한국경영과학회지
제37권 제4호
2012년 12월, pp.67-72
http://dx.doi.org/10.7737/JKORMS.2012.37.4.067

유전알고리즘에서 선형제약식을 다루는 방법*

성 기 석**†

A Handling Method of Linear Constraints for the Genetic Algorithm

Ki-Seok Sung**

■ Abstract ■

In this paper a new method of handling linear constraints for the genetic algorithm is suggested. The method is designed to maintain the feasibility of offsprings during the evolution process of the genetic algorithm. In the genetic algorithm, the chromosomes are coded as the vectors in the real vector space constrained by the linear constraints.

A method of handling the linear constraints already exists in which all the constraints of equalities are eliminated so that only the constraints of inequalities are considered in the process of the genetic algorithm. In this paper a new method is presented in which all the constraints of inequalities are eliminated so that only the constraints of equalities are considered. Several genetic operators such as arithmetic crossover, simplex crossover, simple crossover and random vector mutation are designed so that the resulting offspring vectors maintain the feasibility subject to the linear constraints in the framework of the new handling method.

Keyword : Genetic Algorithm. Linear Constraint. Feasibility, Genetic Operator

1. 서 론

유전알고리즘은 Goldberg[2]에 의해서 체계화되고 일반에 사용되기 시작하였다. 현재 유전알고리즘은 많은 분야에서 활용되고 있다. 유전알고리즘은 그 알고리즘이 단순하고 유연하여서 그 동안 여러 다

논문접수일 : 2012년 09월 01일 논문게재확정일 : 2012년 09월 25일
논문수정일(1차 : 2012년 09월 16일)
* 이 논문은 2011년도 강릉원주대학교 교수연구년연구 지원에 의하여 수행되었음.
** 강릉원주대학교 산업정보경영공학과
† 교신저자

른 수리계획법의 해법들을 사용하여 최적해를 구하기 어려웠던 분야에서도 성공적으로 근사 최적해를 구하는데 사용되고 있다.

전통적인 수리계획법의 하나인 선형계획법을 적용하던 분야들은 아직까지 선형계획법을 그대로 사용하고 있다. 이는 선형인 목적함수를 최적화하는데 있어서 현재 널리 사용되고 있는 내부점 기법이 유전알고리즘보다 훨씬 효율적으로 최적해를 찾아주어서 굳이 유전알고리즘을 사용할 필요가 없기 때문이다. 그러나 제약식이 선형이라 하더라도, 목적함수가 비선형이거나, 비연속적이거나, 또는 미분불가능한 경우에는 내부점 기법을 사용할 수 없을 뿐 아니라 여타의 다른 비선형계획법 해법으로도 최적해를 구하기가 매우 어려운 것이 현실이다.

유전알고리즘은 특유의 확률적 탐색방법을 사용함으로써, 해의 탐색 과정에서 목적함수의 미분을 필요로 하지 않는다. 따라서 목적함수가 비선형이거나, 비연속적이거나, 또는 미분 불가능하다 하더라도 아무런 어려움 없이 해를 탐색할 수 있다.

유전알고리즘이 탐색하는 가능해 영역이 제약식에 의해서 제약 되어 있을 경우에는 비가능해가 생성되는 것을 방지하기 위해서 부모 세대로부터 생성되는 자손 세대에 항상 가능해들만 생성되도록 유전 연산자를 설계한다. 그러나 부득이하게 비가능해가 생성될 경우에는, 생성된 비가능해를 수정하여 가능해로 바꾸는 과정을 추가로 수행하거나, 생성된 비가능해에 패널티 함수를 적용하여 차후 세대에서 도태되도록 한다.

