

算學啓蒙과 默思集算法의 수학 교육적 구성과 구조

Mathematics Educational Constructions and Structures in Suan Xue Qi Meng(算學啓蒙) and Muk Sa Jib San Bub(默思集算法)

윤혜순 Hye Soon Yun

朱世傑의 《算學啓蒙》은 조선 산학 발전에 가장 큰 영향을 준 산서 중 하나이고, 慶善徵의 《默思集算法》은 현존하는 조선 산서중에 가장 오래된 것이다. 이 논문에서는 《算學啓蒙》(上卷)과 《默思集算法》(卷上)의 문제를 비교 분석하여 이 두 산서에서 나타나는 수학 교육적 구성과 구조를 조사하여 두 저자의 구조는 현재에도 그대로 사용할 수 있음을 보인다.

Zhu Shi Jie's Suan Xue Qi Meng (算學啓蒙) is one of the most important books which had a great influence to the development of Chosun Mathematics and Gyung SunJing's Muk Sa Jib San Bub(默思集算法) is the oldest Chosun mathematics book.

In this paper, comparing Suan Xue Qi Meng (算學啓蒙) with Muk Sa Jib San Bub(默思集算法), we study the mathematics educational constructions and structures in books and then conclude that their structure can be used in present school mathematics.

Keywords: Suan Xue Qi Meng (算學啓蒙), Chosun Mathematics(朝鮮算學), Muk Sa Jib San Bub(默思集算法)

1 서론

조선 산학에 가장 큰 영향을 끼친 산서는 《楊輝算法》(1274~1275), 朱世傑의 《算學啓蒙》(1299), 安止齋의 《詳明算法》(1373)인 것은 잘 알려져 있다. 특히 《算學啓蒙》은 天元術과 增乘開方法을 포함하여 동양 산학에서 가장 중요한 방정식론과 구고술, 퇴타술 등의 발전에 큰 기여를 하였다([9]). 《算學啓蒙》에 들어있는 천원술은 朴縵(1621~1668)의 《算學原本》(1700)부터 시작하여 洪正夏(1684-?)의 《九一集》에 확장되어 조선 산학의 방정식론은 명대의 중국과 달리 송, 원대의 전통을 이어 발전하였다([3]).

조선에서 《算學啓蒙》에 대한 연구는 慶善徵(1616-?)의 《默思集算法》, 洪正夏(1684-?)의 《九一集》 등에서 시작하여 조선의 모든 산서에 나타난다. 慶善徵의 《默思集算

法》은 《算學啓蒙》의 <方程正負門>, <開方釋鎖門>을 제외한 나머지 부분을 정리하였다([8]). 그러나 慶善徵은 《算學啓蒙》의 <方程正負門>, <開方釋鎖門>의 내용은 제대로 이해하지 못한 것으로 보인다. 따라서 <方程正負門>의 내용은 풀이법을 변경하였으며 <開方釋鎖門>의 내용은 《默思集算法》에 포함시키지 못하였다([2]). 洪正夏는 《九一集》의 4권의 <毬隻解隱門>, <缶瓶堆垛門>, <倉囤積粟門>, 5권의 <九股互隱門>, 6권~8권 <開方各術門>에서 天元術을 활용하고, 또 增乘開方法을 현재 우리가 사용하고 있는 방법과 완전히 일치하는 것으로 정리하여 방정식 이론에 크게 기여 하였다([9]). 따라서 《算學啓蒙》과 조선 산서와의 관계에 대한 연구는 그 구조와 내용을 중심으로 순차적인 연구가 필요하다.

이 논문에서는 《算學啓蒙》의 上卷([6])과 조선 산서 《默思集算法》의 卷上([7])에 들어있는 문제를 비교 분석하여 이 두 산서에서 나타나는 수학 교육적 구성과 구조를 조사한다.

2 算學啓蒙(上卷)과 默思集算法(卷上)의 구성

《算學啓蒙》은 전체 3卷(上, 中, 下)으로 나누어져 20문(門), 259문제(問)로 구성되어 있다. 上卷은 <總括>과 8門, 123問-<縱橫因法門>, <身外加法門>, <留頭乘法門>, <身外減法門>, <九歸除法門>, <異乘同除門>, <庫務解稅門>, <折變互差門>-이다.

