

# Nonlocal 효과를 고려한 탄소나노파이프의 유체유발 진동 Flow-induced Vibration of Carbon Nanopipe with Nonlocal Effect

최종운\* · 김성균\*\* · 송오섭†

Jongwoon Choi, Sung-kyun Kim and Ohseop Song

(2011년 10월 12일 접수 ; 2011년 11월 7일 심사완료)

**Key Words** : Carbon Nanotube(탄소나노튜브), Nanopipe(나노파이프), Flutter(플러터), Divergence(발산), Critical Flow Velocity(임계유속), Scale Effect(크기 효과), Nonlocal Effect(비국부적 효과)

## ABSTRACT

In this paper, flow-induced flutter instability of a cantilever carbon nanotube conveying fluid and modelled as a thin-walled beam is investigated. Analytically nonlocal effect, transverse shear and rotary inertia are incorporated in this study. The governing equations and the boundary conditions are derived through Hamilton's principle. Numerical analysis is performed by using extended Galerkin method which enables us to obtain more exact solutions compared with conventional Galerkin method. Variation of critical flow velocity of carbon nanopipes based on three different models such as analytically nonlocal model, partially nonlocal model, and local model are investigated and pertinent conclusion is outlined.

### 기 호 설 명

- $u_o, v_o, w_o$  :  $X, Y, Z$  축 방향의 병진 변위
- $\theta_X, \theta_Y, \phi$  :  $X, Y, Z$  축에 관한 회전 변위
- $F_w(s), n a(s)$  : 1, 2차 와평함수
- $(n, s, z)$  : 반경방향, 원주방향, 축방향 국부좌표
- $\sigma_{ij}(r)$  : 비국부적 응력텐서
- $\sigma_{ij}'(r')$  : 고전(국부적) 응력텐서
- $\epsilon_{ij}(r')$  : 변형률 텐서
- $\delta_{ij}$  : 크로네크 델타
- $\lambda, \mu$  : Lamé 상수
- $e_n (= \frac{e_0 a}{L})$  : 무차원 길이 스케일
- $e_0$  : 비국부적 스케일링 파라미터

- $b_1$  : 나노파이프의 단위길이 당 질량
- $m_f$  : 유체의 단위길이 당 질량

## 1. 서 론

탄소나노튜브(carbon nanotube, 이하 CNT)는 그 우수한 전기적, 기계적, 물리적, 화학적 특성 때문에 나노전기기계, 나노파이프, 나노센서, 나노작동기, 나노복합재료 등을 위한 요소로서 각광받고 있다. 특히 CNT는 완벽한 중공 실린더 구조로 인하여 가스 저장을 위한 나노 컨테이너와 유체수송용 나노파이프로서 사용될 수 있다. 이 경우, 나노파이프는 내부를 흐르는 유동 유체의 속도에 따라 그 거동 특성이 달라지므로 이에 대한 연구가 필요하다.

Karl Sohlberg 등은<sup>(1)</sup> CNT의 진동문제에 연속체 모델링 방법을 적용하여 분자진동학 방법에 대한 효과적인 대안을 제시하였다.

I. R. Fernandez 등은<sup>(2)</sup> 분자구조역학을 사용하여 구한 양단자유 단일벽(single wall) CNT의 결과와

† 교신저자; 정회원, 충남대학교 기계공학과  
E-mail : songos@cnu.ac.kr  
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642

\* 특허청

\*\* 정회원, 한국원자력연구원

오일러 보(이하 EB) 연속체이론에 기초한 결과를 비교하여 중횡비가 클수록, 원자수가 증가할수록 두 방법의 결과가 유사하다는 것을 밝히고, 작은 중횡비의 CNT를 해석할 경우, 두 방법을 이용한 결과의 상이성을 줄이기 위해 전단변형과 회전관성효과를 고려하여야 함을 주장하였다.

특히 CNT 유체유발 진동에 관하여 J. Yoon 등<sup>(3,4)</sup>은 단순지지, 고정지지의 각 경우에 EB이론에 기초하여, J. W. Choi 등<sup>(5,6)</sup>은 티모셴코 보(이하 TB)이론에 기초하여 유체유동이 자유진동 및 플러터 불안정에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

그 후, strain gradient model, couple stress model, nonlocal stress model 같이 나노스케일 효과를 고려한 진보된 연속체 모델이 제시되었다. 특히, 비국부적 응력 모델(nonlocal stress model)<sup>(7)</sup>은 나노스케일 효과를 충분히 반영한 효과적인 모델이다.

P. Soltani<sup>(8)</sup>, H.-L. Lee<sup>(9,10)</sup>, L. Wang<sup>(11)</sup> 등은 비국부적 응력을 고려한 SWCNT의 유체유발 진동 연구를 EB이론에 기초하여 수행하였다. 여기에서 비국부적 응력이론은 고전모델을 확장한 것으로서 부분적 비국부 이론(partially nonlocal theory; 이하 PNT)이라 불리는 데, 강성을 작게 예측하는 단점이 있어서 실험결과나 분자동역학 결과와 차이가 발생하였다.

