Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 38, No. 4, pp. 244-248, December 2012.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2012.38.4.244

<Research Letter>

수치적 반복 수렴 방법을 이용한 CEV 모형에서의 아메리칸 풋 옵션 가격 결정

이승규[1] · 장봉규[1†] · 김인준[2]

[1]POSTECH 산업경영공학과 / [2]연세대학교 경영대학

An Iterative Method for American Put Option Pricing under a CEV Model

Seungkyu Lee[1] · Bong-Gyu Jang[1] · In Joon Kim[2]

[1]Department of Industrial and Management Engineering, Pohang University of Science and Technology
[2]Yonsei School of Business

We present a simple numerical method for pricing American put options under a constant elasticity of variance (CEV) model. Our analysis is done in a general framework where only the risk-neutral transition density of the underlying asset price is given. We obtain an integral equation of early exercise premium. By exploiting a modification of the integral equation, we propose a novel and simple numerical iterative valuation method for American put options.

Keywords: American Put Options, CEV Model, Numerical Algorithm, Iterative Method

1. 서 론

아메리칸 풋 옵션(American put options) 가격 결정 모형은 최적 행사가(optimal exercise boundary)가 내재적으로 결정된다는 점에서 유로피안 풋 옵션(European put options) 가격 결정 모형보다 난해한 문제로 인식되어 왔다. McKean and Merton이 아메리칸 옵션 가격 결정 모형을 자유경계선 문제(free-boundary problem)으로 모형화 한 후, 많은 연구자들은 아메리칸 풋 옵션이 만기 이전에 행사되어야 할 최적의 경계선을 쉽고 정확하게 찾기 위한 방법을 발전시켜 왔다(McKean, 1965; Merton, 1973). 이러한 발전과정에서 정확한 아메리칸 풋 옵션 가격 결정을 위해서 최적행사가의 성질을 파악하는 것이 매우 중요한 역할을 한다는 것이 알려졌다. Huang 연구진과 Ju 등은 정확하고 빠르게 최적행사가를 계산할 수 있는 알고리즘을 개발함으로써 아메리칸 옵션 가격 결정 모형에서의 큰 발전을 이루어냈다(Huang and Subrahmanyam, 1996; Ju, 1998).

최근에는 자본 시장에 존재하는 통계적 특이 현상을 설명하기 위해 블랙-숄즈 모형 외의 발전된 형태의 모형들이 도입되기 시작하였다. 여러 연구진들은 프랙탈 브라운 운동(fractal Brownian motions), CEV(constant elasticity of variance) 모형과 같은 확률적 변동성 모형(stochastic volatility models), 점프 모형(jump models)들을 제시하여 복잡한 금융 현상들을 설명하려는 시도를 해 왔다(Mandelbrot, 1963; White, 1980; Cox and Ross, 1976; Merton, 1976).

이론적으로 실제 자본 시장의 성격을 잘 반영하는 이러한 모형하에서의 아메리칸 풋 옵션 가격 결정 모형을 개발하려는 노력도 계속되어 왔다. Kim and Yu는 불특정한 일반 기초자산 프로세스 가정에서 아메리칸 옵션 가격을 해석적 형태(analytic

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2012R1A1A2038735).
이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 교육인력양성사업임(No. 2011-0008628).
† 연락저자 : 장봉규 교수, 790-784 경북 포항시 남구 효자동 포항공과대학교 산업경영공학과, Tel : 054-279-2372, Fax : 054-279-2870, E-mail : bonggyujang@postech.ac.kr
2012년 10월 31일 접수; 2012년 11월 12일 수정본 접수; 2012년 11월 13일 게재 확정.

valuation formula)로 표현하는 데 성공하였다(Kim and Yu, 1996). 이들은 특별한 예로서 기초자산이 CEV 모형이나 평균회귀 모형(mean-reverting process)를 따를 때의 아메리칸 옵션 가격 공식을 제시하였으나, 내재적으로 결정되는 최적행사가를 산출하기 위한 수치적 방법론은 제시하지 않았다. Nunes는 기초자산이 CEV 모형을 따를 때, 최적행사가를 지수함수, 다항함수 등의 간단한 형태의 함수로 근사하여 아메리칸 옵션 가격 결정 모형을 제시하고 있다(Nune, 2009).

