

논문 2012-49-9-9

표본 적응 프로덕트 양자기에 기초한 격자 벡터 양자화의 엔트로피 부호화와 무기역성 가우시언 분포에 대한 성능 분석

(Entropy-Coded Lattice Vector Quantization Based on the Sample-Adaptive Product Quantizer and its Performance for the Memoryless Gaussian Source)

김 동 식*

(Dong Sik Kim)

요 약

높은 전송률에서 엔트로피 제한 양자화를 수행 시 최적의 양자기는 격자(lattice) 형태의 부호책을 가지는데, 규칙적인 구조로 인하여 양자화 과정이 단순하며, 격자의 형태에 따라 여러 양자화 알고리즘이 제안되어있다. 이러한 격자 벡터 양자기(vector quantizer: VQ)는 표본 적응 프로덕트 양자기(sample-adaptive product quantizer: SAPQ)를 사용하여 구현이 가능하며, 그 출력도 단순하게 엔트로피 부호화가 가능하다. 본 논문에서는 SAPQ에 기초한 엔트로피 부호화 방법을 제안하고, 무기역성(memoryless) 가우시언 분포에 대하여 여러 제안한 격자 VQ를 구현하고 양자화 에러 곡선을 엔트로피에 대하여 구하여 그 성능을 비교하였다. 실험을 통하여 전송률이 증가하면서 균등 분포에 이론적으로 얻는 이득과 비슷한 이득을 무기역성 가우시언 분포에서도 SAPQ의 출력을 엔트로피 부호화함으로써 얻을 수 있음을 확인하였다.

Abstract

Optimal quantizers in conducting the entropy-constrained quantization for high bit rates have the lattice structure. The quantization process is simple due to the regular structure, and various quantization algorithms are proposed depending on the lattice. Such a lattice vector quantizer (VQ) can be implemented by using the sample-adaptive product quantizer (SAPQ) and its output can also be easily entropy encoded. In this paper, the entropy encoding scheme for the lattice VQ is proposed based on SAPQ, and the performance of the proposed lattice VQ, which is based on SAPQ with the entropy coder, is asymptotically compared as the rate increases. It is shown by experiment that the gain for the memoryless Gaussian source also approaches the theoretic gain for the uniform density case.

Keywords : 격자 벡터 양자화, 엔트로피 부호화, 표본 적응 프로덕트 양자기, lattice VQ, SAPQ

I. 서 론

양자화는 손실 소스 부호화의 핵심으로, 블록 소스

부호화 이론에 근거하여 벡터 양자기(vector quantizer: VQ)를 사용하여 벡터의 차수를 높여 가면 이론적인 최저 왜곡인 Shannon의 최저 경계(Shannon lower bound: SLB)에 근접할 수 있다^[1]. 양자기의 출력 인덱스의 부호화를 위하여 고정길이부호화 대신에 가변길이 부호화를 위하여 엔트로피 부호기(entropy coder)를 사용하면 낮은 벡터의 차수에서도 SLB에 보다 빠르게 근접할 수 있다^[2]. 높은 전송률에서 엔트로피를 고려한 양

* 정회원-교신저자, 한국외국어대학교 전자공학과
(Department of Electronics Engineering, Hankuk University of Foreign Studies)

※ 이 연구는 2012학년도 한국외국어대학교 교내 학술 연구비의 지원에 의하여 이루어진 것임.

접수일자: 2012년3월24일, 수정완료일: 2012년6월8일

자의 형태는 균등 또는 격자(lattice) 양자기가 되며^[3~4], 균등 스칼라 양자기(scalar quantizer: SQ)와 엔트로피 부호기를 사용하는 조합으로 높은 전송률에서의 평균 양자화 왜곡이 SLB와 $10\log_{10}(\pi e/6) \approx 1.53\text{dB}$ 의 간격까지 근접할 수 있다. 이러한 조합의 부호화는 균일 SQ와 스칼라 엔트로피 부호기 구현의 용이함으로 인하여 다양한 영상의 손실 소스 부호화에 흔히 사용한다. Fischer^[5]는 격자 \mathbf{Z}^m (균등 SQ)에 적절한 벡터 엔트로피 부호화 기법을 사용하였으며 64정도 되는 높은 차수에서 고정길이부호화 기법을 사용하여 SLB와 1.53 dB 차이까지 근접할 수 있다^[5]. 1.53dB의 간격을 줄이기 위해선 격자 \mathbf{Z}^m 대신에 D_m 과 같은 다른 격자를 사용해야한다. 또한 격자 VQ 출력의 벡터 엔트로피 부호화를 위한 부호기 설계를 위하여 많은 확률을 구해야 하므로 구현 복잡도를 낮추기 위하여 양자화된 값의 놈(norm)에 대한 함수 또는 분류로 엔트로피부호화를 단순화시키는 방법을 사용한다^[6~8].