Y. Yang 등은<sup>(12)</sup> 이러한 모순을 해결하기 위하여 분석적 비국부이론(analytically nonlocal theory; 이하 ANT) 모델을 연구하여 CNT의 파동전파 문제에 적용하였다.

최근 탄소나노파이프의 유체유발 진동에 관한 연구는 상기 연구들에서 볼 수 있듯이, PNT를 적용하여 수행되었으며<sup>(8-11)</sup>, 비국부 고차항 등의 영향이 무시되어 그 결과의 신뢰도가 의심된다.

이 연구에서는 전단변형과 회전관성의 영향을 고려한 박판 보(thin-walled beam)<sup>(13-15)</sup> 및 진보된 ANT 모델에 기초하여 외팔보 탄소나노파이프의 고유진동수 및 유체유발 플러터 불안정성 경향을 도출하고 이들 결과를 PNT 모델과 비국부 효과를 고려하지 않은 고전 모델과 비교/고찰하였다.

## 2. 구조 모델링

### 2.1 박판 보 모델의 변위장

나노나노파이프 내의 한 점 A의 변위 벡터를 6개의

변위변수(kinematic variables)로 표시하면 다음과 같다(Fig. 1).

$$\begin{aligned}
 u(s, z, t) &= u_o(z, t) - Y(s) \phi(z, t) \\
 v(s, z, t) &= v_o(z, t) + X(s) \phi(z, t) \\
 w(s, z, n, t) &= \\
 &= w_o(z, t) + \theta_Y(z, t) [X(s) + n \frac{dY}{ds}] \quad (1) \\
 &+ \theta_X(z, t) [Y(s) - n \frac{dX}{ds}] \\
 &- \phi'(z, t) [F_w(s) + n a(s)]
 \end{aligned}$$

### 2.2 비국부장 이론

격자동역학 원자이론에 기초한 비국부적 연속체 탄성장이론은 Eringen<sup>(7)</sup>에 의해 처음으로 제시되었다. 이 이론에 의하면, 탄성체 어느 한 점에서의 비국부적 응력은 그 점에서의 변형률뿐만 아니라 그 물체의 모든 다른 점에서의 변형률에 의하여 결정된다.

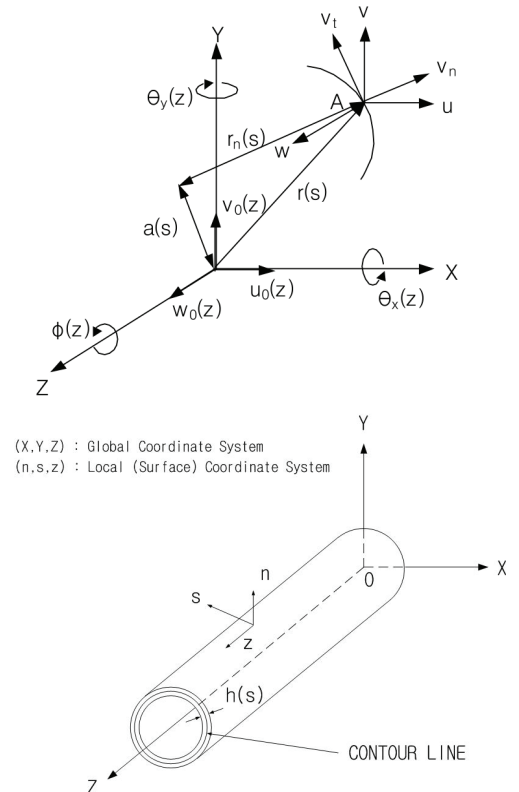


Fig. 1 Kinematic variables, coordinate system and configuration of thin-walled beam

비국부적 이론의 구성방정식은 다음과 같다<sup>(12)</sup>.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r) &= \int_{\Omega} \alpha(|r'-r|, e_n) \sigma'_{ij}(r') d\Omega \\ \sigma'_{ij}(r') &= \lambda \epsilon_{kk}(r') \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(r') \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서, 비국부적 모듈  $\alpha$  는  $|r'-r|$ 와  $e_n$ 의 함수이다. 그리고  $a$ 는 내부특성길이(internal characteristic length)로서 CNT에서 탄소와 탄소 사이의 거리(0.142 nm)를 의미하며,  $e_0$ 는 CNT에서 0.29에서 8.79까지의 값을 가지는 것으로 알려져 있다<sup>(16)</sup>. 그러나 상기 식(2)는 분석적인 방법으로 취급하기가 어려워 Eringen<sup>(7)</sup>은 다음의 미분방정식으로 표현하였다<sup>(12)</sup>.

$$(1 - e_0 a^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} \quad (3)$$

### 2.3 운동방정식과 경계조건

다음과 같은 해밀턴의 변분원리를 이용하여 나노파이프의 운동방정식과 경계조건을 유도한다.