본 연구에서는 Kim and Yu가 제시한 아메리칸 옵션 가격의 해석적 형태의 공식을 변형한 오퍼레이터(operator)를 이용한 수치적 반복 수렴 방법(iterative method)을 제시하고 있다(Kim and Yu, 1996). 특히 기초자산이 CEV 모형을 따르는 경우 본 논문에서 제시하는 수치적 아메리칸 옵션 가격 결정 방법이 효과적으로 그리고 정확하게 최적행사가를 산출해내고 있다는 결과를 보여준다. Kim 연구진은 기초자산이 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes model)을 따를 때 수치적 반복 수렴 방법을 이용한 아메리칸 풋 옵션 가격을 계산한 바가 있지만(Kim *et al.*, 2012), CEV 모형에서 이와 같은 수치적 방법론을 제시한 것은 아직까지 제시된 바가 없다.

2. 이론적 배경

2.1 아메리칸 풋 옵션 공식 유도

본 논문에서는 행사가가 K이고 만기가 T인 아메리칸 풋 옵션 가격 결정 모형을 제시한다. 또한 본 논문은 시장에서 완벽한 위험회피(perfect hedging)와 지속적 거래(continuous trading)가 가능하며 무위험 이자율 r과 옵션 기초자산의 지속적 배당률 δ가 존재한다고 가정한다.

Carr 연구진과 마찬가지로 임의의 행사가 $B(\cdot)$의 이하로 기초 자산의 가격이 떨어질 때 아메리칸 풋 옵션을 행사하는 투자 전략을 생각한다(Carr *et al.*, 1992). 따라서 임의의 행사가 $B(\cdot)$에 대해서 t시점(혹은 만기까지 남은 시간이 $\tau = T-t$인 시점)에서 기초자산의 값이 S일 때, 아직 행사되지 않은 아메리칸 풋 옵션의 가격 $W(S,\ T-t;\ B(\cdot))$는 정의역 $\{(S,\tau):B(\cdot) < S \le \infty,\ 0 < \tau \le T\}$에서 정의되는 함수이다. 본 논문에서는 이 함수를 위험중립확률(risk neutral probability)에서 기초자산이 S에서 ξ만큼의 시간이 흐른 후 S'이 될 확률을 계산하는 변이확률분포(transition density function) $\Psi(S',\xi;S)$를 이용한 해석적 형태의 식으로 표현하는 것을 목표로 한다. 아래의 계산 과정의 대부분은 Kim and Yu가 이미 제시한 과정을 따른 것이다(Kim and Yu, 1996).

행사가 $B(\cdot)$을 만기까지 남은 시간 τ에 관한 함수로 보고, $p(\tau-s;\ B(\cdot),\ S)$를 위험중립확률에서 기초자산의 값이 $\tau-s$ 시점에서 처음으로 행사가를 치게 될 확률이라 정의하며, $\phi(\overline{S},\tau,B(\cdot),S)$를 위험중립확률에서 기초자산의 값 S가 τ라는 시간동안 행사가를 치지 않고 $\overline{S}$가 될 확률이라 정의할 때, 우리는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&W(S,\tau,B(\cdot)) \\
&= \int_0^{\tau} e^{-r(\tau-s)}(K-B(s))p(\tau-s;B(\cdot),S)ds \\
&\quad + \int_{B(0)}^{K} e^{-r\tau}(K-\overline{S})\phi(\overline{S},\tau,B(\cdot),S)d\overline{S}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

이제 기초자산의 값이 $B(s)$일 때 무위험 자산 K달러를 보유하고 기초자산 한 개를 공매도한 포트폴리오(portfolio)를 생각한다. 만기까지 이 포트폴리오는 연속적으로 무위험 이자율만큼의 이자 증가분과 배당률만큼의 배당 감소분 때문에 다음과 같은 등식이 성립해야 한다:

$$
\begin{aligned}
&K-B(s) \\
&= \int_0^{s} e^{-r\xi}\int_0^{\infty}(rK-\delta S')\Psi(S',\xi;B(s))dS'd\xi \\
&\quad + \int_0^{\infty} e^{-rs}(K-\overline{S})\Psi(\overline{S},s;B(s))d\overline{S}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