표본 적응 프로덕트 양자기(sample-adaptive product quantizer: SAPQ)^[9~10]는 여러 개의 프로덕트 부호책을 사용할 수 있는 적응 양자화 형태를 가진 것으로, 일반 VQ로는 구현이 힘든 큰 벡터 차수 또는 높은 전송률을 가지는 VQ를 상대적으로 낮은 복잡도와 작은 크기의 부호책으로 구현할 수 있다. 본 논문에서는 격자 A_2 , D_m^* , E_8 에 기초한 격자 VQ를 SQ에 기초한 SAPQ로 구현하였으며^[11], 격자 VQ 출력의 효율적인 엔트로피 부호화를 위하여 SAPQ의 구조에 의거한 엔트로피 부호기를 제안하였다. 제안한 엔트로피 부호화는 크기가 작은 확률 집합을 사용하여 Huffman이나 arithmetic 부호기를 설계하여 구현이 가능하다. 무기역성 가우시언 분포를 가지는 입력에 대하여 제안한 양자기를 여러 전송률에 대하여 실험하고 그 성능을 비교 고찰하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II장에서는 SQ에 기초한 SAPQ에 대하여 소개하였고, 제 III장에서는 격자 VQ를 SQ에 기초한 SAPQ로 구현하는 것에 대하여 언급하였다. 제 IV장에서는 SAPQ에 기초하여 격자 VQ의 출력을 엔트로피 부호화하는 방법을 제안하였으며, 제 V장에서는 모의실험을 통하여 격자 VQ의 성능을 비교하고 토론하였으며, 마지막 장에서 본 논문의 결론을 내렸다.

II. 표본 적응 프로덕트 양자화

본 장에서는 [10]에서 제안된, SQ에 기초한 SAPQ를 간단히 언급하려한다.

동일한 분포를 가지는 불규칙 변수열 X_1, X_2, \dots 로 구성된 \mathbf{R}^m 공간의 불규칙 벡터 $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_m)$ 를 양자화하려고 하는 입력이라고 하고, 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ 을 불규칙 벡터 \mathbf{X} 의 한 관찰이라고 하자. 양의 정수 η 에 대하여, 부호기에 미리 설계한 $J := 2^\eta$ 개의 프로덕트 부호책을 가지고 있으면서, 입력되는 각 표본마다 적용하여 J 개의 프로덕트 부호책 중에서 하나를 선택할 수 있는 일종의 적응 양자화를 생각해 보자. 여기서 η 는 선택된 부호책을 지정하기 위해 필요한 부가 비트가 된다. $C_{i,j} (\subset \mathbf{R})$ 를 $j \in \{1, \dots, J\}$ 번째 프로덕트 부호책 구성을 위한 재현 부호책이라 하고 이러한 재현 부호책들의 원소 개수는 모두 같은 n 이라고 하자. 적응 양자기는 먼저 각 표본 x_1, \dots, x_m 을 부호책 $C_{1,j}, \dots, C_{m,j}$ 를 각각 사용해서 다음과 같은 J 개의 예리 합을 구한다.

$$\sum_{i=1}^m \min_{y \in C_{i,j}} (x_i - y)^2 \quad (j = 1, \dots, J) \quad (1)$$

주어진 j 에서 각 x_i 에 대하여 예리 $(x_i - y)^2$ 가 최소가 되는 y 를 집합 $C_{i,j}$ 에서 찾는 과정은 입력 x_i 를 부호책 $C_{i,j}$ 를 사용하여 SQ로 양자화하는 과정이다. 따라서 (1)의 j 번째 예리 합은 m 개의 입력 x_1, \dots, x_m 을 부호책 $C_{1,j}, \dots, C_{m,j}$ 을 가지는 m 개의 SQ를 각각 사용하여 얻는 예리의 합이 된다. 이러한 양자화는 \mathbf{R}^m 공간에서 프로덕트 부호책 $C_{1,j} \times \dots \times C_{m,j}$ 을 사용하는 양자화가 된다. 다음 단계는 (1)의 J 개의 예리 합 중 최소가 되는 최적의 프로덕트 부호책을 선택한다. 따라서 이러한 적응 양자기의 평균 양자화 왜곡은 다음과 같다.

$$\frac{1}{m} E \left\{ \min_{j \in \{1, \dots, J\}} \sum_{i=1}^m \min_{y \in C_{i,j}} (X_i - y)^2 \right\} \quad (2)$$

(1)의 예리에 기초한 (2)의 평균 양자화 왜곡을 가지는 양자기를 SQ에 기초한 SAPQ라 부른다^[10]. 이러한 SAPQ의 부호책은 다음과 같이 \mathbf{R}^m 공간에서 J 개의

프로덕트 부호책의 합집합 형태가 된다.

$$\bigcup_{j=1}^J C_{1,j} \times \dots \times C_{m,j} \quad (3)$$

또한 이러한 SAPQ 부호책은 \mathbf{R}^m 공간에서 Jn^m 개의 부호단어를 가지고 있으며, 스칼라 표본에 대한 전송률은 다음과 같다.

$$\frac{1}{m} \log_2(Jn^m) = \log_2 n + \frac{\eta}{m} \text{ (bits/sample)} \quad (4)$$

m 개의 SQ를 사용하는 경우에는 \mathbf{R}^m 공간에서의 부호책은 하나의 프로덕트 집합이 되는데, SAPQ 경우는 (3)에서 보는바와 같이 보다 자유로운 구조를 가질 수 있으므로, SQ보다 평균 양자화 왜곡을 낮추어 VQ의 성능을 얻을 수 있다. 그러나 SAPQ의 부호화 복잡도는 SQ 수준이 되어^[10], 높은 전송률의 VQ 구현이 가능하다.