《默思集算法》은 전체 3卷(上, 中, 下)이며 25문(門), 400문제(問)로 구성되어 있다. 卷上은 <布算先習門>과 9門 170問-<縱橫因法門>, <身外加法門>, <留頭乘法門>, <列位乘法門>, <單位歸法門>, <異乘同除門>, <身外減法門>, <隨身歸除門>, <歸除乘實門>-이다.

3 算學啓蒙(上卷)과 默思集算法(卷上)의 수학적 구조

이 절에서는 《算學啓蒙》(上卷), 《默思集算法》(卷上)의 내용을 주제별로 비교하여 두 산서의 공통점과 차이점을 조사하고 수학 교육적 학습 효과를 위한 교재 구성의 특징을 파악한다.

3.1 算學啓蒙의 <總括>과 默思集算法의 <布算先習門>

《算學啓蒙》의 <總括>은 전체 18항목으로 구수법, 구귀제법, 근하유법, 명중횡결, 대수, 소수, 도량형, 원율, 명이명결, 명정부술, 명승제단, 명개방법, 산대를 이용한 곱셈, 나눗셈 등으로 수학의 기초적인 내용을 다루고 있다([5]).

《默思集算法》의 <布算先習門>은 전체 25條로 《默思集算法》의 <布算先習門>에

서는 구구법, 승법, 제법, 명수법, 도량형, 원과 구의 성질, 개방법 등으로 문제풀이에 필요한 기본적인 내용을 미리 학습할 수 있도록 제시하고 있다([4]).

《默思集算法》<布算先習門>에는 《算學啓蒙》<總括>에 있는 명정부술, 명승제단, 명개방법 등의 내용을 포함하고 있지 않다. 명정부술은 《九章算術》에 들어있는 음수를 포함한 덧셈과 뺄셈에 관한 규칙과 함께 곱셈에 관한 것도 포함하고 명개방법은 12세기 賈憲이 도입한 증승개방법을 간단하게 나타낸 것이다.

《算學啓蒙》下卷의 <方程正負門>에서 정부술을 활용하는 문제를 다루고 있지만 《默思集算法》에서는 정부술은 사용하지 않는다.

3.2 縱橫因法門

<縱橫因法門>은 《算學啓蒙》과 《默思集算法》 모두 8問으로 구성되어 있다. 두 산서의 <縱橫因法門>은 곱수(승수)가 한 자리 수(마지막 자릿수가 0인 수 포함)의 문제들을 단계적으로 제시하고 있다.

<표1>는 두 산서의 <縱橫因法門>문제의 소재와 문제풀이를 비교한 것으로 문항 수와 소재의 차이가 없다. 문제의 배열에서 수치 차이는 조금 있지만 곱수(승수)가 2~9까지인 문제를 순차적으로 제시해 구구단과 곱셈을 연습할 수 있도록 하였다.

<표1> 縱橫因法門

算學啓蒙				默思集算法			
주제	번호	소재	문제풀이	주제	번호	소재	문제풀이
종 횡 인 법 문	1	粟	216×2	종 횡 인 법 문	1	粟	23156×2
	2	絲	144×300		2	鈔	62.8×30
	3	羊	354×4		3	絲	144×400
	4	銀	547×50		4	麻	895×50
	5	絹	736×6		5	布	634×60
	6	麻	892×700		6	絹	7366×7
	7	布	634×80		7	羅	8857×800
	8	馬	425×90		8	銀	425×90

3.3 身外加法門

<身外加法門>은 《算學啓蒙》은 11問, 《默思集算法》은 10問으로 구성되어 있다. 《算學啓蒙》과 《默思集算法》의 <身外加法門>은 곱수(승수)의 첫 번째 자리의 숫자가 1이고 인승을 사용하여 곱셈을 계산하는 문제를 다룬다. <표2>에서 《算學啓蒙》과 《默思集算法》의 <身外加法門>은 각 문제의 소재가 조금 다르지만 곱수의 크기에 따라 순차적으로 제시하고 곱수가 소수인 문제도 포함되어 있음을 확인 할 수 있다. 또한 《算學啓蒙》의 10問, 11問은 곱수가 두 자리 이상의 수로 <身外加法門>의 1問~9問과

다름을 알 수 있다.

