

심장 일의 측정을 위한 수학적 모델링[§]

서상호^{*†} · Yalin Kaptan^{**} · 노형운^{***} · 송지운^{***}

*숭실대학교 기계공학과, **한성대학교 기계시스템공학과, ***아이베이 GD3

Mathematical Modeling for Estimation of Heart Work

Sang-Ho Suh^{*†}, Yalin Kaptan^{**}, Hyung-Woon Roh^{***} and Ji-Hoon Song^{***}

* Dept. of Mechanical Engineering, Soongsil Univ.,

** Dept. of Mechanical Systems Engineering, Hansung Univ.,

*** IVAIGD3 Ltd

(Received June 17, 2011; Revised October 18, 2011; Accepted October 26, 2011)

Key Words: Heart Work(심장 일), Mathematical Modeling(수학적 모델링), Viscosity Model(점도 모델)

초록: 심장 일을 계산하여 혈관질환을 진단하는 방법이 새롭게 대두되고 있다. 이 연구의 목적은 혈관내의 두 지점에서 압력을 측정하여 점도 모델로부터 압력 펄스 및 심장 일을 구하는 수학적 모델을 개발하는 것이다. 심장 일을 측정하기 위해서 커프로부터 구한 혈압과 펄스파에 대한 의료 정보를 활용하였다. 본 연구의 목적은 혈관 내 두 측정점 사이의 펄스파를 이용하여 심장 일을 구하기 위한 수학적 모델의 개발이다. 심장 일은 Casson 및 Hershel-Bulkery 점도모델과 Windkessel 모델을 이용하여 구하였다. Casson 점도 모델과 Hershel-Bulkley 점도 모델을 이용하여 근위부에서의 컴플라이언스 값은 차이가 없으나 원위부에서 값은 큰 차이가 나타났다.

Abstract: Evaluation of the heart work is starting to emerge as a new diagnostic tool for arterial diseases. The aim of this study is to develop a mathematical model for the estimation of heart work utilizing the pulse waves between two points of a vessel. In order to calculate heart work, medical data such as blood pressure waveforms (which are measured using a cuff) are utilized. The heart work is calculated by employing the modified Windkessel model together with the viscosity models of Casson or Herschel-Bulkely (H-B). The results indicate that the compliance values at the proximal and distal locations differ for the Casson and H-B models.

1. 서 론

동맥경화증의 진단과 치료대책으로 혈관조영술, 중재적 시술 및 이식우회로술이 이용되고 있다. 또한, 혈관질환을 조기에 진단하기 위한 방법의 하나로써 심장이 1 사이클에 하는 일인 심장 일을 이용하는 방법이 연구되고 있다. 서상호 등⁽¹⁾은 압력 센서와 측정부재를 이용하여 간단하게 맥파 등을 측정하여 심장 일을 구하는 생체유체역학적 연구를 수행하고 있다.

퇴행성 질환인 동맥경화가 발생하면 혈관에 협착이 발생하게 되고 협착 원위부에 혈류량이

줄어들게 되어 세포손상이 일어나는 허혈현상(ischemia)으로 인해 심장일은 정상외의 경우와 달라진다. 심장일을 계산하기 위해서는 동맥혈관계의 1 점 또는 여러 점에서 맥파를 측정해야 한다.

심장일은 Fig. 1 같이 심장의 압력과 부피 관계로부터 구할 수 있다. Fig. 1의 P-V 선도에서 체적만 커지게 되면 심장비대 및 심부전 증상이 의심되고, 압력만 커지게 되면 고혈압, 만성 심부전 및 관상동맥 협착의 발생 가능성이 커지게 된다. 그리고 압력과 부피 모두 증가하게 되면 폐부종 고혈압과 심근경색의 위험성이 커진다.