유전알고리즘에서 사용하는 염색체의 디자인에 있어서 주로 (0, 1)이진 비트의 열로 표현하는 방법이 널리 쓰이고 있다. 그런데, 선형 또는 비선형계획법과 같은 수리계획법에서는 일반적으로 결정 변수가 연속적인 값을 가지고 그 수가 많다. Renders [6] 등은 염색체를 실수 공간(Real space)의 벡터로 디자인하고, 그 벡터로 표현된 염색체를 효율적으로 진화시키기 위해서 단체교차를 사용하는 유전알고리즘을 제안하였다. 단체교차는 Spendley[7] 등에 의해 제안된 전통적인 탐색 기법 중의 하나이었는데, 이를 유전알고리즘의 교차연산에 사용함으로써 탐색 효율을 높였다. Yen[8] 등은 이러한 단체교차를 다중으로 동시에 수행하는 다중 단체교차를 제안하였다.

한편 제약식을 다루는 방법으로서 Michalewicz [4] 등은 등식제약식을 소거하고 부등식만으로 구성된 제약식을 사용하는 방법을 제안하였다. 이들의 방법은 변수의 수를 줄여주는 장점이 있으나, 부등식의 수가 늘어나고, 돌연변이를 수행할 때 한 번에 하나의 변수에 대해서만 돌연변이를 수행할 수 밖에 없고, 교차연산자의 종류에 따라서는 가능해를 유지시키는데 어려움이 있는 단점이 있다.

본 연구에서는 선형인 제약식에 의해서 제약되는 해공간을 효율적으로 탐색할 수 있도록 염색체를 디자인하고, 비가능해의 탐색을 방지하는 유전연산자를 고안함으로써 효과적으로 최적해를 찾는 유전알고리즘을 제시하였다. 제안된 유전알고리즘은 제약식은 선형이지만 목적함수가 복잡하여 미분이 불가능하거나 불연속적인 수리계획 문제에서 최적해를 구하는데 활용될 수 있다.

2. Michalewicz의 등식 소거 방법

본 연구에서 다루는 문제는 다음의 식 (1)과 같이 선형제약식을 가진 비선형 목적함수에 대해서 최소값 또는 최대값을 구하는 문제이다. 이때 목적함수는 미분이 가능하지 않아도 된다.

$$\begin{aligned} &Min \quad f(\vec{x}) \\ &s.t.\ A\vec{x}\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b \\ &\vec{x}\ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

위의 식 (1)을 푸는 유전알고리즘을 구현하는데 있어서, 제약식을 다루는 방법으로서 Michalewicz [5] 등은 등식제약식을 모두 소거하고 부등식만으로 구성된 제약식을 사용하는 방법을 제안하였다. 즉, 위의 식 (1)의 문제를

$$\begin{aligned} &Min \quad f(\vec{x}) \\ &s.t.\ \vec{l^b} \le \tilde{A}\vec{x} \le \vec{u^b} \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)와 같은 형태로 변형하였다. 그리고 주어진 임의의 해 $\vec{x}=(x_1, \cdots, x_n)$를 수정할 때, 하나의 변수 $x_k(1 \le k \le n)$를 선택하고, 나머지 변수 $x_i(i=1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n)$를 현재의 값으로 고정하여 식 (2)의 부등식에 대입하면, 식 (2)의 가능해 영역을 만족하면서 x_k를 변경 시킬 수 있는 범위를 $l_k^x \le x_k \le u_k^x$와 같이 구할 수 있는데, 이 범위 내에서 현재의 해를 수정하여 새로운 해를 구할 수 있다.

이와 같은 방법은 간단한 계산으로 하나의 변수를 변경시킬 수 있는 장점이 있다. 그리고 교차연산자가 산술교차인 경우에는 새롭게 생성되는 해 $\vec{x'}=a\vec{x^1}+(1-a)\vec{x^2},\ 0 \le a \le 1$가 기존의 해의 볼록조합으로 이루어지므로 선형제약식의 볼록성(Convexity)에 의해서 항상 가능해가 유지된다.