최적행사가 $B^*(\cdot)$에 대해서는 다음과 같은 자기금융(self-financing) 포트폴리오를 구상할 수 있다: 기초자산의 가격이 최적행사가 아래에 형성되는 경우에는 한 개의 아메리칸 풋 옵션을 보유하다가 기초자산의 가격이 최적행사가를 치는 시기에 이 옵션을 매도하면서, K달러의 무위험 자산과 기초 자산 공매도 한 개로 이루어진 새로운 포트폴리오를 꾸린다. 이 새 포트폴리오는 기초자산의 가격이 최적행사가보다 높게 형성될 때까지 유지하다가 다시 기초자산의 가격이 최적행사가를 치고 내려갈 때, 청산하고 아메리칸 풋 옵션을 보유한다. 이러한 자기금융 포트폴리오에 대해서 만기까지의 시간이 s와 $s'(s > s')$인 두 시점을 고려하였을 때, 다음과 같은 등식이 성립한다:

$$
\begin{aligned}
&K-B^*(s) \\
&= \int_{s'}^{s} e^{-r\xi}\int_0^{B^*(\xi)}(rK-\delta S')\Psi(S',\xi;B^*(s))dS'd\xi \\
&\quad + \int_0^{B^*(s')} e^{-r(s-s')}(K-\overline{S})\Psi(\overline{S},s-s';B^*(s))d\overline{S} \\
&\quad + \int_{B^*(s')}^{\infty} e^{-r(s-s')}W(S',s';B^*(\cdot))\Psi(S',s-s';B^*(s))dS'.
\end{aligned} \tag{3}
$$

만기까지 남은 시간이 0인 경우에는 아메리칸 풋 옵션의 가격 $W(S,0;B(\cdot))$이 만기 수익구조(payoff) $max\{K-S,0\}$와 같아야 하므로, 다음과 같은 식이 성립해야만 한다:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{B(0)}^{K} e^{-rs}(K-\overline{S})\Psi(\overline{S},s;B(s))d\overline{S} \\
&+\int_{B(0)}^{\infty} e^{-rs}W(S',0;B(\cdot))\Psi(S',s;B(s))dS' = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

이제 $s'=0$일 때, 우리는 최적행사가의 내재적 공식(implicit formula)을 얻을 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&K-B^*(s) \\
&= \int_0^s e^{-r\xi}\int_0^{B^*(\xi)}(rK-\delta S')\Psi(S', \xi; B^*(s))dS'd\xi \\
&\quad + \int_0^K e^{-rs}(K-\overline{S})\Psi(\overline{S}, s; B^*(s))d\overline{S}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

최적행사가의 내재적 공식 (5)를 이용하여 행사되기 전의 살아있는 아메리칸 풋 옵션(live American put option)의 가격 공식을 얻기 위해서는 다음 등식을 증명해야 한다:

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^*(0)}^K e^{-r\tau}(K-\overline{S})\phi(\overline{S}, \tau; B^*(\cdot), S)d\overline{S} \\
&+\int_0^\tau e^{-r\tau}\int_0^K (K-\overline{S})\Psi(\overline{S}, s; B^*(s))d\overline{S}p(\tau-s; B^*(\cdot), S)ds \\
&= \int_0^K e^{-r\tau}(K-\overline{S})\Psi(\overline{S}, \tau; S)d\overline{S}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

$p(\tau-s; B^*(\cdot), S)$는 0시점(현재)으로부터 시간이 $\tau-s$ 만큼 흐른 후에야 처음으로 기초자산의 값이 최적행사가를 치게 될 확률을 의미하기 때문에 이때의 기초자산 값은 $B^*(s)$ 이어야만 한다. 따라서 식 (6)의 두 번째 항은 현재부터 만기까지 기초자산의 값이 적어도 한 번은 최적행사가를 쳤을 때의 만기 수익 구조의 현재 가치라 볼 수 있다. 반면 식 (6)의 첫 번째 항은 확률 ϕ로 적분되었기 때문에 기초자산의 값이 만기까지 최적행사가를 한 번도 치지 않았을 때의 만기 수익 구조의 현재 가치라 할 수 있다. 따라서 식 (6)의 좌변은 우변(만기 수익 구조의 현재 가치)을 베이지안 룰(Bayesian Rule)을 적용해서 두 개의 조건부 기댓값의 합으로 표현한 것이라 볼 수 있다.

