각 22, 34, 46Hz까지 상대오차 10^{-20} 의 매우 작은 오차를 보임을 알 수 있다. $n=150$ 인 축소모델은 고려한 전 주파수영역에서 10^{-10} 미만의 오차를 가지는 정확한 주파수응답을 얻을 수 있다.

3.4 고찰

수치예제를 통하여 본 논문에서 제안한 방법으로 초기 유한요소모델에 비하여 매우 작은 차수의 축소모델을 통하여 주파수응답을 정확하게 계산할 수 있음을 확인하였다. 본 절에서는 각 경우에 소요되는 계산시간을 비교하여 효율성을 정량적으로 비교하였다. 비교를 위한 모든 수치계산은 3.00 GHz의 Intel Xeon CPU 5160과 16GB의 메모리가 탑재된 HP xw8400 워크스테이션에서 MATLAB R2009a로

표 1 Comparison of elapsed CPU time for the semi-monocoque shell problem

	Initial FE models	Reduced models		
		n=10	n=20	n=30
총 자유도 (DOF)	31,051	10	20	30
축소모델 생성 (sec)	-	52.9	74.9	94.9
주파수응답 계산 (sec)	479.9	0.078	0.500	0.562

표 2 Comparison of elapsed CPU time for the 2x2 MEMS resonator problem

	Initial FE models	Reduced models		
		n=10	n=30	n=50
총 자유도 (DOF)	15,768	10	30	50
축소모델 생성 (sec)	-	7.8	16.1	24.9
주파수응답 계산 (sec)	294.1	0.062	0.109	0.937

표 3 Comparison of elapsed CPU time for the carbody problem

	Initial FE models	Reduced models		
		n=50	n=100	n=150
총 자유도 (DOF)	535,992	50	100	150
축소모델 생성 (sec)	-	177	340	508
주파수응답 계산 (sec)	79,530	2.8	3.6	4.8

수행되었다.

초기 유한요소모델에 대해서는 해석모델의 총 자유도, 주파수응답 계산에 소요되는 시간을 표시하였고 축소모델에 대해서는 축소모델을 생성하는데 소요되는 시간, 생성된 축소모델로 주파수응답 계산에 소요되는 시간을 각각 표시하였다.

반모노코크 평판문제, 배열형 2×2 MEMS 공진체 문제 및 자동차 차제 문제의 결과를 각각 표 1~3에 정리하였다. 평판문제에서 $n=20$ 및 30의 축소모델을 사용하면 주파수응답 계산시, 일반적인 방법에 대하여 대략 1/10의 계산비용만이 소요됨을 확인할 수 있다. 두 번째 및 세 번째 문제에서는 축소모델을 사용한 주파수응답의 계산은 첫 번째 문제보다 더욱 효과적임을 알 수 있다.

축소모델을 사용하는 경우, 축소모델을 생성하는 시간을 고려하더라도 매우 작은 계산시간으로 주파수응답을 계산할 수 있음을 알 수 있다. 더욱이 넓은 주파수대역에서 여러 가진주파수에서 주파수응답을 계산하는 경우에는 축소모델을 사용함으로써 계산의 효율성은 더욱 높아짐을 알 수 있다.

4. 결 론

본 기사에서는 Krylov 벡터를 이용한 모델차수축소법을 통하여 생성된 축소모델을 이용한 대형 유한요소모델의 주파수응답 해석을 매우 효율적으로 수행하는 방법을 설명하였다. Krylov 벡터에 근거한 모델차수축소법은 수렴된 고유벡터를 계산하는데 필요한 많은 수치계산을 피하면서도 고유벡터보다 모델축소에 더욱 적합한 부공간을 제공하여 주파수응답, 과도응답에 정확하면서도 효율적인 해석방법으로 활용될 수 있다. 이로써 매우 방대한 계산비용 및 전산 자원을 필요로 하는 대형 유한요소모델에 대한 정확한 주파수응답 및 과도응답의 효율적인 해석 및 최적설계 등이 가능할 것으로 판단된다. 

[담당 : 윤길호 편집위원]