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_1} (-\delta V + \delta K + \delta W_f) dt = 0 \\ @t = t_0, t = t_1: \end{aligned} \quad (4)$$

$$\delta u_o = \delta v_o = \delta w_o = \delta \theta_Y = \delta \theta_X = \delta \phi = 0$$

식(4)에서 ANT 모델에서 나노파이프의 변형 에너지  $V$ 는 다음과 같다<sup>(12)</sup>.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\tau} (v_1 + v_2 + v_3) d\tau \quad (5)$$

여기에서,  $v_1, v_2, v_3$ 는 다음과 같으며,  $\langle \rangle$ 는 미분차수를 의미한다.

$$v_1 = \frac{1}{2} E \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (e_0 a)^{2n} (\epsilon_Z^{\leq n})^2 \quad (6a)$$

$$v_2 = E \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (e_0 a)^{2(n+1)} \sum_{m=1}^n [(-1)^{m+1} \epsilon_Z^{\leq m} \epsilon_Z^{\leq 2(n+1)-m}] \right\} \quad (6b)$$

$$v_3 = \frac{1}{2} E \epsilon_Z^2 \quad (6c)$$

PNT에 의한 나노파이프의 변형에너지는 식(3)을

사용하여, 국부적 응력이론(고전 연속체이론)식에 응력 및 굽힘모멘트의 식을 대입하여 구한다<sup>(8-11)</sup>.

식(4)에서 운동에너지  $K$ 는 나노파이프의 운동에너지( $K_p$ )와 유체유동의 운동에너지( $K_f$ )의 합으로 표현되며 나노파이프 운동에너지는 다음과 같다.

$$K_p = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau \quad (7)$$

파이프의 변형에 의한 2차유동이 없다고 가정할 때, 유체의 운동은 파이프의 중심선을 따라 움직인다. 따라서 변형 후 파이프 중심선의 임의의 점에 대한 위치벡터를  $\vec{R}_{pc}$ , 유체의 위치벡터를  $\vec{R}_{f/pc}$ 라 할 때 그 관계식은 다음과 같다(Fig. 2).

$$\vec{R}_f = \vec{R}_{pc} + \vec{R}_{f/pc} \quad (8)$$

여기에서,  $\vec{R}_{pc}$ 와  $\vec{R}_{f/pc}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{R}_{pc} = u\vec{I} + v\vec{J} + (z+w)\vec{K} \quad (9)$$

$$\vec{R}_{f/pc} = x_b\vec{i}_b + y_b\vec{j}_b \quad (10)$$

$\theta_Y, \theta_X, \phi \ll 1$ 일 때,  $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ 와  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  사이의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \theta_Y \\ -\phi & 1 & \theta_X \\ -\theta_Y - \theta_X & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \quad (11)$$

그러므로 유동유체의 운동에너지는 다음과 같다.

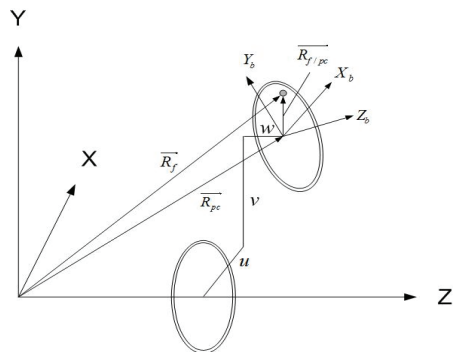


Fig. 2 Displacement of nanopipe and fluid

$$K_f = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_f \vec{R}_f \cdot \vec{R}_f d\tau \quad (12)$$

끝단(z=L)에서 유속 U에 의한 가상일( $\delta W_f$ )은 비보존적이며 다음과 같다.

$$\delta W_f = - \int_0^{2\pi} \int_0^{(R-\frac{h}{2})} \rho_f U[(\dot{u}_0 + Uu_0')\delta u_0 + (\dot{v}_0 + Uv_0')\delta v_0 + \dot{w}_0\delta w_0]_{z=L} r dr d\theta \quad (13)$$

식 (5), (7), (12), (13)을 식 (4)에 대입하면 다음과 같은 굽힘 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\delta u_0 : a_{44}(u_0'' + \theta_Y')$$

$$= b_1 \ddot{u}_0 + m_f \ddot{u}_0 + 2m_f U \dot{u}_0' + m_f U^2 u_0''$$

$$\delta \theta_Y : a_{22} \theta_Y'' - a_{44}(u_0' + \theta_Y) - a_{22}(e_0 a)^2 \theta_Y''''$$

$$- 3a_{22}(e_0 a)^4 \theta_Y'''''' = (b_5 + b_{15}) \ddot{\theta}_Y \quad (14)$$

외팔보 경계조건

$$\text{at } z = 0 ; u_0 = \theta_Y = 0$$

$$\text{at } z = L ; a_{44}(u_0' + \theta_Y) = 0, a_{22} \theta_Y' = 0 \quad (15)$$

여기에서,

$$a_{44} = \int_C [K_{22}(\frac{dx}{ds})^2 + A_{44}(\frac{dy}{ds})^2] ds \quad (16a)$$

$$a_{22} = \int_C [K_{11}x^2 + K_{44}(\frac{dy}{ds})^2] ds \quad (16b)$$

는 각각 전단 및 굽힘 강성계수이다<sup>(15)</sup>.