그러나 이러한 방법에는 제약 사항이 있는데, 여러 개의 변수를 동시에 돌연변이 시키지 못한다, 또 산술교차 만으로는 초기의 세대와, 그 이후 돌연변이에 의해서 구해지는 해들의 볼록조합이 이루는 가능해 영역을 벗어나는 해를 탐색할 수가 없어서 전역 최적해를 구하지 못할 가능성이 높아진다. 그리고 새롭게 생성되는 해가 기존의 해들의 볼록조합으로 나타내어질 수 없는 단순교차(Simple crossover), 단체교차(Simplex crossover) 및 휴리스틱 교차(Heuristic crossover) 등에서는 해의 가능성을 유지하기 위해서 추가의 발견적 방법을 사용하여야 한다.

그래서 Michalewicz[5]는 위의 단순교차, 휴리스틱교차 등을 사용하되, 발견적 방법을 추가해서 해의 가능성을 유지하거나, 비가능해를 허용하고 그 비가능해들에 대해서는 패널티 함수를 적용하는 방법을 사용하였다.

이러한 등식소거 방법의 문제점을 극복하는 하나의 방법으로서 Koziel[3] 등이 동형사상(Homomorphous mapping)방법을 제안하였다. 그러나 이 방법에서도 마찬가지로 새로운 해가 가능성을 유지하지는 못하는 경우가 생기므로 그러한 해를 도태시키기 위해서 패널티 함수를 사용하고 있다.

이러한 등식소거 방법이 가지는 한계는, 등식이 가지고 있던 변수들 사이의 관계를 소거함으로써, 선형제약식의 가능해 영역의 경계를 대수적 방법으로 명확히 계산해내지 못하는 것에서 비롯된다. 그러나 전통적인 선형계획법에서는 최소비율법(Minimum Ratio Test)으로 가능해 영역의 경계를 명확히 찾을 수 있다. 그러한 최소비율법을 사용하기 위해서, 부등식을 모두 소거하여 제약식을 모두 등식화하는 방법을 제시한다.

3. 부등식 소거 방법

유전알고리즘을 적용하기 위해서 선형제약식을 다루는 새로운 방법은, 식 (1)에서 부등식을 모두 등식화하여 다음의 식 (3)과 같은 형태로 변환한다.

$$\begin{aligned} &Min \quad f(\vec{x}) \\ &s.t.\ A\vec{x}=b \\ &\vec{x} \ge 0 \end{aligned} \tag{3}$$

위의 식 (3)의 형태로 변화하기 위해서는 선형계획법에서 사용하는 방법과 같이 여유변수, 잉여변수 및 인공변수 등을 사용한다.

4. 유전알고리즘의 설계

우선 유전알고리즘의 효율을 높일 수 있는 염색체로서 실수 벡터로 표현된 염색체를 제안한다. 그리고 최초세대를 구성하는 방법을 서술한다. 그 다음 실수 벡터에 대한 교차연산자로서 산술교차, 단체교차 및 단순교차 방법과, 돌연변이 연산자로서 랜덤 벡터에 의한 돌연변이 방법을 제안한다.

4.1 염색체 디자인과 최초 세대의 구성

실수해를 나타내는 벡터를 각 개체의 염색체로 삼

는다. 즉, 다음의 식 (4)와 식 (5)를 만족하는 n차원의 벡터 $\vec{x}=(x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in R$, $\forall i=1, \cdots, n$를 염색체로 삼는다.

$$A\vec{x}=b \tag{4}$$

$$\vec{x} \geq 0 \tag{5}$$

최초의 세대를 구성하는 개체들의 염색체는 다음과 같이 구한다. 우선 식 (4)와 식 (5)을 만족하는 임의의 벡터 $\vec{x^0}$를 구한다. 이를 위해서 선형계획을 푸는 내부점 기법(Interior Point Method)의 하나인 이단계 원 아핀법(Two-phase Primal Affine Scaling Algorithm(Fang[1]))을 사용한다. 그리고 $\vec{x^0}$에 세대의 크기인 p개의 랜덤 벡터 $\vec{r^i}$, $i=1, \cdots, p$을 생성하고, $\vec{x^i}=\vec{x^0}+s^i\vec{d^i}$, $i=1, \cdots, p$와 같이 초기 세대의 개체들을 구한다. 이때 $\vec{d^i}$는 랜덤 벡터 $\vec{r^i}$를 식 (4)의 영공간(Null Space)에 투영(Projection)한 벡터이고, s^i는 $\vec{x^i}$가 가능성을 유지할 수 있도록 벡터 $\vec{d^i}$의 크기를 조정하는 값이다. 이 값에 대해서는 다음의 가능해 유지 방법에서 설명한다.