본 연구의 목적은 심장 일을 계산하기 위한 수학적 모델을 구하는데 있다. 한 지점의 맥파 측정대신에 경동맥과 요골동맥 두 곳에서 맥파를 측정하고, 점도모델을 이용하여 심장일의 계산을 위한 수학적 모델을 구하였다. 연구에 적용한 점도

§ 이 논문은 2011년도 대한기계학회 유체공학부문 춘계 학술대회(2011. 4. 15.-16., 포항공대) 발표논문임

† Corresponding Author, suhsh@ssu.ac.kr

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

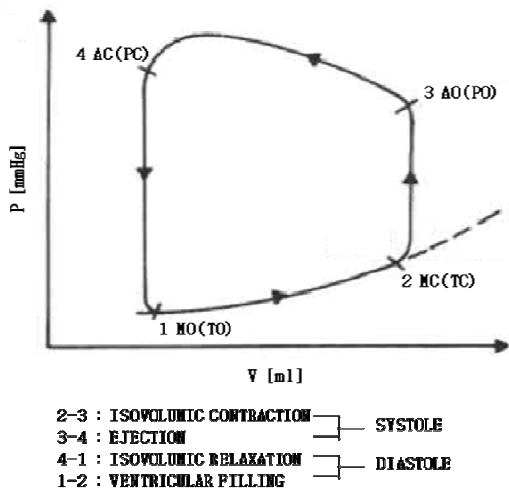


Fig. 1 The relationship between the heart pressure and the heart volume

모델은 Casson 모델과 Hershel-Bulkley 모델이다.

본 연구에서는 심장 일을 구하기 위한 점도모델을 비교 연구하였고, 압력센서와 측정부재를 통하여 간단하게 경동맥과 요골동맥 두 곳에서 맥파 등을 측정하여 구한 심장 일의 정확성도 검토하였다.

2. 수학적 모델링

2.1 점도 모델

혈액은 전단율에 따라 겔보기점도가 변하는 비뉴턴 유체이다. Yilmaz 등⁽²⁻⁵⁾은 혈액유동을 시뮬레이션하기 위해 다양한 점도모델에 대해 검토하였다. 그들은 혈액유동의 거동을 모델링하기 위해 항복응력이 고려된 점도모델을 사용할 것을 권장했다. 혈액의 항복응력을 고려하기 위해 본 연구에서 적용한 Casson 과 Hershel-Bulkley의 구성방정식 모델은 식 (1) 및 (2)와 같다.

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + \sqrt{k\dot{\gamma}} \tag{1}$$

$$\tau = \tau_y + m\dot{\gamma}^n \tag{2}$$

윗 식에서 τ_y 는 항복응력이고, $\dot{\gamma}$ 는 전단율이며, k 와 m 은 각 모델의 파라미터이다.

2.2 혈액유동의 수학적 모델링

혈액유동을 해석하기 위하여 순환기계를 전기회로로 간주하여 해석하는 Lumped Parameter 모델의 하나인 Windkessel 모델을 많이 사용한다.⁽⁶⁾ 이 모

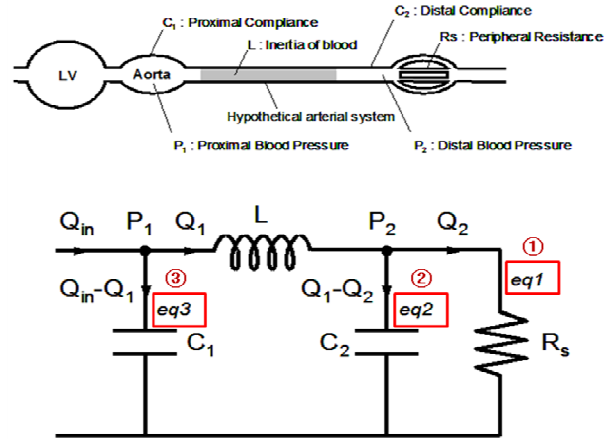


Fig. 2 Modified Windkessel model for the human arterial system

델은 혈액유동과 혈압을 구하는데 동맥의 유연성과 유동저항을 고려할 수 있다.