식 (5)를 식 (1)에 대입한 후, 식 (6)을 이용하여 정리하면 우리는 아메리칸 풋 옵션 가격 $W(S, \tau, B^*(\cdot))$를 식 (5)에 의해 내재적으로 정의되는 최적행사가 $B^*(\cdot)$에 대한 함수로 표현할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&W(S, \tau, B^*(\cdot)) \\
&= \int_0^\tau e^{-r(\tau-w)}\int_0^{B^*(w)}(rK-\delta S')\Psi(S', \tau-w; S)dS'dw \\
&\quad + \int_0^K e^{-r\tau}(K-\overline{S})\Psi(\overline{S}, \tau; S)d\overline{S}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

식 (6)에 의하면 좌변의 이중적분(double integral)이 우변의 단순적분으로 표현되기 때문에, 식 (5)를 식 (1)에 대입하였을 때 발생하는 삼중적분(triple integral)은 식 (7)의 이중적분으로 표현될 수 있다.

여기서 우리가 주목해야할 것은 식 (7) 오른쪽 변(right hand side)의 두 번째 항이 본 문제의 아메리칸 풋 옵션과 같은 만기와 만기 행사가를 가진 유로피안 옵션의 적정 가격이라는 사실이다(이 두 번째 항은 만기 수익구조의 위험중립확률에서 보았을 때의 현재가치이다). 따라서 식 (7)을 오른쪽 변의 첫 번째 항은 아메리칸 풋 옵션의 조기 행사 프리미엄(early exercise premium)의 적분 형식(integral representation)이라 할 수 있다. 이와 같은 해석은 Carr 연구진의 연구결과에서도 찾을 수 있다 (Carr *et al.*, 1992).

3.2 CEV 모형에서의 아메리칸 풋 옵션 가격

본 섹션(section)부터 아메리칸 풋 옵션의 기초자산이 CEV 모형을 따른다고 가정한다. 따라서 기초자산 프로세스 S_t가 위험중립확률에서 브라운 운동(brownian motion) Z_t와 분산 탄력성(the elasticity of variance) $\beta-2$에 대해 다음과 같은 확률미분방정식(stochastic differential equation)을 따른다고 가정한다:

$$dS_t = (r-\alpha)S_t dt + \sigma S_t^{\beta/2}dZ_t.$$

블랙-숄즈 모형은 $\beta=2$일 때의 CEV 모형의 특별한 경우라 볼 수 있다. 하지만 보통 대부분의 기초자산들의 경우 β가 0보다 크거나 같고 2보다 작다고 알려져 있다. 이 경우 변동성 군집현상(volatility clustering)을 설명할 수 있기에 본 문제에서는 $0 \le \beta < 2$를 가정한다. 이모형은 Cox에 의해 처음 제시되었고, Schroder와 같은 연구자들에 의해서 옵션 가격 결정 모형 연구에 활용되어 왔다(Cox, 1975; Schroder, 1989).

Cox는 아래와 같이 기초자산 S_t가 CEV 모형을 따를 때 위험중립세상(risk-neutral world)에서 변이확률분포 $\Psi(\overline{S}, \tau; S)$를 계산하였다(Cox, 1975):

$$
\begin{aligned}
&\Psi(\overline{S}, \tau; S) \\
&= (2-\beta)k_*(\tau)^{1/(2-\beta)}(x(S, \tau)y(\overline{S}, \tau)^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} \\
&\quad \times e^{-x(S,\tau)-y(\overline{S},\tau)}I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{x(S, \tau)y(\overline{S}, \tau)}).
\end{aligned}
$$

여기서 $k_*(\tau)$, $x(S, \tau)$, $y(\overline{S}, \tau)$는 다음과 같이 정의된다:

$$
\begin{aligned}
k_*(\tau) &= \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2(2-\beta)(e^{(r-\delta)(2-\beta)\tau}-1)}, \\
x(S, \tau) &= k_*(\tau)S^{2-\beta}e^{(r-\delta)(2-\beta)\tau}, \\
y(\overline{S}, \tau) &= k_*(\tau)\overline{S^{2-\beta}}.
\end{aligned}
$$