《算學啓蒙》의 10問은 538×194 의 곱셈을 해결하는 문제이다. 이 곱셈을 <身外加法門>의 다른 問의 방법으로 $538 \times (190 + 4) = (538 \times 190) + (538 \times 4)$ 을 계산하여 해결할 수 있다. 이 문제와 11問은 곱수가 두 자리 이상의 수의 일반적인 곱셈 문제가 들어 있는 《算學啓蒙》<留頭乘法門>에 해당하지만 <身外加法門>의 마지막 단계의 문제를 해결함과 동시에 다음 주제 <留頭乘法門>의 문제 형태를 앞서 소개하여 곱셈을 단계적으로 학습할 수 있도록 하였다.

<표2> 身外加法門

算學啓蒙				默思集算法				
주제	번호	소재	문제풀이	주제	번호	소재	문제풀이	
신외가법문	1	米	68.4×110	신외가법문	1	米	484×11	
	2	羅	34.6×120		2	黍	646×12	
	3	鹽	873×13		3	白米	15750×13	
	4	地	324×14		4	黍	3578.8×1.4	
	5	木香	198×15		5	木香	258×15	
	6	黃蠟	3850×16		6	茴香	357×16	
	7	柑子	436×17		7	生梨	389×17	
	8	軍人	3270×1.8		8	芝草	6723×1.8	
	9	雞	345×190		9	軍人	47938×1.9	
	10	夫匠	538×194		10	稅租		46181.24×1.07
	11	木綿	3260×1705					

3.4 留頭乘法門과 列位乘法門

<留頭乘法門>은 《算學啓蒙》은 20問, 《默思集算法》은 8問으로 구성되어 있다. <留頭乘法門>은 곱수가 두 자리수 이상, 또는 소수인 일반적인 곱셈 문제이다. 《算學啓蒙》<留頭乘法門>의 1問~8問은 곱수(승수) 첫 자리의 수를 2~9까지 순서대로 배열하여 곱셈을 단계적으로 해결하도록 하였다. 《默思集算法》의 <留頭乘法門>은 《算學啓蒙》<留頭乘法門>과 다르게 두 자리의 곱수(승수)에서 일의 자리의 수가 1인 경우의 곱셈 문제만을 다룬다. 그리고 《算學啓蒙》의 <留頭乘法門>에 해당하는 일반적인 곱셈의 문제를 《默思集算法》에서는 <列位乘法門> 17問으로 구성하고 있다. 慶善徵은 곱셈의 문제를 <留頭乘法門>과 <列位乘法門>으로 분류하여 곱셈을 단계적으로 학습할 수 있도록 문제를 구성한 것으로 보인다.

두 산서의 <留頭乘法門> 대부분 문제들은 단위 환산이 필요한 문제로 《算學啓蒙》<總括>과 《默思集算法》<布算先習門>에 들어있는 단위 환산에 필요한 계산법을 이용하여 해결한다. 길이와 부피의 단위는 10진법이므로 쉽게 단일 단위로 변환할 수 있지만 무게의 단위는 $1斤 = 16兩$, $1兩 = 24銖$ 이므로 인승과 신외가법을 이용하여 계산

하여 전술한 두 절에서 습득한 곱셈을 복습하게 한다. 산대로 하는 계산이므로 소수의 계산은 함께 정리되어 있다. 《默思集算法》에서는 특히 ‘東俗十五斗作一石’이라는 설명을 추가하여 조선에서 1섬이 15말이 되기도 한다고 설명하였다.

《默思集算法》의 <歸除乘實門> 4問에서 그 사실을 확인할 수 있다.

《默思集算法》의 <歸除乘實門> 4問

今有稅黃豆四百八十九石一十三斗四升二合五勺 每石折綿布二匹半 問合綿布幾何 (石法一十五斗 匹法三十五尺-1섬은 15말이고 1필은 35자이다)

3.5 身外減法門

<身外減法門>은 《算學啓蒙》은 11問, 《默思集算法》은 13問으로 구성되어 있다. <표 3>에서 《算學啓蒙》과 《默思集算法》의 <身外減法門>은 나눗수의 첫 번째 자리의 숫자가 1인 나눗셈 문제들을 다룬다.