수정 Windkessel 모델은 혈유동과 혈압을 결정하는데 있어 동맥의 유연성과 유동저항뿐 아니라 혈류속도까지 고려할 수 있다.⁽³⁾

수정 Windkessel 모델을 이용하여 구한 동맥의 압력 펄스에 대한 식은 위와 같다.

$$p_1(t) = L \frac{dQ_1(t)}{dt} + Q_2(t)R_s(t) \tag{3}$$

$$p_1(t) = L \frac{dQ_1(t)}{dt} + \int \frac{Q_1(t) - Q_2(t)}{C_2(t)} dt \tag{4}$$

$$p_1(t) = \int \frac{Q_{in}(t) - Q_1(t)}{C_1(t)} dt \tag{5}$$

식 (3)~(5)는 혈액이 심장을 나와서 말초혈관을 통해 동맥시스템을 빠져 나갈 때의 압력펄스와 심장에서 나온 혈액의 상당 부분이 심장에서 조금 떨어진 동맥 벽에 수축기 동안 저장된다고 할 때의 압력펄스, 그리고 심장에서 나온 혈액 중의 대부분이 탄력성이 많은 대동맥의 벽에 수축기 동안 저장된다고 할 때의 압력펄스이다.

식에서 대동맥 입구에서의 혈압은 p_1 , 심장에서 나온 혈류량은 Q_{in} , 말초혈관으로의 혈류량은 Q_1 , 수축기 동안 대동맥에 저장되는 혈액의 양은 $Q_{in} - Q_1$, 말초혈관으로 빠져나가는 혈액의 유량은 Q_1 , 심장에서 멀리 떨어진 동맥들의 벽이 팽창할 때 이들 벽에 저장된 유량은 $Q_{in} - Q_1$ 이다. 그리고 L 은 관성의 효과를 나타내는 인덕턴스이다.

말초혈관계의 저항은 점도 모델을 이용하여 식 (6)과 같이 구할 수 있다.

$$R_s(t) = 168kz_1 / \pi [21R^4 - 48R^{3.5}(r_c)^{0.5} + 28R^3r_c - r_c^4] \quad (6)$$

심장에서 멀리 떨어진 동맥의 유연성 C_2 는 다음과 같이 정의한다.

$$C_2(t) = \frac{[Q_1(t) - Q_2(t)]\Delta t}{\Delta p_2(t)} \quad (7)$$

Navier-Stokes 방정식을 이용하여 압력강하를 계산하고, 파이프 내의 속도분포를 구하여 이를 적분함으로써 시간에 따라 변하는 유량을 구할 수 있다. z_1 은 전체 동맥시스템의 특성길이이다.

$$Q_1(t) = \frac{\pi R^4}{8k} \left[\left(\frac{p_1}{z_1} \right) - \frac{16}{7} \left(\frac{2\tau_y}{R} \right)^{0.5} \left(\frac{p_1}{z_1} \right)^{0.5} + \frac{4}{3} \left(\frac{2\tau_y}{R} \right) - \frac{1}{21} \left(\frac{2\tau_y}{R} \right)^4 \left(\frac{p_1}{z_1} \right)^{-3} \right] \quad (8)$$

말초혈관에서 $Q_2(t)$ 와 p_2 의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$p_2(t) = Q_2(t)R_2(t) \quad (9)$$

그리고 식 (4)와 식 (5)를 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 Q_1(t)}{dt^2} = \frac{1}{L} \left(-\frac{Q_1(t)}{C_2(t)} + \frac{Q_2(t)}{C_2(t)} + \frac{dp_1(t)}{dt} \right) \quad (10)$$

$$Q_{in}(t) = Q_1(t) + C_1(t) \frac{dP_1(t)}{dt} \quad (11)$$

심장 박출량 $Q_1(t)$ 를 시간에 따라 적분하면 1 사이클 당 심장이 뿜어내는 혈액의 체적을 구할 수 있다. 그리고 이 체적은 $Q_{in}(t)$ 를 시간에 따라 적분한 값과 동일하다.