III. 격자 벡터 양자화

Conway와 Sloane^[12]은 여러 종류의 격자에 대하여 양자화를 위한 효율적인 부호화 알고리즘들을 소개하였다. 본장에서는 프로덕트 집합의 coset들의 합집합 형태를 가지는 격자에 대하여 SAPQ라는 단일화된 방법으로 격자 VQ 설계가 가능함을 간단히 정리하려한다^[8].

1. 표본 적응 프로덕트 양자기에 기초한 격자 벡터 양자화

양자화를 위하여 일반적으로 많이 사용하는 격자는 \mathbf{Z}^m 과 D_m 이 있는데, \mathbf{Z}^m 의 경우 양자화 과정은 균등 SQ와 같으므로 매우 단순하여 손쉽게 사용할 수 있다^[5]. 이때 양자화 왜곡은 SQ와 동일하지만, 입력 불규칙 변수들이 서로 상관도가 존재하면 격자 VQ의 출력을 벡터 형태로 엔트로피 부호화를 수행하여 양자화 이득을 취할 수 있다^[1]. 그러나 입력 불규칙 변수가 i.i.d.인 경우에는 벡터 엔트로피 부호화를 통한 이득을 얻을 수 없으며^[2, p.277], 양자화 영역의 형태를 통해서 이득을 얻어야 한다. 따라서 i.i.d.의 경우에는 \mathbf{Z}^m 보다는 D_m 과 같은 격자를 사용해야 한다.

프로덕트 집합의 coset의 합집합으로 구성돼있는 격자를 고려해 보자. $m \times m$ 크기의 양의 상수로 구성된 대각선 행렬 G 에 대하여 다음과 같은 격자 L_0 을 정의하자.

$$L_0 := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = G\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}^m\} \quad (5)$$

또한 L_0 의 coset들의 합집합으로 이루어진 격자 L 을 다음과 같이 정의하자.

$$L = \bigcup_{j=1}^J (\mathbf{r}_j + L_0) \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{r}_j \in \mathbf{R}^m$ 이다. 만일 벡터 $\mathbf{x} (\in \mathbf{R}^m)$ 에 대하여 $\Phi(\mathbf{x})$ 가 격자 L_0 의 가장 가까운 점을 나타낸다고 하면, 격자 $\mathbf{r}_j + L_0$ 과 가장 가까운 점은 $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j$ 이 된다. 따라서, 격자 L 에서 \mathbf{x} 와 가장 가까운 점을 찾는 방법은, 우선 J 개의 격자 $\mathbf{r}_j + L_0$ 과 가장 가까운 J 개의 점을 $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j$ 로부터 각각 찾고, 이러한 J 개의 점 중에서 \mathbf{x} 와 가장 가까운 점을 찾으면 된다^[11~12]. 이러한 과정을 격자 벡터 양자화라고 한다.

(5)의 격자 행렬 L_0 은 프로덕트 집합으로 (4)의 SAPQ 부호책을 구성하는 각 프로덕트 집합을 다음 식을 만족하도록 설계할 수 있다.

$$C_{1,j} \times \dots \times C_{m,j} \subset \mathbf{r}_j + L_0 \quad (j = 1, \dots, J)$$

그러면 (4)에서 언급한 SAPQ의 부호책은 격자 L 과 동등한 격자의 부분 집합이 된다. 또한 (6) 이후에 언급한, 격자에 가장 근접한 점을 찾는 방법은 (2)와 (3)에서 언급한 SAPQ의 부호화 과정과 일치한다. 정리하면, (6)과 동등한 격자에 기초한 격자 VQ는 SQ에 기초한 SAPQ를 사용하여 구현할 수 있다^[10~11]. 아울러 이러한 격자 VQ의 부호화는 SAPQ의 부호화 과정으로 인하여 단순한 정수 변환 함수를 사용하여 수행할 수 있다^[11]. 즉 격자 L 에 기초한 격자 VQ는 정수 변환과 (1)의 J 개 예러 합의 비교로 양자화가 가능하며, 매우 낮은 부호화 복잡도를 가진다.

2. 격자 A_2 , D_m^* , E_8 의 벡터 양자화 구현

여러 중요한 격자에 대하여 SAPQ를 사용한 격자 VQ 설계는 [9]과 [10]에 자세히 언급되어 있는데, 본 절에서는 프로덕트 집합의 coset의 합집합 형태로 간단히 정리하였다.

먼저 격자 A_2 는 2차원($m = 2$) 공간에서 최적의 양자화 영역의 형태를 만드는 정육각형으로 다음으로부터 (6)의 격자 L 형태로 나타낼 수 있다.

격자 A_2 :

$$L_0 = \mathbf{Z} \times \{\dots, -2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \dots\}$$

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0), \mathbf{r}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

따라서 A_2 는 $J=2$ 인 SAPQ로 구현이 가능하며 균등 분포의 입력에 대하여 점근적인 이득은 약 0.166dB가 된다.

격자 D_m^* 은 격자 D_m 의 이중 격자(dual lattice)로, 3차원($m=3$) 공간에서 최적으로 알려져 있으며 격자 A_3^* 와 동등하고, $m=4, 5, 9, 10$ 에서 각각 알려진 격자 중에서 가장 이득이 높다^[13]. 일반적으로 Conway와 Sloane^[12]이 제안한 D_m 의 고속 알고리즘을 사용하여 쉽게 D_m 에 기초한 격자 VQ를 구현할 수 있는데, SAPQ의 구조에 기초한 경우에는 D_m^* 이 보다 간단하며 이득도 D_m 보다 더 크다. D_m^* 은 다음으로부터 격자 L 형태로 나타낼 수 있다.