### 3. 수치 해석

#### 3.1 무차원화(Dimensionless)

다음과 같이 무차원화된 파라미터를 가정한다.

$$\xi = \frac{z}{L}, \quad \bar{\eta}(\xi, T) = \frac{u_0(z, t)}{L}, \quad \bar{\theta}_Y(\xi, T) = \theta_Y(z, t),$$

$$\beta = \frac{m_f}{b_1 + m_f}, \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{m_f L^2}{a_{22}}} U, \quad \sigma = \frac{a_{22}}{a_{44} L^2},$$

$$T = \sqrt{\frac{a_{22}}{b_1 + m_f}} \frac{t}{L^2}, \quad \gamma = \left( \frac{b_5 + b_{15}}{b_1 + m_f} \right) \frac{1}{L^2},$$

$$e_n = \frac{e_0 a}{L} \quad (17)$$

식 (17)을 운동방정식 (14) 및 경계조건 (15)에 대입하면, 다음과 같은 무차원화된 식을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\bar{\theta}_Y' + \bar{\eta}'' = \sigma \bar{\eta} + 2\sigma \bar{u} \beta^{\frac{1}{2}} \bar{\eta}' + \sigma \bar{u}^2 \bar{\eta}''$$

$$\sigma \bar{\theta}_Y'' - \bar{\theta}_Y - \bar{\eta}'$$

$$- \sigma (e_n^2 \bar{\theta}_Y'''' + 3e_n^4 \bar{\theta}_Y''''') = \sigma \gamma \bar{\theta}_Y \quad (18)$$

외팔보 경계조건

$$\text{at } \xi = 0 ; \bar{\eta} = \bar{\theta}_Y = 0$$

$$\text{at } \xi = 1 ; \bar{\theta}_Y + \bar{\eta}' = 0, \quad \sigma \bar{\theta}_Y' = 0 \quad (19)$$

여기에서,  $(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial T}$ ,  $(\prime) = \frac{\partial(\quad)}{\partial \xi}$  이다.

#### 3.2 고유치 문제 및 모드 형상

Extended Galerkin's method를 사용하여 위의 고유치문제의 해를 구하기 위하여 다음과 같이 해를 가정한다.

$$\bar{\eta}(\xi, T) = \sum_{j=1}^N a_j(T) \phi_j^{(1)}(\xi) \quad (20a)$$

$$\bar{\theta}_Y(\xi, T) = \sum_{j=1}^N b_j(T) \phi_j^{(2)}(\xi) \quad (20b)$$

외팔보인 경우, 시험함수  $\phi_j$  는 내부 유동유체가 없는 경우의 한단 고정, 타단 자유의 경계 조건을 만족 시키는 TB의 고유함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_j^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\omega_j^2} (-\phi_j^{(2)}(\xi))'''' \quad (21a)$$

$$\phi_j^{(2)}(\xi) = -[q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j \xi)$$

$$+ [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j \xi)$$

$$+ [q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j \xi)$$

$$+ \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j \xi) \quad (21b)$$

여기에서,  $p_j, q_j$  는 다음과 같으며,  $s_j$  는 외팔보의  $j$ 번째 고유치이다.

$$(p_j^2, q_j^2) = \frac{1}{2} (\pm \sigma s_j^2 + \sqrt{\sigma^2 s_j^4 + 4s_j^2}) \quad (22)$$

위 식 (21)을 운동방정식 (18)과 경계조건식 (19)에 대입한 후  $j=1$ 부터  $N$ 까지 extended Galerkin 적분을 행하고 행렬식으로 정리하면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (23)$$

여기서,  $\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$  및  $[M], [C], [K]$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}\} &= \begin{bmatrix} \ddot{a}_j \\ \ddot{b}_j \end{bmatrix}, \{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} \dot{a}_j \\ \dot{b}_j \end{bmatrix}, \{q\} = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} \\ M_{ij}^{(11)} &= \sigma \int_0^1 \phi_j^{(1)} \phi_i^{(1)} d\xi \\ M_{ij}^{(22)} &= \gamma \sigma \int_0^1 \phi_j^{(2)} \phi_i^{(2)} d\xi \\ C_{ij}^{(11)} &= 2\beta^2 \sigma \bar{u} \int_0^1 \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)} d\xi \\ K_{ij}^{(11)} &= \sigma \bar{u}^2 \int_0^1 \phi_j^{(1)''} \phi_i^{(1)} d\xi \\ &\quad - \int_0^1 \phi_j^{(1)'''} \phi_i^{(1)} d\xi + [\phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)}]_0^1 \\ K_{ij}^{(12)} &= - \int_0^1 \phi_j^{(2)'} \phi_i^{(1)} d\xi + [\phi_j^{(2)} \phi_i^{(1)}]_0^1 \\ K_{ij}^{(21)} &= \int_0^1 \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(2)} d\xi \\ K_{ij}^{(22)} &= -\sigma \int_0^1 \phi_j^{(2)''} \phi_i^{(2)} d\xi + \int_0^1 \phi_j^{(2)} \phi_i^{(2)} d\xi \\ &\quad + \sigma e_n^2 \int_0^1 \phi_j^{(2)''''} \phi_i^{(2)} d\xi \\ &\quad + 3\sigma e_n^4 \int_0^1 \phi_j^{(2)''''''} \phi_i^{(2)} d\xi + [\phi_j^{(2)'} \phi_i^{(2)}]_0^1 \end{aligned} \quad (24)$$

식 (23)을 상태공간방법으로 표현하면, 다음과 같다.

$$\{\dot{Z}\} = [A]\{Z\} \quad (25)$$

여기서,  $\{Z\} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ ,  $[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$ .