$$\int Q_{in}(t)dt = \int Q_1(t)dt \quad (12)$$

$Q_1(t)$ 과 $Q_{in}(t)$ 이 구해지면 이들의 곱은 순간 심장 일(Instantaneous Heart Work)이 되고, 이를 적

분하면 평균 심장 일을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} WOH &= \frac{1}{T} \int_0^T Q_1(t) p_1(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T Q_{in}(t) p_1(t) dt \end{aligned} \quad (13)$$

3. 결과 및 검토

3.1 1 점과 2 점 압력 측정 결과 비교

측정이 간편한 압력센서 측정시스템을 개발하여 맥파를 측정하고, 혈압 및 맥파전달속도(PWV: Pulse Wave Velocity)를 계산한 뒤 압력과 심실의 체적관계로부터 심장 일을 계산하였다.

맥파전달속도는 Fig. 3 과 같이 혈관 내 서로 다른 두 지점 사이에서 측정된 맥파의 시간차와 두 측정 지점간의 거리를 이용하여 동맥의 탄력성을 나타낼 수 있다.

맥파의 측정은 Fig. 4 와 같이 개발된 압력센서 시스템을 통하여 경동맥에서의 1 지점만 맥파를 측정하거나 경동맥 및 요골동맥 2 지점에서 맥파를 측정하였다.

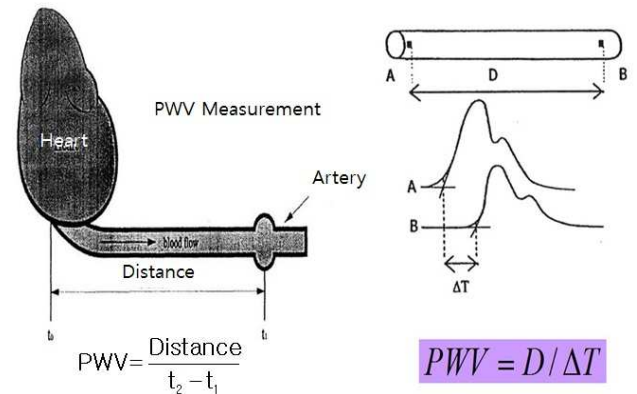


Fig. 3 Definition of the pulse wave velocity

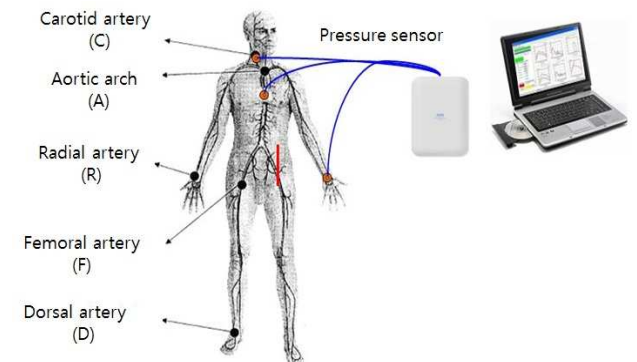


Fig. 4 Schematic diagram of the pressure sensor measuring system

Table 1 Input data for estimation of the heart work

Specification	Value	Unit
W	70	kg
CO	80.59	ml/s
k_{Casson}	3.2896	cP
$\tau_{y,Casson}$	13.8	cP · s
m_{HB}	8.9721	cP · s
n_{HB}	0.8601	-
$\tau_{y,HB}$	17.5	cP · s
ρ	1050	kg/m ³
z_1	200	cm
z_2	0.9	cm
L	0.017	mmHg · s ² / ml
$D_1 = D_2$	0.7	cm

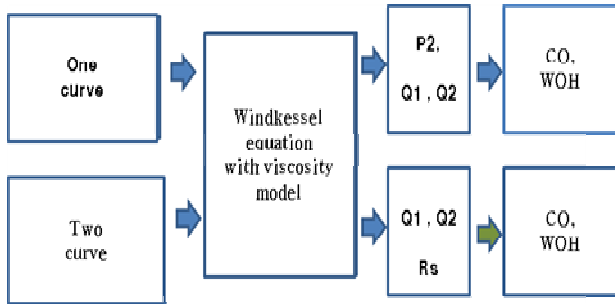


Fig. 5 Comparison of the heart work calculation methods

Fig. 5 와 같이 $p_1(t)$ 만을 측정하여 수정 Windkessel 모델을 계산한 심장 일과 $p_1(t), p_2(t)$ 를 측정하여 수정 Windkessel 모델을 이용하여 계산한 심장 일을 비교하였다. 사용한 점도 모델은 Casson 모델이다. 심장 일은 식 (14)와 같이 구할 수 있다.