격자 D_m^* :

$$\mathbf{r}_1 = (0, \dots, 0), \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(1, \dots, 1)$$

$$L_0 = \mathbf{Z}^m, G = I_m$$

여기서 I_m 은 $m \times m$ 의 단위행렬이다. 따라서 D_m^* 은 $J=2$ 의 SAPQ로 구현할 수 있으며 D_8^* 을 사용하면 균등 분포의 입력에 대하여 약 0.473dB의 이득을 취할 수 있다. 보다 구체적인 D_m^* 의 양자화 과정은 참고문헌 [10, Example 1]과 [11, 제 IV장]에 소개되어있다.

격자 E_8 은 8차원($m=8$)에서 가장 큰 이득을 내는 격자로 알려져 있는데, 다음으로부터 격자 L 형태로 나타낼 수 있다.

격자 E_8 :

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), \mathbf{r}_4 = \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}_5 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0), \mathbf{r}_6 = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_7 = \frac{1}{2}(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0), \mathbf{r}_8 = \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_9 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \mathbf{r}_{10} = \frac{1}{2}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{r}_{11} = \frac{1}{2}(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$\mathbf{r}_{13} = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1), \mathbf{r}_{14} = \frac{1}{2}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$$

$$\mathbf{r}_{15} = \frac{1}{2}(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1), \mathbf{r}_{16} = \frac{1}{2}(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$L_0 = \mathbf{Z}^m, G = E_m$$

따라서 E_8 격자 VQ는 $J=16$ 인 SAPQ로 구현이 가능하며 균등 분포의 입력에 대하여 점근적인 이득은 약 0.654dB가 된다. 보다 구체적인 E_8 의 양자화 과정은 참고문헌 [10, Example 2]에 소개되어있다.

IV. 표본 적응 프로덕트 양자화에 기초한 격자 벡터 양자화의 엔트로피 부호화

본 절에서는 격자 VQ의 출력을 엔트로피 부호화하는 것을 SAPQ를 기초로 수행하는 방법에 대하여 제안하려 한다.

불규칙 벡터 \mathbf{X} 의 관찰 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ 를 SAPQ에 입력하여 양자화를 수행한다고 하자. 만일 i 번째 입력 x_i 를 부호책 $C_{i,j}$ 를 가지는 SQ로 양자화하는 경우 출력 인덱스 함수를 $\alpha_{i,j} : \mathbf{R}^m \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 로 표기하고 $x \in \mathbf{R}$ 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha_{i,j}(x) := \arg \min_{\ell \in \{1, \dots, n\}} (x - y_{i,j}(\ell))^2$$

이 식에서 $C_{i,j} = \{y_{i,j}(1), \dots, y_{i,j}(n)\}$ ($i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, J$)이다. 또한, SAPQ가 선택한 프로덕트 부호책의 인덱스를 나타내는 함수를 $\mu : \mathbf{R}^m \rightarrow \{1, \dots, J\}$ 라고 하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mu(\mathbf{x}) := \arg \min_{j \in \{1, \dots, J\}} \sum_{i=1}^m \min_{y \in C_{i,j}} (x_i - y)^2$$

그러면, i 번째 입력 x_i 를 나타내기 위한 양자화 인덱스는 다음과 같이 두 가지로 구성된다. 첫 번째는 사용된 부호책 $C_{i,\mu(\mathbf{x})}$ 을 지칭하기 위한 인덱스 $\mu(\mathbf{x})$ 이고, 두 번째는 부호책 $C_{i,\mu(\mathbf{x})}$ 를 사용하여 SQ로 x_i 를 양자화 할 때 선

택된 부호책의 원소를 지칭하는 인덱스 $\alpha_{i,\mu(\mathbf{x})}$ 가 된다. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ 의 양자화 출력의 인덱스의 부호화를 위하여 고정부호화를 사용한다고 하면, m 개의 입력 x_1, \dots, x_m 에 동일하게 해당되는 $\mu(\mathbf{x})$ 를 위하여 $\eta = \log_2 J$ 비트가 필요하며, 부호책 원소의 인덱스를 위하여 $m \log_2 n$ 비트가 필요하다. 따라서 스칼라 표본에 대한 전송률은 (4)와 같이 $\log_2 n + \eta/m$ 이 된다. 여기서 η/m 는 SAPQ에서 매 m 개의 입력마다 선택된 프로덕트 부호책을 지정하기 위한 부가 비트가 된다. 전송률 $\log_2 n + \eta/m$ 에 대하여 균등 분포에 대한 격자 VQ의 성능은 전송률이 커짐에 따라 각각 격자 D_8^* 과 E_8 의 이득을 얻을 수 있음을 실험적으로 관찰할 수 있다^[10, Examples1,2].