4.2 해의 가능성 유지방법

해의 공간이 선형식에 의해서 제약을 받으므로 교차연산과 돌연변이연산을 수행한 후에 비가능해가 나타날 수 있다. 이러한 비가능해를 배제하고 가능해가 최적해로 선택될 수 있도록 하기 위해서 몇 가지 방법들을 사용할 수 있다. 즉, 패널티 함수를 사용하거나 비가능해를 가능해로 수정하는 방법 등이다. 그러나 본 연구에서는 해의 가능성을 유지하는 방법을 사용한다.

선형제약식으로 제약된 가능해 영역은 볼록집합이 된다. 실수 벡터인 염색체의 교차 연산자로 많이 사용되는 산술교차를 사용하는 경우, 그 결과로 생성되는 실수 벡터는 가능해 영역인 볼록집합 안에 있게 된다. 즉, 산술교차는 볼록집합 안에 닫혀있다.

그러나 단체교차나 단순교차의 경우에는 볼록집합 안에 닫혀있지 않으므로 구해진 해의 가능성을 유지하기위한 과정을 추가하여야 한다.

또한 초기의 세대를 구성하거나, 돌연변이를 수행하면서 랜덤 벡터를 더하는 경우에도 가능성을 유지하기위한 과정이 필요하다.

임의의 벡터를 더할 때 가능성을 유지하기 위해서, 더하려는 벡터를 식 (4)의 영공간에 투영된 사영벡터(Projected vector)를 더한다. 즉, 다음의 식 (6)을 만족하는 랜덤 벡터를 더한다.

$$A\vec{x}=0 \tag{6}$$

식 (6)은 식 (4)의 영공간을 나타낸다. 그리고 이 영공간에 투영하는 사영행렬(Projection matrix)은 다음의 식 (7)과 같다.

$$M=I-A^T(AA^T)^{-1}A \tag{7}$$

사영행렬을 사용하여 임의의 벡터 $\vec{r}$을 투영한 사영벡터를 $\vec{d}$라고 하면, $\vec{d}=M\vec{r}$와 같이 구한다. 그러면 $A\vec{d}=AM\vec{r}=A(I-A^T(AA^T)^{-1}A)\vec{r}=(A-AA^T(AA^T)^{-1}A)\vec{r}=0$이므로 $\vec{d}$는 항상 식 (6)을 만족한다. 그리고 사영벡터 $\vec{d}$의 크기를 s만큼 조정하여 더한 벡터를 $\vec{x}=\vec{x^0}+s\vec{d}$라 하면, $A\vec{x}=A(\vec{x^0}+s\vec{d})=A\vec{x^0}+sA\vec{d}=A\vec{x^0}$이므로, $A\vec{x^0}=b$이면 항상 $A\vec{x}=b$이다. 즉, $\vec{x^0}$가 식 (4)를 만족하면 $\vec{x}$도 항상 식 (4)를 만족한다.