<身外減法門>의 문제들은 가지고 있는 돈 전체로 구매할 수 있는 물건의 개수를 구하거나 물건 전체를 일정하게 배분하는 문제로 구성되어 있다.

《算學啓蒙》과 《默思集算法》의 <身外減法門>은 모두 <身外加法門>의 곱셈($a \times b = m$)의 문제들에서 나눗셈($m \div a = b$)의 문제로 변형하여 곱셈과 나눗셈의 연산이 역연산인 것을 자연스럽게 학습할 수 있도록 하였다. <표3>에서 《算學啓蒙》의 <身外減法門> 1問~11問은 <身外加法門>의 문제 숫자를 그대로 하고 소재를 다르게 사용하여 나눗셈 문제로 바꾸었음을 확인할 수 있다.

<표3>身外減法門

算學啓蒙				默思集算法			
주제	번호	소재	문제풀이	주제	번호	소재	문제풀이
신 의 감 법 문	1	芝麻	7524 ÷ 110	신 의 감 법 문	1	銀	1367.3 ÷ 11
	2	紅綾	4152 ÷ 120		2	米	6378 ÷ 12
	3	高茶	11349 ÷ 13		3	錢	786.5 ÷ 13
	4	地	4536 ÷ 14		4	粟米	46767 ÷ 14
	5	梔子	2970 ÷ 15		5	銅錢	33855 ÷ 15
	6	絲	61600 ÷ 16		6	紅花	8936 ÷ 16
	7	錢	7412 ÷ 17		7	白礬	557.94 ÷ 170
	8	糧	5886 ÷ 1.8		8	麴	801 ÷ 18
	9	苧絲	65550 ÷ 190		9	正租	166725 ÷ 19
	10	麻布	104372 ÷ 19		10	紅絲	386942 ÷ 158
	11	松木	5558300 ÷ 1705		11	眞絲	54881.4 ÷ 179
			12		麻絲	25937.5 ÷ 125	
			13		苧絲	67387000 ÷ 1975	

3.6 九歸除法門, 單位歸法門, 隨身歸除門

《算學啓蒙》의 <九歸除法門>은 29問으로 구성되어 있다. 《算學啓蒙》의 <九歸除法門> 1問~8問에 해당하는 문제들을 《默思集算法》은 <單位歸法門> 1問~8問으로 구성하였다. 이 문제들은 나눗수가 한 자리 수(마지막 자릿수가 0인 수 포함)인 나눗셈 문제이다.

<표4>에서 《算學啓蒙》의 <九歸除法門>과 《默思集算法》의 <單位歸法門>은 모두 앞에서 해결한 곱셈($a \times b = m$)의 문제들에서 나눗셈($m \div a = b$)의 문제로 변형한 문제이다. 《算學啓蒙》의 <九歸除法門>의 1問~8問은 《算學啓蒙》의 <縱橫因法門>의 곱셈 문제와 숫자가 일치하고, 제19問을 제외한 나머지 문제도 모두 <留頭乘法門>의 역 문제들이다. <身外減法門>, <九歸除法門>의 문제 배열로 보아 朱世傑은 곱셈과 나눗셈의 구조를 명백하게 보여 주고 있음을 알 수 있다.

《算學啓蒙》의 <九歸除法門> 9問~29問과 《默思集算法》의 <隨身歸除門>은 나눗수가 두 자리 이상인 일반적인 나눗셈의 문제로 구성되어 있다. 《默思集算法》의 <隨身歸除門>은 《算學啓蒙》의 <九歸除法門>의 문제 보다 더 많은 문제를 제시하였다. 숫자는 같지만 취급하는 문제는 다른 종류를 택하여 응용문제의 폭을 넓게 하였다.