식 (25)의 해는  $e^{\lambda t}$  형태이며  $[[A] - \lambda I] = 0$ 을 만족시키는 고유치  $\bar{\lambda}_r$ 에 의해 그 거동이 결정된다. 고유치는 감쇠가 존재하는 경우 다음과 같은 복소수의 형태로 표현된다.

$$\bar{\lambda}_r = \bar{\alpha}_r \pm i\bar{\omega}_r \quad (26)$$

여기서,  $\bar{\alpha}_r$  은 감쇠,  $\bar{\omega}_r$  은 고유진동수를 나타낸다.

이 연구의 수치해석에 사용된 나노파이프 및 유체의 재료 특성과 기하학적 특성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E &= 1 \text{ TPa}, \quad G = 0.4 \text{ TPa}, \quad \nu = 0.25, \\ \rho_{out} &= 2.3 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_f = 1 \text{ g/cm}^3, \quad h = 0.34 \text{ nm} \end{aligned}$$

### 3.3 안정성

나노파이프의 안정성은 식 (26) 고유치  $\bar{\lambda}_r$ 의 실수부인  $\bar{\alpha}_r$ 의 부호에 의해 결정된다. 즉,  $\bar{\alpha}_r < 0$ 이면 안정,  $\bar{\alpha}_r > 0$ 이면 불안정이다. 특히,  $\bar{\alpha}_r > 0$ 인 경우 중,  $\bar{\omega}_r \neq 0$ 이면 플러터(flutter) 형태의 불안정,  $\bar{\omega}_r = 0$ 이면 발산(divergence) 형태의 불안정성을 나타내게 된다.

### 3.4 무차원 상대 유속

무차원화 된 유속의 상대비교를 위해, 상대 유속을 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{U}_{rel} = \bar{u} \bar{R} \frac{1}{L} \quad (27)$$

여기에서,  $\bar{R} = \sqrt{\frac{m_f^*}{a_{22}^*}} / \sqrt{\frac{m_f}{a_{22}}}$ ,  $\bar{L} = \frac{L}{L^*}$ 이며,  $( )^*$

는  $h=0.34 \text{ nm}$ ,  $L=13.6 \text{ nm}$ ,  $R_{out}=0.68 \text{ nm}$ 일 때의 수치이다.

## 4. 수치 해석 결과 및 고찰

Tables 1, 2는  $L/2R_{out} = 10$ ,  $h = 0.34$ 으로 고정하고,  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.6, 0.9인 경우에,  $e_0$ 값의 변화 (0.29-8.79)<sup>(16)</sup>에 따른 외팔보의 고유진동수 변화를 고전이론(CT), 부분적 비국부이론(PNT), 분석적 비국부이론(ANT)으로 나누어 3차 모드까지 비교하였다. 특히, PNT, ANT에 있어서는 비국부 고차항의 영향을 살펴보기 위하여 4차까지만 고려한 경우와 6차까지 고려한 경우로 나누어 살펴봐왔다.

Tables 1, 2에서 PNT는 CT와 비교하여 고유진동수를 다소 작게 예측하며, ANT는 다소 크게 예측

함을 알 수 있다. 특히, 비국부적 스케일링 파라미터 값( $e_0$ )이 커질수록, 모드 수가 증가할수록 그 경향이 커짐을 알 수 있다. 비국부적 이론을 적용 할 경우, CNT 내부의 탄소들 사이의 결합력이 증가하여

강성이 커지는 영향을 고려할 때 CT의 경우보다 고유진동수가 커지는 것이 타당하다. 이는 ANT에 의한 해석이 PNT보다 좀 더 정확한 결과예측이 가능하다는 것을 보여준다.  $e_0$ 값이 증가함에 따라, ANT의 경우 고유진동수 값이 점점 커짐을 알 수 있는데, 이는 결합력이 증가 할수록 CNT 구조물의 강성이 증가하기 때문으로 판단된다.  $R_{in}/R_{out}=0.6$ 인 경우가  $R_{in}/R_{out}=0.9$ 인 경우보다 이 경향이 뚜렷함을 보이는데, 크기가 작을수록 구조물이 크기효과(scale