그리고 사영벡터의 크기를 조정하는 값 s는 새롭게 구해진 벡터 $\vec{x}=\vec{x^0}+s\vec{d}$가 식 (5)을 만족하도록 그 범위를 정하여야 한다. 즉, $\vec{x^0}+s\vec{d} \geq 0$이어야 하므로, s는 다음의 식 (8)을 만족하는 범위 내에서 정한다.

$$\begin{aligned} Max\{-x_i^0/d_i \mid \forall i,\ d_i>0\} &\leq s \\ Min\{-x_i^0/d_i \mid \forall i, d_i<0\} &\geq s \end{aligned} \tag{8}$$

4.3 교차 및 돌연변이 연산

4.3.1 산술교차(Arithmetic Crossover)

산술교차는 두 부모 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 를 볼록조합 하

여 두 자손 벡터 $\overrightarrow{x'} = a\vec{x} + (1-a)\vec{y}$과 $\overrightarrow{y'} = a\vec{y} + (1-a)\vec{x}$와 같이 구하는데, 이때 a는 $0 \le a \le 1$의 범위 안에서 임의로 선한다. 이러한 방법으로 가능해인 부모 벡터로부터 구한 두 자손 벡터는 항상 가능성을 유지한다.

4.3.2 단체교차(Concurrent Simplex Crossover)

단체교차는 먼저 부모 세대에서 p개의 우수한 벡터 $\overrightarrow{x^i}$, $i = 1, \cdots, p$를 찾고 그 벡터들의 중심 벡터를 $\overrightarrow{x^C} = \frac{1}{p}(\overrightarrow{x^1} + \overrightarrow{x^2} + \cdots + \overrightarrow{x^p})$와 같이 구한다. 그리고 교차하고자 하는 부모 벡터 $\overrightarrow{x^i}$를 중심 벡터 $\overrightarrow{x^C}$에 대해서 $\vec{y} = \overrightarrow{x^C} + s(\overrightarrow{x^C} - \overrightarrow{x^i})$와 같이 반사(Reflection)시켜 자손 벡터를 얻는다. 이 때 구해지는 자손 벡터는 식 (4)를 만족한다. 그러나 식 (8)을 항상 만족하지는 않는다. 따라서 식 (8)에 의해서 자손 벡터의 이동크기를 제한한다. 즉, $\overrightarrow{x^0} = \overrightarrow{x^C}$, $\vec{d} = \overrightarrow{x^C} - \overrightarrow{x^i}$로 놓고, 식 (8)의 범위 안에서 s를 정하여서 자손 벡터 $\vec{y} = \overrightarrow{x^C} + s(\overrightarrow{x^C} - \overrightarrow{x^i})$를 구한다. 일반적으로 단체교차에서는 s의 값을 1또는 -1/2로 정하여 어느 것이든 적응도가 증가하는 방향으로 이동하게 되는데, 만약 이 값이 식 (8)의 범위를 벗어나게 되면, 그 범위를 벗어나지 않는 한도 안에서 최대한 큰 값으로 정한다.

4.3.3 단순교차(Simple Crossover)

단순교차는 두 부모 벡터 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$가 주어져 있을 때, 임의의 k번째 위치에서 교차를 수행하여 $\overrightarrow{x'} = (x_1, x_2, \cdots, x_k, y_{k+1}, ,\cdots, y_n)$, $\overrightarrow{y'} = (y_1, y_2, \cdots, y_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$와 같이 자손 벡터를 구하는 것이다. 이렇게 구해진 자손 벡터는 식 (5)을 만족한다. 그러나 식 (4)는 항상 만족하지 않는다. 그래서 식 (7)의 사영행렬을 사용하여 자손 벡터를 식 (4)에 사영하고, 그 사영된 벡터가 다시 식 (6)을 만족하도록 식 (8)를 사용하여 수정한다. 즉, s_x의 경우에는 $\overrightarrow{x^0} = \vec{x}$, $\vec{d} = M(\overrightarrow{x'} - \vec{x})$로 놓고, s_y의 경우에는 $\overrightarrow{x^0} = \vec{y}$, $\vec{d} = M(\overrightarrow{y'} - \vec{y})$로 놓고 식 (8)의 범위 안에서 s_x와 s_y를 각각 정한다. 그리고 $\overrightarrow{x''} = x + s_x M(\overrightarrow{x'} - \vec{x})$, $\overrightarrow{y''} = y + s_y M(\overrightarrow{y'} - \vec{y})$와 같이 자손 벡터를 수정한다.