이제 균등 분포가 아닌 입력의 격자 VQ를 사용한 양자화를 위하여, SAPQ의 출력 인덱스를 엔트로피 부호기를 사용하여 가변부호화하는 경우에 대하여 살펴보자. \mathbf{R}^m 공간에서 SAPQ의 부호단어는 다음과 같이 Jn^m 개로 주어진다.

$$\mathbf{y}_j(\ell_1, \dots, \ell_m) := (y_{1,j}(\ell_1), \dots, y_{m,j}(\ell_m))$$

$$(j = 1, \dots, J, \ell_1, \dots, \ell_m = 1, \dots, n)$$

입력인 불규칙 벡터 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 가 이 중 하나로 양자화될 확률을 $p(\ell_1, \dots, \ell_m, j)$ 로 나타내면 다음과 같이 정의된다.

$$p(\ell_1, \dots, \ell_m, j)$$

$$:= \Pr\{\alpha_{1,j}(X_1) = \ell_1, \dots, \alpha_{m,j}(X_m) = \ell_m, \mu(\mathbf{X}) = j\}$$

따라서 SAPQ 출력의 스칼라 입력에 대한 엔트로피를 $H(\mathbf{X})$ 로 표기할 때 다음과 같다.

$$H(\mathbf{X})$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n \sum_{j=1}^J p(\ell_1, \dots, \ell_m, j) \log_2 p(\ell_1, \dots, \ell_m, j)$$
(8)

(8)에 근접하는 엔트로피 부호기를 구현하기 위해서는 Jn^m 개 확률의 집합 $\{p\}$ 를 사용하여 하나의 엔트로피 부호기를 설계하면 된다. 확률 $q_j(\ell_1, \dots, \ell_m)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$q_j(\ell_1, \dots, \ell_m) := p(\ell_1, \dots, \ell_m, j) / P_j$$

$$= \Pr\{\alpha_{1,j}(X_1) = \ell_1, \dots, \alpha_{m,j}(X_m) = \ell_m \mid \mu(\mathbf{X}) = j\}$$

여기서 확률 P_j 는 $P_j := \Pr\{\mu(\mathbf{X}) = j\}$ 로 정의한다. 그러면 (8)의 엔트로피는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$H(\mathbf{X}) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^J P_j$$

$$\sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n q_j(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 q_j(\ell_1, \dots, \ell_m)$$

$$- \frac{1}{m} \sum_{j=1}^J P_j \log_2 P_j$$
(9)

(9)와 같은 형태로 엔트로피 부호기를 구현하려면 먼저 부가 비트를 위하여 J 개 확률을 가지는 집합 $\{P_j\}$ 를 사용하여 하나의 엔트로피 부호기를 설계하고 Jn^m 개 확률로 구성된 집합 $\{q_j\}$ 를 사용하여 또 다른 하나의 엔트로피 부호기를 설계한다. 즉 총 $J(n^m + 1)$ 개의 확률을 구해야 한다.

이제 격자 VQ를 SQ에 기초한 SAPQ의 구조에 기초하여 엔트로피 부호화를 수행해 보자. 먼저 프로덕트 부호책을 지칭하는 인덱스 j 와 무관한 확률 q 를 $q(\ell_1, \dots, \ell_m) := \sum_{j=1}^J p(\ell_1, \dots, \ell_m, j)$ 라고 정의하면 (9)의 엔트로피는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$H(\mathbf{X}) = -\frac{1}{m} \sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 q(\ell_1, \dots, \ell_m)$$

$$+ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^J P_j \sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n q_j(\ell_1, \dots, \ell_m)$$

$$\log_2 \frac{q(\ell_1, \dots, \ell_m)}{q_j(\ell_1, \dots, \ell_m)} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^J P_j \log_2 P_j$$
(10)

$\log_2(x) \leq x - 1$ ($x \in \mathbf{R}$)로부터 (10)에서 오른쪽의 두 번째 항은 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\sum_{j=1}^J P_j \sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n q_j(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 \frac{q(\ell_1, \dots, \ell_m)}{q_j(\ell_1, \dots, \ell_m)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^J P_j \sum_{\ell_1=1}^n \dots \sum_{\ell_m=1}^n (q(\ell_1, \dots, \ell_m) - q_j(\ell_1, \dots, \ell_m))$$

$$= 0$$
(11)

따라서 (10)과 (11)로부터 (9)의 엔트로피는 다음을 만족한다.

$$H(\mathbf{X}) \leq -\frac{1}{m} \sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 q(\ell_1, \dots, \ell_m) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^J P_j \log_2 P_j \quad (12)$$

(12)에서 등식은 모든 j 에 대하여 $q_j = q$ 일 때 성립한다. (12)와 같이 $\{q_j\}$ 대신에 $\{q\}$ 를 사용하면 Jn^m 개의 확률로 J 개의 엔트로피 부호기를 설계하는 대신 n^m 개의 확률로 1개의 엔트로피 부호기를 설계하므로 설계 복잡도를 낮출 수 있다.