<표4> 九歸除法門, 單位歸法門

算學啓蒙				默思集算法			
주제	번호	소재	문제풀이	주제	번호	소재	문제풀이
구 귀 제 법 문	1	白豆	4320 ÷ 20	단 위 귀 제 법 문	1	米	436.97 ÷ 2
	2	細絲	43200 ÷ 300		2	米	5747.25 ÷ 30
	3	絹子	1416 ÷ 4		3	白豆	469850 ÷ 40
	4	銀	27350 ÷ 50		4	課錠	27375 ÷ 50
	5	大羅	4416 ÷ 6		5	絲	8926200 ÷ 600
	6	甘草	624400 ÷ 700		6	大羅	2628.5 ÷ 7
	7	細布	50720 ÷ 80		7	細布	4496 ÷ 8
	8	良馬	38250 ÷ 90		8	馬	43380 ÷ 90

3.7 異乘同除門

<異乘同除門>은 《算學啓蒙》 8問, 《默思集算法》 14問으로 구성되어 있다. 문제의 소재는 차이가 없으며 주로 물건 구매, 판매, 교환 등의 문제를 다루고 있다.

이승동제는 《九章算術》에서 말한 今有術(금유술), 즉 비례사율에 해당한다. 《九章算術》의 ‘속미’에서 今有術(금유술)은 다음과 같이 설명하고 있다([1]).

“今有術曰 以所有數乘所求率爲實 以所有率珽 實如法而一”

금유술은 소유수를 소구율에 곱하여 실이라 하고 소유율을 법으로 하여, 실

을 법으로 나눈다.

이는 소유수 : 소유율 = 소구수 : 소구율에서 소구수를 구하는 것을 뜻한다.

$$\text{소구수(구하는 수)} = \frac{\text{소유수} \times \text{소구율}}{\text{소유율}}$$

즉, 이송동제에서 ‘이송’은 소구율×소유수에 해당하고 ‘동제’는 로 나누는 것을 말한다. 전술한 승법과 제법을 실생활에 활용하는 것을 취급하였다. 《算學啓蒙》의 경우, 비례 문제와 함께 반비례문제 (5, 6問)도 함께 포함하고 있다. 두 산서의 <異乘同除門>은 1~2問, 3~4問, 등의 두 개의 문제가 같은 소재와 같은 수치로 되어있고 구하고자 하는 것의 순서를 바꾸어 제시하여 문제 변형을 통한 반복 연습을 할 수 있도록 하였다. 또한 慶善徵은 《默思集算法》에서 별해를 추가하여 문제풀이에서 좀 더 계산을 간단히 할 수 있는 방법을 설명하고 있다.

3.8 庫務解稅門, 歸除乘實門

《算學啓蒙》의 <庫務解稅門>은 모두 11問으로 구성되어 있다. 주로 이자계산이나 세금과 관련된 문제이다. <庫務解稅門> 대부분의 문제들은 비례를 활용하는 문제가 대부분으로 간단한 1차 방정식의 문제들이다.

예를들어 <庫務解稅門>의 11問은 $x(1 - \frac{1}{30})(1 - \frac{3}{50}) = 3000$ 을 해결하는 문제로 비례를 이용하여 문제를 해결한다.

《算學啓蒙》의 <庫務解稅門>에 해당하는 문제가 《默思集算法》에서는 <歸除乘實門>에 들어있다.

<歸除乘實門>의 문제들도 대부분 세금에 관련된 문제이다. 《默思集算法》의 <歸除乘實門>은 모두 66問으로 구성되어 《算學啓蒙》의 <庫務解稅門>보다 더 다양한 소재를 이용한 많은 문제를 제시하여 호조(戶曹)에서 사용되는 문제 해결을 충분히 습득할 수 있도록 하였다.

3.9 折變互差門

《算學啓蒙》의 <折變互差門>은 15問으로 구성되어 있다. 주로 물물교환, 두 가지 이상의 물건(돈)으로 빚 갚는 문제, 정해진 비율에 따라 물건 구매하기, 여러 가지 곡식으로 세금내기, 금의 농도 등의 문제이다. <折變互差門>의 문제들도 비례를 이용하여 해결한다.

《算學啓蒙》의 <折變互差門>에 해당하는 문제들도 《默思集算法》에서는 <歸除乘實門>에 들어있다. 《默思集算法》의 <歸除乘實門>의 문제들은 비례를 이용한 원, 정사각형의 넓이, 구, 정육면체의 부피, 원의 내접, 외접하는 정사각형의 변의 길이 등을

구할 수 있는 쉬운 문제부터 복잡한 문제까지 다양하게 제시하여 중인 산학자들이 취재 시험을 준비할 수 있도록 하였다. <異乘同除門>, <庫務解稅門>, <折變互差門>은 모두 승제법으로 해결할 수 있는 실생활의 문제들을 모아 놓은 것들이다.