**Table 1** Variation of natural frequencies with  $e_0$  ( $R_{in}/R_{out} = 0.6, L/2R_{out} = 10, h = 0.34$ )

| $e_0(e_n)$        | $\omega$                         |         |         |         |
|-------------------|----------------------------------|---------|---------|---------|
|                   | CT ; 3.49149 / 21.0271 / 55.6322 |         |         |         |
|                   | PNT                              |         | ANT     |         |
|                   | 4th                              | 6th     | 4th     | 6th     |
| 0.29<br>(0.00242) | 3.49145                          | 3.49145 | 3.49154 | 3.49154 |
|                   | 21.0252                          | 21.0252 | 21.029  | 21.029  |
|                   | 55.6213                          | 55.6213 | 55.6431 | 55.6431 |
| 1.99<br>(0.01662) | 3.48924                          | 3.48924 | 3.49372 | 3.49371 |
|                   | 20.9369                          | 20.9373 | 21.1157 | 21.1146 |
|                   | 55.1119                          | 55.1191 | 56.1397 | 56.1192 |
| 3.69<br>(0.03082) | 3.48358                          | 3.48361 | 3.49903 | 3.49897 |
|                   | 20.7097                          | 20.7143 | 21.3261 | 21.3135 |
|                   | 53.7814                          | 53.8711 | 57.3297 | 57.0968 |
| 5.39<br>(0.04502) | 3.47395                          | 3.47412 | 3.50722 | 3.50697 |
|                   | 20.318                           | 20.3418 | 21.6482 | 21.5919 |
|                   | 51.4121                          | 51.8812 | 59.1158 | 58.1013 |
| 7.09<br>(0.05922) | 3.45856                          | 3.45978 | 3.51804 | 3.51721 |
|                   | 19.6803                          | 19.783  | 22.0683 | 21.901  |
|                   | 47.2835                          | 49.187  | 61.3872 | 58.4447 |
| 8.79<br>(0.07342) | 3.42468                          | 3.43867 | 3.53121 | 3.52857 |
|                   | 18.2172                          | 18.9644 | 22.5742 | 22.1653 |
|                   | 37.3968                          | 46.1247 | 64.041  | 56.7614 |

**Table 2** Variation of natural frequencies with  $e_0$  ( $R_{in}/R_{out} = 0.9, L/2R_{out} = 10, h = 0.34$ )

| $e_0(e_n)$        | $\omega$                         |         |         |         |
|-------------------|----------------------------------|---------|---------|---------|
|                   | CT ; 3.48634 / 20.8282 / 54.5271 |         |         |         |
|                   | PNT                              |         | ANT     |         |
|                   | 4th                              | 6th     | 4th     | 6th     |
| 0.29<br>(0.00061) | 3.48634                          | 3.48634 | 3.48634 | 3.48634 |
|                   | 20.8281                          | 20.8281 | 20.8283 | 20.8283 |
|                   | 54.5265                          | 54.5265 | 54.5277 | 54.5277 |
| 1.99<br>(0.00416) | 3.4862                           | 3.4862  | 3.48648 | 3.48648 |
|                   | 20.8228                          | 20.8228 | 20.8336 | 20.8336 |
|                   | 54.4975                          | 54.4975 | 54.5567 | 54.5566 |
| 3.69<br>(0.00771) | 3.48586                          | 3.48586 | 3.48681 | 3.48681 |
|                   | 20.8097                          | 20.8097 | 20.8466 | 20.8466 |
|                   | 54.425                           | 54.4253 | 54.6286 | 54.6277 |
| 5.39<br>(0.01126) | 3.48532                          | 3.48532 | 3.48735 | 3.48735 |
|                   | 20.7887                          | 20.7887 | 20.8674 | 20.8672 |
|                   | 54.3086                          | 54.31   | 54.743  | 54.739  |
| 7.09<br>(0.01481) | 3.48458                          | 3.48458 | 3.48808 | 3.48808 |
|                   | 20.7596                          | 20.7598 | 20.8959 | 20.8953 |
|                   | 54.1475                          | 54.1516 | 54.8992 | 54.8873 |
| 8.79<br>(0.01836) | 3.48362                          | 3.48362 | 3.48901 | 3.48901 |
|                   | 20.7224                          | 20.7229 | 20.9319 | 20.9304 |
|                   | 53.9403                          | 53.9501 | 55.0961 | 55.0682 |

**Table 3** Variation of relative critical velocities,  $\overline{U}_{rel,cr}$  with  $e_0(R_{in}/R_{out} = 0.6)$

| $e_0(e_n)$        | $\overline{U}_{rel,cr}$ |       |       |       |
|-------------------|-------------------------|-------|-------|-------|
|                   | CT ; 5.330(2nd)         |       |       |       |
|                   | PNT                     |       | ANT   |       |
|                   | 4th                     | 6th   | 4th   | 6th   |
| 0.29<br>(0.00242) | 5.330                   | 5.330 | 5.330 | 5.330 |
|                   | (2nd)                   | (2nd) | (2nd) | (2nd) |
| 1.99<br>(0.01662) | 5.310                   | 5.310 | 5.350 | 5.350 |
|                   | (2nd)                   | (2nd) | (2nd) | (2nd) |
| 3.69<br>(0.03082) | 5.260                   | 5.260 | 5.400 | 5.400 |
|                   | (2nd)                   | (2nd) | (2nd) | (2nd) |
| 5.39<br>(0.04502) | 5.160                   | 5.160 | 5.480 | 5.480 |
|                   | (2nd)                   | (2nd) | (2nd) | (2nd) |
| 7.09<br>(0.05922) | 4.980                   | 5.000 | 5.580 | 5.570 |
|                   | (2nd)                   | (2nd) | (2nd) | (2nd) |
| 8.79<br>(0.07342) | 3.710                   | 4.740 | 5.700 | 5.900 |
|                   | (2nd)                   | (2nd) | (2nd) | (2nd) |