이제 SAPQ에서 각 입력 x_1, \dots, x_m 에 대한 출력을 m 개의 엔트로피 부호기로 각각 부호화하는 것에 대하여 고찰해보자. 이때 부가 비트를 고정부호화한다고 하면 (9)에서 오른쪽의 두 번째 항은 η/m 이 된다. 확률 $p_i(\ell)$ ($i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, n$)을 다음과 같이 정의하자.

$$p_i(\ell) := \sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_{i-1}=1}^n \sum_{\ell_{i+1}=1}^n \cdots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_{i-1}, \ell, \ell_{i+1}, \dots, \ell_m)$$

이 확률은 i 번째 입력 x_i 에 대하여 인덱스 j 와 무관하게 ℓ 번째 부호단어에 속하는 확률로 이러한 엔트로피 부호화를 수행하는 SAPQ를 ‘SAPQ- m ’이라고 하며 이때 엔트로피를 $H_{\text{SAPQ-}m}$ 로 나타낼 때 다음과 같이 주어진다.

$$H_{\text{SAPQ-}m}(\mathbf{X}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^n p_i(\ell) \log_2 p_i(\ell) + \frac{\eta}{m} \quad (13)$$

(13)의 엔트로피와 (9)의 엔트로피의 관계를 고찰해보자. (12)에서 오른쪽의 첫 번째 항은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & -\sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 q(\ell_1, \dots, \ell_m) \\ &= -\sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 (p_1(\ell_1) \times \cdots \times p_m(\ell_m)) \\ &+ \sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_m) \log_2 \left(\frac{p_1(\ell_1) \times \cdots \times p_m(\ell_m)}{q(\ell_1, \dots, \ell_m)} \right) \\ &\leq -\sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^n p_i(\ell) \log_2 p_i(\ell) \\ &+ \sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_m=1}^n q(\ell_1, \dots, \ell_m) \left(\frac{p_1(\ell_1) \times \cdots \times p_m(\ell_m)}{q(\ell_1, \dots, \ell_m)} - 1 \right) \\ &= -\sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^n p_i(\ell) \log_2 p_i(\ell) \quad (14) \end{aligned}$$

따라서 (12)와 (14)로부터 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$H(\mathbf{X}) \leq H_{\text{SAPQ-}m}(\mathbf{X}) \quad (15)$$

(13)에서 오른쪽의 첫 번째 항, 즉 (14)의 엔트로피는, i 번째 입력 x_i 를 양자화하는데 선택된 부호단어의 인덱스를 엔트로피 부호화하기 위하여 확률 집합 $\{p_i(\ell)\}$ 을 사용하여 하나의 엔트로피 부호기를 설계한다. 따라서 전체 입력 x_1, \dots, x_m 에 대하여 mn 개의 확률을 사용하여 m 개의 엔트로피 부호기를 만들어서 부호화를 수행하며, 전체적으로 $mn + J$ 개의 확률을 사용하여 SAPQ의 엔트로피 부호화를 수행할 수 있다. 이는 엔트로피 부호화의 성능 측면에서 (8)과 (12)의 경우보다 떨어지지만, (8)의 경우 Jn^m , (12)의 경우 $n^m + J$ 의 확률이 필요한 경우보다, 제안한 (13)의 경우는 더 적은 $mn + J$ 가 되므로 엔트로피 부호기를 설계하는데 있어서 보다 낮은 복잡도를 가질 수 있는 장점이 있다. 또한 스칼라 입력 x_i 에 대하여 SQ로 바로 양자화하고 그 출력 인덱스를 다른 입력의 출력 인덱스와는 무관하게 바로 엔트로피 부호화가 가능하여 엔트로피 부호화를 매우 단순화시킬 수 있다.

(13)의 엔트로피 부호화를 더욱 단순화시킬 수 있다. 입력 x_1, \dots, x_m 의 각각의 풀력의 엔트로피 부호화를 위하여 하나의 확률 집합 $\{P(\ell)\}$ 을 사용하여 설계한 하나의 엔트로피 부호기를 사용한다고 하자. 먼저 인덱스 i 와 무관한 확률 $P(\ell)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$P(\ell) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i(\ell)$$

이러한 SAPQ를 ‘SAPQ-1’이라 부르고 엔트로피를 $H_{\text{SAPQ-1}}$ 라고 표기하면 다음과 같다

$$H_{\text{SAPQ-1}}(\mathbf{X}) = -\sum_{\ell=1}^n P(\ell) \log_2 P(\ell) + \frac{\eta}{m} \quad (16)$$

그러므로 (16)의 SAPQ 엔트로피는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}) &\leq H_{\text{SAPQ-}m}(\mathbf{X}) \\ &\leq H_{\text{SAPQ-1}}(\mathbf{X}) \leq \log_2 n + \frac{\eta}{m} \end{aligned}$$

표 1. 엔트로피 부호기 설계를 위한 확률의 개수
Table 1. Number of probabilities to design the entropy coder.

Entropy coding	Number of probabilities	Example of E_8 ($m=8, n=1024, \eta=4$)	variables
$H(\mathbf{X}), (8)$	Jn^m	$\approx 1.934 \times 10^{25}$	$m+1$
$H(\mathbf{X}), (9)$	$J(n^m+1)$	$\approx 1.934 \times 10^{25}$	m
(12)	n^m+J	$\approx 1.209 \times 10^{24}$	m
$H_{\text{SAPQ-}m}, (13)$	mn	8,192	1
$H_{\text{SAPQ-}1}, (16)$	n	1,024	1

(16)의 엔트로피 부호화를 수행하는 SAPQ는 n 개 확률의 집합 $\{P(\ell)\}$ 을 사용하여 한 개의 엔트로피 부호기를 설계하면 되므로 매우 낮은 구현 복잡도로 격자 VQ의 엔트로피 부호화가 가능하다.