4 결론

본 논문에서 《算學啓蒙》의 上卷과 《默思集算法》의 卷上의 문제의 구성과 내용을 주제별로 비교 분석한 결과 慶善徵은 《算學啓蒙》을 기본으로 《默思集算法》을 저술하였음을 알 수 있다.

朱世傑은 《算學啓蒙》외에 《四元玉鑑》(1303)을 저술하여 고차 연립방정식의 구성과 해법에 대한 지대한 공헌을 하였다. 莫若은 《四元玉鑑》의 서문에 다음과 같이 말하였다:

“燕山宋庭朱先生以數學名家周游湖海二十餘年矣 四方之來學者日衆, 先生遂發明九章之妙 以淑後學”

또 祖頤의 後序는 《算學啓蒙》에 대하여 다음과 같이 언급하였다.

“漢卿名世傑 宋庭其自號也 周流四方 復遊廣陵 踵門而學者雲集
大德己亥編集《算學啓蒙》 趙元鎮基與之版而行矣 元鎮者博雅之士也
惠然又備已財 鳩工繡梓 俾之並行於世 前成始
而今成終也 好事之德奚可量哉 二書相爲表裏”

두 사람의 서문에서 朱世傑은 학자로도 유명하였지만 교육자로 많은 학자들이 모여들었고, 또 이들의 교육을 위하여 《算學啓蒙》을 저술한 것을 알 수 있다. 그의 주저인 《四元玉鑑》을 이해하기 위한 준비서로 《算學啓蒙》을 저술하여, 그의 교육적 철학을 충분히 볼 수 있다.

慶善徵도 임진왜란 이후에 조선 산학이 완전히 없어진 상황에서 교육용 산서를 급히 저술할 필요가 있어서 저술한 것이 《默思集算法》이다. 특히 戶曹의 算員을 뽑는 算學 取才를 위한 산서가 절실히 필요하여 戶曹의 일에 적합한 문제들에 더 많은 관심을 두고 《默思集算法》을 저술한 것도 알 수 있다.

따라서 《算學啓蒙》과 《默思集算法》 두 산서 모두 수학 교육적 학습 효과를 위해 문제의 난이도를 생각하여 단계적으로 저술하였다. 이러한 방법은 수학 교육적인 학습 효과를 충분히 고려한 매우 중요한 시도라고 할 수 있다.

본 논문은 《算學啓蒙》의 上卷과 《默思集算法》의 卷上의 내용으로 제한된 것이므로,

이후 《算學啓蒙》의 中卷, 下卷과 《默思集算法》의 卷中, 卷下, 또 다른 산서들과의 비교 분석을 통해 그 들 산서에서 나타나는 교재 구성과 내용의 특징을 조사하여 실생활 문제 해결 방법에 대한 수학 교육적 자료로 사용할 수 있음을 보일 것이다.

참고 문헌

1. 郭書春 匯校, 《九章算術》, 瀋陽 遼寧教育出版社, 1990.
2. 김옥자, 묵사집산법과 17세기 조선 산학. 박사학위 논문(2009), 고려대학교.
3. 김영옥, 홍성사, 홍영희, 朴縝의 算學原本, 한국수학사학회지, 18(2005), No. 4, pp. 1-16.
4. 경선징, 묵사집산법(天, 地, 人), 유인영, 허민 역, 교우사, 2006.
5. 주세걸, 산학계몽, 상, 허민 역, 소명출판, 2009.
6. 中國歷代算學集成, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
7. 韓國科學技術史資料大系, 數學編, 1卷 - 10卷, 驪江出版社, 1985.
8. 허민, 산학계몽과 묵사집산법의 비교, 한국수학사학회지, 21(2008), No. 1, pp. 1-16.
9. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算書 算學啓蒙註解, 한국수학사학회지, 22(2009), No. 2, pp. 1-12.

윤혜순 단국대학교 교수학습개발원
Center for Teaching and Learning Development, Dankook University
E-mail: sodam511@dankook.ac.kr