**Table 4** Variation of relative critical velocities,  $\overline{U}_{rel,cr}$  with  $e_0(R_{in}/R_{out} = 0.9)$

| $e_0(e_n)$        | $\overline{U}_{rel,cr}$ |       |       |       |
|-------------------|-------------------------|-------|-------|-------|
|                   | CT ; 4.023(3rd)         |       |       |       |
|                   | PNT                     |       | ANT   |       |
|                   | 4th                     | 6th   | 4th   | 6th   |
| 0.29<br>(0.00061) | 4.023                   | 4.023 | 4.023 | 4.023 |
|                   | (3rd)                   | (3rd) | (3rd) | (3rd) |
| 1.99<br>(0.00416) | 4.023                   | 4.023 | 4.027 | 4.027 |
|                   | (3rd)                   | (3rd) | (3rd) | (3rd) |
| 3.69<br>(0.00771) | 4.019                   | 4.019 | 4.031 | 4.031 |
|                   | (3rd)                   | (3rd) | (3rd) | (3rd) |
| 5.39<br>(0.01126) | 4.010                   | 4.010 | 4.040 | 4.040 |
|                   | (3rd)                   | (3rd) | (3rd) | (3rd) |
| 7.09<br>(0.01481) | 3.997                   | 3.997 | 4.053 | 4.053 |
|                   | (3rd)                   | (3rd) | (3rd) | (3rd) |
| 8.79<br>(0.01836) | 3.980                   | 3.980 | 4.066 | 4.066 |
|                   | (3rd)                   | (3rd) | (3rd) | (3rd) |

effect)에 더욱 민감하기 때문에 사료된다.

또한, 비국부 고차항을 4차와 6차까지 고려한 경우를 비교하면,  $R_{in}/R_{out}=0.6$ 인 경우에는  $e_0$  값의 증가에 따라 고유진동수값이 차이를 보이나,  $R_{in}/R_{out}=0.9$ 인 경우는 동일한 고유진동수값을 나타낸다. 이 또한 크기가 작을수록 구조물이 크기효과(scale effect)에 더욱 민감하게 반응하기 때문인 것으로 사료된다. 그러므로 크기가 작은 구조물일수록 비국부 고차항의 차수를 늘리는 것이 바람직하다.

Tables 3, 4는  $L/2R_{out} = 10$ ,  $h = 0.34$ 으로 고정하고,  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.6, 0.9인 경우에,  $e_0$  값의 변화 (0.29-8.79)<sup>(16)</sup>에 따른 외팔보의 플러터 불안정성을 발생시키는 임계유속 변화를 고전이론(CT), 부분적 비국부이론(PNT), 분석적 비국부이론(ANT)으로

나누어 살펴보았다.

특히, PNT, ANT에 있어서는 비국부 고차항의 영향을 살펴보기 위하여 4차까지만 고려한 경우와 6차까지 고려한 경우로 나누어 살펴보았으며, Figs. 3, 4는 Tables 3, 4의 결과를 그림으로 표현한 것이다.

Tables 3, 4 및 Figs. 3, 4로부터,  $e_0$  값이 증가 시, CT와 비교하여 PNT의 경우 임계유속이 감소하고, ANT 경우는 임계유속이 증가함을 알 수 있다. 비국부적 스케일링 파라미터값( $e_0$ )이 커질수록 비국부적 효과가 커지는데, 고유진동수의 경우와 마찬가지로 CNT 내부 탄소들의 결합력이 증가하여 CNT 구조물의 강성이 증가하므로 임계유속이 CT의 경우보다 커지게 된다. 이 또한 ANT에 의한 해석이 PNT보다 더 정확한 결과 예측이 가능하다는 것을 보여준다. 또한,  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.6인 경우가  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.9인 경우보다 크기 효과(scale effect)에 더욱 민감하게 반응하는 것으로 보인다.

또한, 비국부 고차항을 4차까지만 고려한 경우와 6차까지 고려한 경우를 비교하면,  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.6인 경우에는  $e_0$  값이 점점 증가함에 따라서 임계유속값이 차이를 보이나,  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.9인 경우는 차이가 없이 동일한 임계유속값을 나타낸다. 이 원인 역시 Tables 1, 2의 고유진동수 경우와 다른없는 것으로 사료된다.

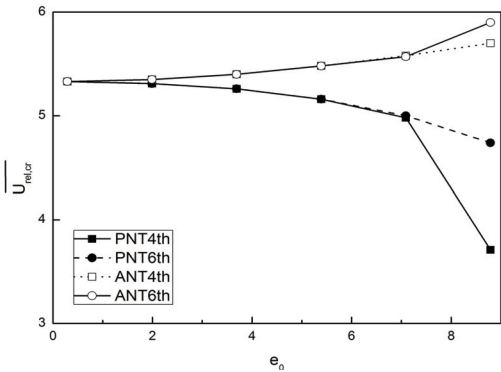


Fig. 3 Variation of relative critical velocities,  $\overline{U}_{rel,cr}$  with  $e_0$  ( $R_{in}/R_{out} = 0.6$ )