엔트로피 부호기의 설계를 위하여 계산해야 할 확률의 개수를 각 엔트로피 부호화 방법에 따라서 표 1에 정리하였다. 표 1에서 보는바와 같이 (8), (9), 또는 (12)의 엔트로피를 구현할 수 있는 엔트로피 부호기의 설계는 구해야 할 확률의 개수가 매우 커서 구현이 힘든데, 제한한 (16)의 SAPQ-1의 경우는 SQ의 부호책 $C_{i,j}$ 의 크기와 동일한 n 개의 확률만 구하면 되고 인덱스 ℓ 에 의해 부호화가 가능하므로 매우 간단히 엔트로피 부호화가 가능하다.

V. 실험 결과

본 장에서는 SAPQ의 부호화 방법에 기초한 여러 격자 VQ를 무기역성 가우시언 분포를 가지는 입력을 양자화할 때의 성능을 고찰해 보았다.

먼저 그림 1에는 여러 전송률에 대하여 SAPQ를 기초로 구현된 여러 격자 VQ의 성능을, SQ를 사용하는 경우 이론적으로 최적인 곡선 $(\pi e/6)2^{-2R}$ (entropy-constrained SQ, ECSQ Opt.)과의 이득을 관찰하므로 비교해 보았다. 격자 VQ의 엔트로피 부호화를 위하여 제안한 SAPQ-1과 SAPQ- m 방법을 사용하여 얻을 수 있는 이득을 관찰하므로 그 성능을 보였다. 그림 1에서 균등스칼라 양자기에 엔트로피 부호화를 적용한 경우 (Uniform SQ)는 전송률이 올라가면서 이론적인 값인 ECSQ Opt.로 근접함을 알 수 있다. 엔트로피 부호화로 SAPQ-1 방법을 사용하는 격자 D_8^* 과 E_8 의 경우, 전송률이 4 이상일 때 이론적인 이득의 90% 이상을 얻을 수

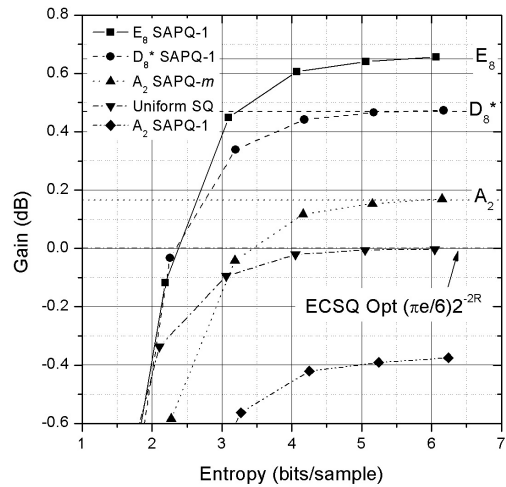


그림 1. 무기역성 가우시언 분포에 대한 SAPQ에 기초한 격자 VQ의 전송률에 대한 이득 곡선.
Fig. 1. Gain curves of the lattice VQ based on SAPQ for the memoryless Gaussian distribution.

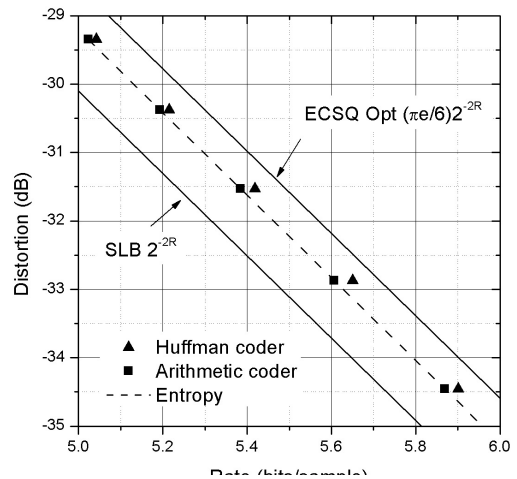


그림 2. 무기역성 가우시언 분포에 대한 Huffman 부호기와 arithmetic 부호기로 구현한 SAPQ에 기초한 격자 E_8 VQ의 비교(SAPQ-1 엔트로피 부호화)
Fig. 2. Comparison of the Huffman and arithmetic coder in the lattice E_8 VQ based on SAPQ for the memoryless Gaussian distribution (entropy coder: SAPQ-1).

있으며 전송률이 올라갈수록, 엔트로피를 고려한 VQ가 근사적으로 격자 VQ가 된다는 이론적인 사실에 부합하여, 이론적인 이득에 근접함을 관찰할 수 있다. 반면에 격자 A_2 의 경우는 엔트로피 부호화로 SAPQ-1을 사용하는 경우에는 SQ 경우보다 이득을 얻을 수 없고 SAPQ- m 을 사용할 때 이론적인 이득을 얻을 수 있음을 그림 1에서