$$WOH = \frac{WOH}{CO_{factor}} = \frac{WOH}{Q_{1,ave} / 3.33W^{0.75}} \quad (14)$$

식 (14)의 W 는 체중이고, $CO = 3.33W^{0.75}$ 이다.

Fig. 6 은 커프를 이용하여 구한 압력펄스에 대한 측정값이다. $p_1(t)$ 만을 측정한 그래프로 수정 Windkessel 모델을 적용하여 Fig. 4 와 같이 $Q_1(t), Q_2(t)$ 를 계산하고, Fig. 8 과 같이 $p_2(t)$ 를 계산하였다.

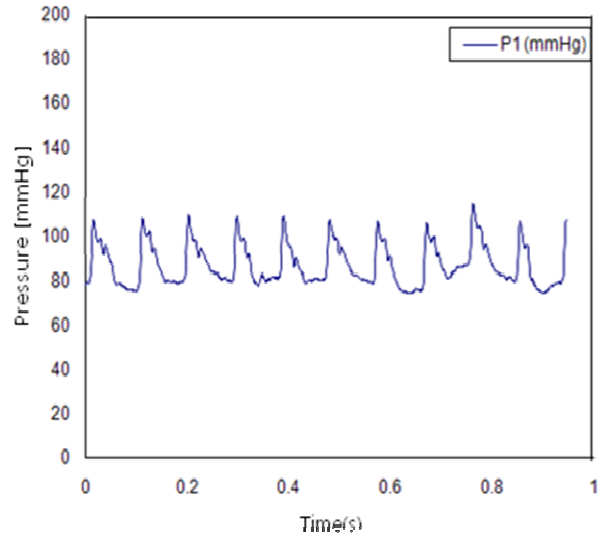


Fig. 6 The measured pressure waveform, p_1

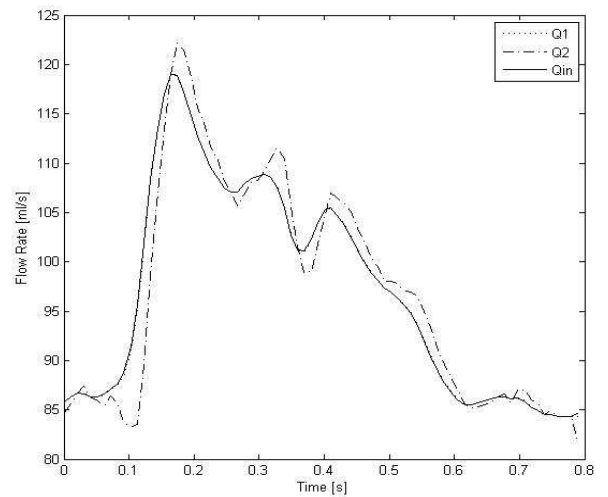


Fig. 7 Calculated flow rates Q_1 and Q_2

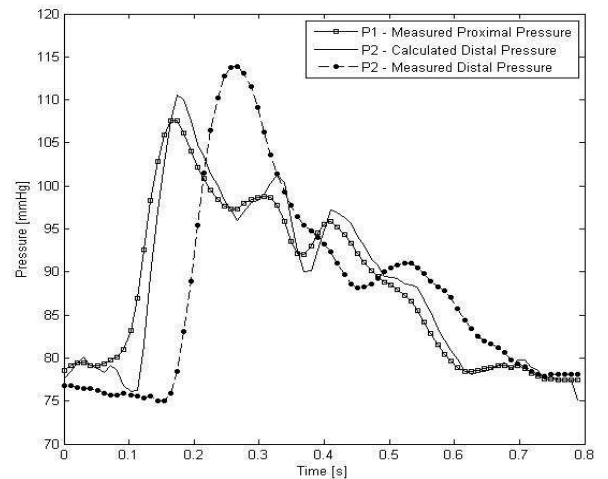


Fig. 8 Calculated pressure waveforms p_1 and p_2

Table 2 Comparison of the heart work using by 1 point and 2 points pressure waveform measurements