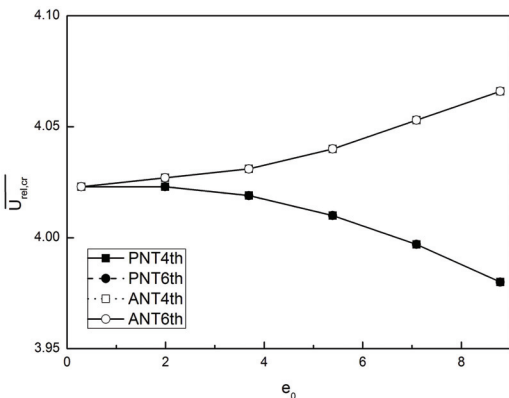


Fig. 4 Variation of relative critical velocities,  $\overline{U}_{rel,cr}$  with  $e_0$  ( $R_{in}/R_{out} = 0.9$ )

## 5. 결 론

이 연구에서, ANT에 기초한 CNT의 유체유발 진동 모델을 정립하고, 유동속도를 증가시켜가면서 CNT에 플러터가 발생하는 임계유속을 계산하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 분석적 비국부 방법(ANT)이 고전이론(CT)보다 임계유속값을 크게 예측(overestimates)한다.
- (2) 비국부적 스케일링 파라미터값( $e_0$ )이 커질수록 임계유속이 증가하는데, 이는 CNT 내부 탄소들의 결합력이 증가하여 CNT 구조물의 강성이 증가하기 때문이다
- (3) 크기가 작을수록 구조물이 크기 효과(scale effect)에 더욱 민감하게 반응하므로 비국부 고차항의 차수를 늘려서 계산하는 것이 바람직하다.
- (4) 비국부 방법에 의한 나노 구조물의 해석은

탄소 간 결합 길이나 격자 변수 등 구조물에 영향을 미치는 크기 효과가 반영되었기 때문에 이를 고려하지 않은 고전 이론의 한계를 극복할 수 있다.

(5) 분석적 비국부 이론(ANT)에 의한 문제 접근은 부분적 비국부 이론(PNT)에 의한 물리적 모순을 제거하고 실험치에 근접한 결과를 얻을 수 있는 최선의 방법으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

(1) Sohlberg, K., Sumpter, B. G., Tuzun, R. E. and Noid, D. W., 1998 Continuum Methods of Mechanics as a Simplified Approach to Structural Engineering of Nanostructures, *Nanotechnology*, Vol. 9, No. 1, pp. 30~36.

(2) Fernandez, I. R., Fangohr, H. and Bhaskar, A., 2006, Normal Modes of Carbon Nanotubes : Similarities and Differences with Their Continuum Counterpart, *Journal of Physics : Conference Series* 26, pp. 131~134.

(3) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2005, Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 9, pp. 1326~1336.

(4) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2006, Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 11-12, pp. 3337~3349.

(5) Choi, J. W., Gil, B. R. and Song, O. S., 2008, Flow-induced Vibration of Carbon Nanotubes Conveying Fluid, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 6, pp. 654~662.

(6) Choi, J. W. and Song, O. S., 2008, Effect of Boundary Conditions on the Stability Characteristics of Nanopipes, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 10, pp. 1057~1064.

(7) Eringen, A. C., 2002, *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer.

(8) Soltani, P., Taherian, M. M. and Farshidianfar, A., 2010, Vibration and Instability of a Viscous-fluid-conveying Single-walled Carbon Nanotube Embedded in a Visco-elastic Medium, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 43, No. 42, 425401.

(9) Lee, H.-L. and Chang, W.-J., 2008, Free Transverse Vibration of The Fluid-conveying Single-walled Carbon Nanotube Using Nonlocal Elastic Theory, *Journal of Applied Physics*, Vol. 103, No. 2, 024302.

(10) Lee, H.-L. and Chang, W.-J., 2009, Vibration Analysis of a Viscous-fluid-conveying Single-walled Carbon Nanotube Embedded in an Elastic Medium, *Physica E*, Vol. 41, No. 4, pp. 529~532.

(11) Wang, L., 2009, Vibration and Instability Analysis of Tubular Nano- and Micro-beams Conveying Fluid Using Nonlocal Elastic Theory, *Physica E*, Vol. 41, No. 10, pp. 1835~1840.

(12) Yang, Y., Zhang, L. and Lim, C. W., 2011, Wave Propagation in Double-walled Carbon Nanotubes on a Novel Analytically Nonlocal Timoshenko-beam Model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 8, pp. 1704~1717.

(13) Paidoussis, M. P., 1998, *Fluid-structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 1, Academic Press.

(14) Choi, J. W. and Song, O. S., 2001, Stability Analysis of Composite Material Pipes Conveying Fluid, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 11, No. 8, pp. 314~321.

(15) Librescu, L. and Song, O. S., 2006, *Thin-walled Composite Beams : Theory and Application*, Springer.

(16) Narendar, S. and Gopalakrishnan, S., 2010, Terahertz Wave Characteristics of a Single-walled Carbon Nanotube Containing a Fluid Flow using the Nonlocal Timoshenko Beam Model, *Physica E*, Vol. 42, No. 5, pp. 1706~1712.