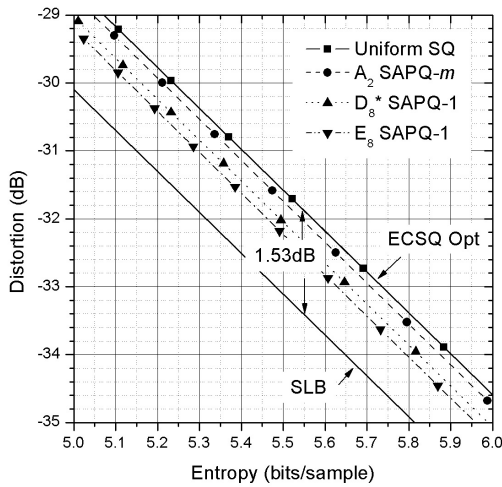


그림 3. 무기역성 가우시언 분포에 대한 SAPQ에 기초한 격자 VQ의 성능 비교(D_8^* 과 E_8 의 SAPQ-1을 A_2 는 SAPQ- m 엔트로피 부호화)
 Fig. 3. Comparison of the lattice VQ based on SAPQ for the memoryless Gaussian distribution

관찰할 수 있다. 즉 격자 VQ의 엔트로피 부호화를 위하여 SAPQ-1 이나 SAPQ- m 방법을 사용하여 무기역성 가우시언 분포의 신호를 양자화하여 이론적으로 기대할 수 있는 이득을 얻을 수 있음을 모의실험으로 관찰할 수 있었다.

그림 2에는 격자 VQ의 엔트로피 부호기로 Huffman 부호기와 arithmetic 부호기를 사용했을 때의 성능을 SLB인 2^{-2R} (SLB)와 SQ의 경우 이론적 최적인 $(\pi e/6)2^{-2R}$ (ECSQ Opt.)와 서로 비교하였다. Arithmetic 부호기의 경우 거의 (16)의 SAPQ-1의 엔트로피를 구현하고 있음을 알 수 있으며, Huffman 부호기는, 전송률 5.02 bit/sample에서 엔트로피와 약 0.0193 bit/sample 정도가 차이가 남을 관찰할 수 있다.

그림 3에는 격자 A_2, D_8^*, E_8 에 기초한 격자 VQ의 성능을 전송률 5-6 bits/sample에서 SLB와 ECSQ Opt.와 서로 비교하였다. 균등 SQ의 실험 결과(Uniform SQ)가 이론적인 값인 ECSQ Opt.와 일치함을 보이고 있으며, 각 격자에 대하여 ECSQ Opt에 대하여 이론적으로 기대할 수 있는 이득과 근접하는 성능을 보이고 있음을 관찰할 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는, 격자 A_2, D_8^*, E_8 에 기초한 격자 벡터 양자기(vector quantizer: VQ)를 표본 적응 프로덕트 양자기(sample-adaptive product quantizer: SAPQ)를 사용하여 구현하였으며, 그 출력을 엔트로피 부호화하였다. 엔트로피 부호화를 위하여 SAPQ 구조에 기초하여 부호화하는 방법을 제안하였으며, 매우 낮은 구현 복잡도로 격자 VQ의 출력을 엔트로피 부호화할 수 있음을 보였다. 무기역성(memoryless) 가우시언 분포에 대하여 SAPQ에 기초한 격자 VQ의 양자화 여러 곡선을 엔트로피에 대하여 도시하고 비교하였다. 실험을 통하여 전송률이 증가하면서 균등 분포에 이론적으로 얻는 이득과 비슷한 이득을 무기역성 가우시언 분포에 대해서 SAPQ의 출력을 엔트로피 부호화하는 방법으로도 얻을 수 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] A. J. Viterbi and J. K. Omura, *Principles of Digital Communication and Coding*. McGraw Hill, 1979.
- [2] A. Gersho and R. M. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [3] P. A. Chou, T. Lookabaugh, and R. M. Gray, "Entropy-constrained vector quantization," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 1, pp. 31-42, Jan. 1989.
- [4] A. Gersho, "Asymptotically optimal block quantization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 25, pp. 373-380, July 1979.
- [5] T. R. Fischer, "A pyramid vector quantizer," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 32, no. 4, pp. 568-583, July 1986.
- [6] M. Antonini, P. Raffy, M. Barlaud, "Towards entropy constrained lattice vector quantization," in *Proc IEEE ICIP*, vol. 1, 1995, pp. 121-124.
- [7] Z. Mohd-Yusof and T. R. Fischer, "An entropy-Coded lattice vector quantizer for transform and subband image coding," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 5, no. 2, pp. 289-298, Feb. 1996.
- [8] A. Vasilache and I. Tabus, "Indexing and entropy coding of lattice codevectors," in *Proc ICASSP*, vol. 4, 2001, pp.2605-2608.

- [9] D. S. Kim and N. B. Shroff, "Quantization based on a novel sample-adaptive product quantizer (SAPQ)," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2306-2320, Nov. 1999.
- [10] D. S. Kim and N. B. Shroff, "Sample-adaptive product quantization: asymptotic analysis and examples," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 10, pp. 2937-2947, Oct. 2000.
- [11] 김동식, "격자 벡터 양자화와 격자 표본 적응 프로덕트 양자기," *대한전자공학회 논문집*, 제 49권 SP편 제 2호, pp. 18-27, 2012년 3월.
- [12] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, "Fast quantizing and decoding algorithms for lattice quantizers and codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, no. 2, pp. 227-232, Mar. 1982.
- [13] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, "Voronoi regions of lattices, second moments of polytopes, and quantization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, no. 2, pp. 211-226, Mar. 1982.

저 자 소 개

김 동 식(정회원)
대한전자공학회 논문지
제 48권 SP편 제 4호 참조