	1point		2point	
Specification	p_1 measurement	p_1 measurement	p_1 measurement	p_2 measurement
Heart work(w)	0.768	0.768	0.768	0.759

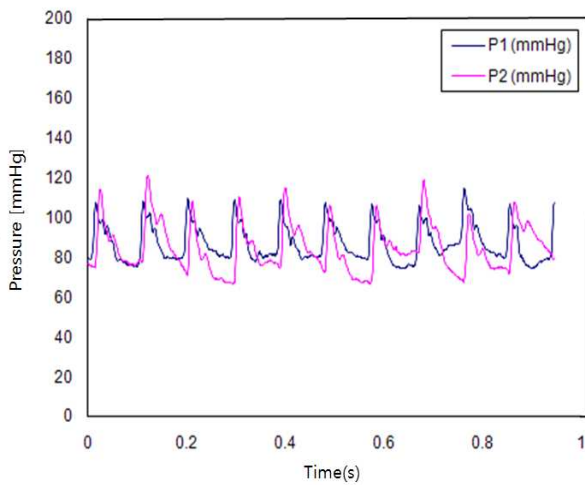


Fig. 9 Measured pressure waveforms p_1 and p_2

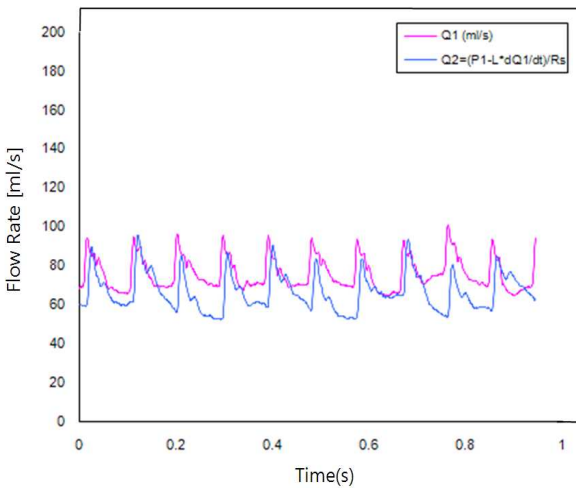


Fig. 10 Calculated flow rates Q_1 and Q_2

Fig. 9 은 개발된 압력센서시스템을 이용하여 구한 $p_1(t)$, $p_2(t)$ 를 측정된 것이다. 수정 Windkessel 모델에 적용하여 Fig. 10 처럼 유량을 구할 수 있었다.