4.3.4 랜덤벡터 돌연변이(Random Vector Mutation)

선택된 부모 벡터에 임의의 랜덤 벡터를 더하여 돌연변이 된 벡터를 $\overrightarrow{x'} = \vec{x} + \vec{r}$와 같이 얻는다. 이때 구해진 벡터 $\overrightarrow{x'}$은 식 (4)와 식 (5)을 모두 항상 만족하지 않는다. 따라서 식 (7)의 사영행렬과 식 (8)을 사용하여 가능성을 유지하는 돌연변이 벡터를 구한다. 어느 한 부모 벡터 $\vec{x}$를 선택하여 랜덤 벡터 $\vec{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$, $r_i \in [-1, 1], \forall i = 1, \cdots, n$를 $\overrightarrow{x'} = \vec{x} + sM\vec{r}$과 같이 더하여 돌연변이 된 벡터를 구한다. s는 $\overrightarrow{x^0} = \vec{x}$, $\vec{d} = M\vec{r}$로 놓고 식 (8)을 만족하는 범위 내에서 정한다.

5. 결 론

선형제약식을 가진 비선형 목적함수의 최적해를 찾는 유전알고리즘을 제안하였다. 기존의 등식소거 방법과는 다르게, 부등식을 소거하는 방법으로 선형제약식을 표준화하였다. 유전염색체는 실수 공간의 벡터로 디자인하였다. 유전연산 과정에서 새롭게 생성되는 벡터들이 제약식에 대하여 가능성을 유지하도록 하기 위해서, 벡터들을 제약식의 영공간에 사영하고 각 변수의 상한과 하한 값 이내에 유지되도록 최소비율법을 사용하였다.

제안된 부등식소거 방법을 사용하면 여러 가지의 유전연산자들을 손쉽게 적용할 수 있는 장점이 있다. 유전연산의 결과 생성되는 벡터가 기존 벡터들의 볼록조합에 포함되지 않더라도, 그 해가 선형제약식의 가능해 영역 안에 유지되도록 수정하는 과정을 간단하게 수행할 수 있다. 본 연구에서는 산술교차, 단체교차 및 단순교차 등의 교차연산자와 랜덤 벡터를 이용한 돌연변이 연산자를 제안하였다. 이들 연산들은 모두 가능성을 유지하는 벡터들을 생성한다.

참 고 문 헌

[1] Fang, S.C. and S. Puthenpura, *Linear Optimization and Extensions-Theory and Algorithms*, Prentice-Hall, 1993.

[2] Goldberg, D.E., *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts, 1989.

[3] Koziel, S. and Z. Michalewicz, "Evolutionary Algorithms, Hormomorphous Mappins, and Constrained Parameter Optimization," *Evolutionary Computation*, Vol.7, No.1(1999), pp.124-141.

[4] Michalewicz, Z. and C. Janikow, "GENOCOP : A Genetic Algorithm for Numerical Optimization Problems with Linear Constraints," *Communications of the ACM*, Vol.39, No.12 (1996), pp.175-201.

[5] Michalewicz, Z., "Evolutionary Computation Techniques for Nonlinear Programming Problems," *International Transactions in Operational Research*, Vol.1, No.2(1994), pp.223-240.

[6] Renders, J.M. and S.P. Flasse, "Hybrid methods using genetic algorithms for global optimization," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, Vol.26, No.2 (1996), pp.243-258.

[7] Spendley, W., G.R. Hext, and F.R. Himsworth, "Sequential application of simplex designs in optimization and evolutionary opreation," *Technometrics*, Vol.4(1962), pp.441-461.

[8] Yen, J., J.C. Liao, L. Bogju, and D. Randolph, "A hybrid approach to modeling metabolic systems using a genetic algorithm and simplex method," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, Vol.28, No.2(1998), pp.173-191.