3.2 점도 모델에 따른 심장 일 비교

본 연구에서는 개발된 압력센서시스템을 이용하여 경동맥과 요골동맥 두 곳에서 맥파를

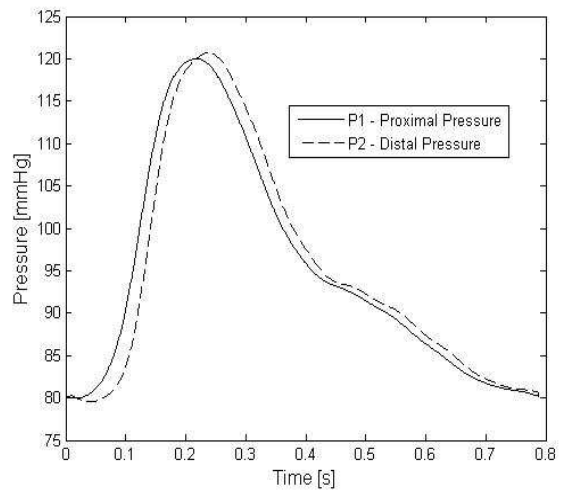


Fig. 11 Proximal and distal pressures with the Casson equation for blood

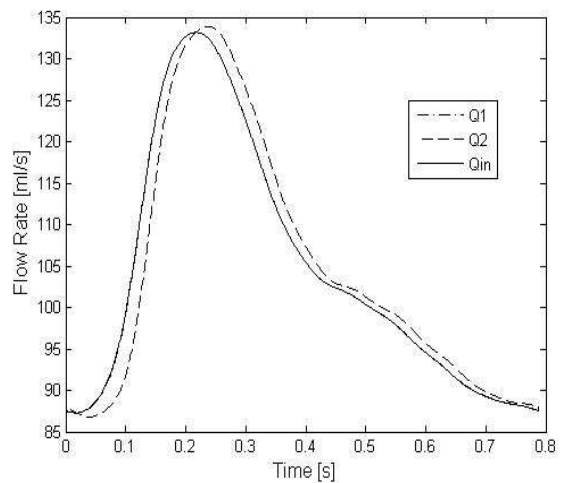


Fig. 12 Proximal and distal flow rates with the Casson equation for blood

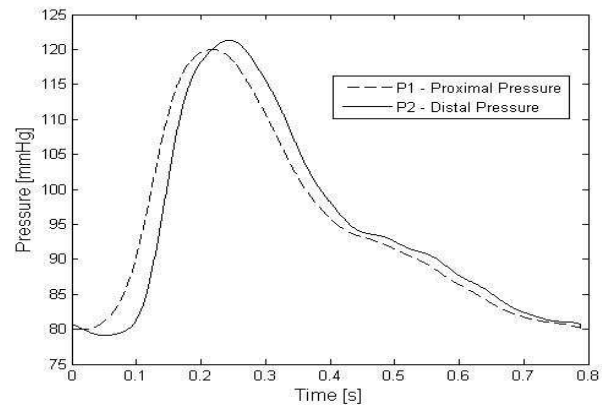


Fig. 13 Proximal and distal pressures with the Hershel-Bulkley equation for blood

측정하여 구한 $p_1(t)$ 을 대입하고, Casson 과 Hershel-Bulkery 점도 모델을 통하여 혈류량 및 심장 일

을 순서대로 쉽게 구할 수 있다.

Fig. 11 과 Fig. 12 는 경동맥에서 Casson 점도모형을 이용하여 구한 한 주기 동안의 압력펄스이다. 경동맥의 압력펄스, p_1 , 은 측정된 값이고, 요골동맥의 압력펄스, p_2 , 는 계산된 값이다. 그림에서 보는 바와 같이 경동맥과 요골동맥에서 압력펄스의 위상차가 나타난다. 위상 차는 Fig. 12 의 두 지점 측정에 대한 유량 계산값에서도 볼 수 있다. 경동맥과 말초동맥혈관의 컴플라이언스는 각각 0.00068 ml/mmHg 와 0.02468 ml/mmHg 로 계산되었다. 이 컴플라이언스 값이 혈관의 탄성으로 인해 혈액이 혈관벽에 저장될 수 있는 척도를 의미하게 된다. 심장 일은 0.82 W 로 계산되었다.

Fig. 13 과 Fig. 14 은 경동맥과 요골동맥에서 Hershel-Bulkley 모형을 이용하여 구한 압력펄스값과 유량값이다. 압력펄스의 변화 경향은 Casson 모형을 이용하여 구한 결과와 유사하게 나타난다.

Hershel-Bulkley 모형을 이용하여 구한 측정 근위부와 원위부의 컴플라이언스 값은 각각 0.00068 ml/mmHg 와 0.05262 ml/mmHg 이다.

Casson 점도 모델과 Hershel-Bulkley 점도 모형을 이용하여 근위부에서의 컴플라이언스 값은 차이가 없으나 원위부에서 Casson 모형을 기준으

로 할 때 약 14%의 차이가 나타났다. Table 3 은 Casson 모델과 Hershel-Bulkley 모형을 이용하여 구한 심장 일을 비교한 것이다. 점도 모델에 따라 원위부의 컴플라이언스 값은 차이가 크게 나타났으나, 심장 일은 거의 같게 나타났다.

4. 결 론

본 논문에서는 심장 일을 구하기 위해 수학적 모델링을 구축하였고, 적용한 점도모델의 적합성이 확인되었다. 수정 Wind-kessel 모형을 이용하여 심장 일을 구하는 수학적 모델이 완성되었다. $p_1(t)$ 1 지점 만을 측정하여 계산한 심장 일과 개발된 압력시스템으로 압력센서시스템을 이용하여 1 점과 2 점 맥파를 측정하여 심장 일을 비교하였다. $p_1(t)$ 과 $p_2(t)$ 2 지점을 측정하여 계산된 심장 일 계산값을 비교한 결과 2 지점 측정법이 더 신뢰성이 높다는 것을 알 수 있었다. 혈액의 비뉴턴유체 특성은 Casson 과 Hershel-Bulkley 모형을 이용하여 반영하였다. 두 점도모형을 이용하여 구한 심장 일은 거의 같게 나타나나 원위부의 컴플라이언스 값은 차이가 나타났다. 이에 대한 추가적인 연구와 심장 일의 임상적 적용이 계속 연구되어 질 것이다.

후 기

이 논문은 2010 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(20100025377).

참고문헌

- (1) Suh, S. H., Kim, M. J., Roh, H. W. and Song, J. H., 2010, "A Study of Pressure Sensor System for Measuring Cardiac Output," *Proceedings of the KSME Fall Annual Meeting*, pp. 2917~2920.
- (2) Yılmaz, Y., and Gündoğdu, M.Y., 2008, "A Critical Review on Blood Flow in Large Arteries; Relevance to Blood Rheology, Viscosity Models and Physiologic Conditions," *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 20, pp.197~211.
- (3) Cho, Y. I., Yoo, J. Y., Suh, S. H., Lee, B. K., Lee, S. J. and Kwon, H. M., 2006, "Biofluid Mechanics," Yas Media, Seoul (In Korean)
- (4) Kim, S. H., 2002, "A study of non-Newtonian Viscosity and Yield Stress of Blood in a Scanning Capillary-Tube Rheometer," Ph.D. Thesis, Drexel University, Philadelphia.

Table 3 Comparison of the Models

Model	WOH [W]		Compliance [ml/mmHg]	
	By using Q_1	By using Q_{in}	C_1	C_2
Casson	0.82061	0.82061	0.00068	0.02468
Herschel-Bulkley	0.82257	0.82257	0.00068	0.05262

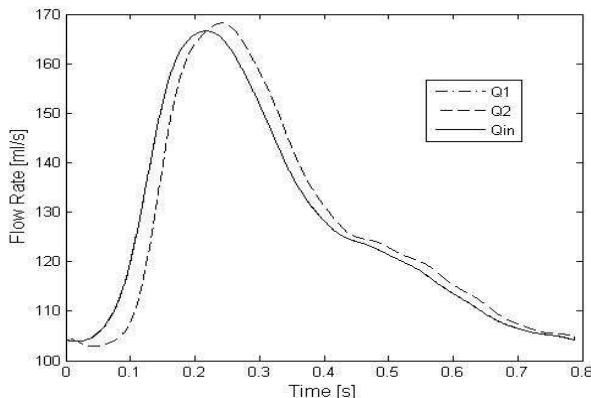


Fig. 14 Proximal and distal flow rates with the Hershel-Bulkley equation for blood

- (5) Yoo, S. S., Suh, S. H. and Chang, N. I., 1994, "A Comparative Atudy on Constitutive Equations of Human Blood," *The Korean Journal of Rheology*, Vol. 6, No. 2, pp. 157~164.
- (6) Fung, Y. C., 1993, *Biomechanics, "Mechanical Properties of Living Tissues,"* Springer-Verlag, New York.