$I_q(x)$는 q차 제 1 변형 베셀 함수(the modified Bessel function of the first kind of order q)로서 다음과 같이 정의된다:

$$I_q(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+q+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+q}.$$

Cox가 이 변이확률분포를 이용하여 유로피안 콜 옵션 공식을 유도하였듯이, 같은 방법으로 본 연구에서는 아메리칸 풋 옵션 공식을 유도하였다(Cox, 1975):

$$
\begin{aligned}
&W(S, \tau) = p(S, \tau) \\
&+\int_0^\tau (e^{-r(\tau-w)}rK(1-F(2x(S,\tau-w), \frac{2}{2-\beta}, 2y(B^*(w), \tau-w))) \\
&\quad -e^{-\delta(\tau-w)}\delta S \\
&\quad \times F(2y(B^*(w), \tau-w), 2+\frac{2}{2-\beta}, 2x(S, \tau-w)))dw.
\end{aligned} \tag{8}
$$

여기서 $F(x;\nu,\lambda)$는 ν차 비중앙 카이스퀘어 확률변수 $\chi^2_\nu(\lambda)$ (the noncentral Chi-square random variable with ν degrees of freedom and non-centrality parameter λ)의 확률누적분포함수이다. $p(S,\tau)$는 아메리칸 풋 옵션과 같은 만기와 행사가를 가지고 있는 유로피안 풋 옵션의 가격으로 다음과 같은 식으로 정의된다:

$$p(S,\tau) = e^{-r\tau}K(1-F(2x(S,\tau),\frac{2}{2-\beta},2y(K,\tau))) \\ -e^{-\delta\tau}SF(2y(K,\tau),2+\frac{2}{2-\beta},2x(S,\tau)).$$

3.3 수치적 해법 및 결과

본 섹션에서는 최적행사가를 내재적으로 정의하는 식 (5)를 변형하여 오퍼레이터를 만든 후, 수치적 반복 수렴 방법을 통하여 아메리칸 옵션 가격 결정을 위해 필수적인 최적 행사가를 계산하는 것을 목표로 한다. 식의 간단함과 가독성을 위해 지금부터 기초자산의 배당률 δ는 0이라 가정한다.

식 (8)에서 $S=B^*(\tau)$를 대입하면, $W(B^*(\tau),\tau;B^*(\cdot))=K-B^*(\tau)$이기 때문에, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} &B^*(\tau) \\ &= K(1-e^{-r\tau}(1-F(2x(B^*(\tau),\tau),\frac{2}{2-\beta},2y(K,\tau)) \\ &+\int_0^\tau e^{rw}r(1-F(2x(B^*(\tau),\tau-w),\frac{2}{2-\beta},2y(B^*(w),\tau-w)))dw)) \\ &\div(1-F(2y(K,\tau),2+\frac{2}{2-\beta},2x(B^*(\tau),\tau))). \end{aligned}$$

이렇게 내재적으로 정의되는 최적행사가를 수치적으로 찾기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 오퍼레이터 $O(B(\cdot))$를 정의한다:

$$\begin{aligned} &O(B(t)) \\ &= K(1-e^{-rt}(1-F(2x(B(t),t),\frac{2}{2-\beta},2y(K,t)) \\ &+\int_0^t e^{rw}r(1-F(2x(B(t),t-w),\frac{2}{2-\beta},2y(B(w),t-w)))dw)) \\ &\div(1-F(2y(K,t),2+\frac{2}{2-\beta},2x(B(t),t))). \end{aligned}$$

오퍼레이터 $O(B(\cdot))$를 이용하여

$$\begin{cases} B_1(t)=K & ,\quad \forall t\in[0,\tau), \\ B_{n+1}(t)=O(B_n(t)), & \forall n\in\{1,2,3,\cdots\} \end{cases}$$

로 정의되는 함수 수열(function sequence) $\{B_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$를 만들면 이 함수 수열은 특정 함수로 수렴하게 되는데 이것이 본 연구에서 찾고자 하였던, 최적행사가 $B^*(\cdot)$이 된다. 따라서 알고리즘을 정리하면 다음과 같다:

Step 1 : 함수 $B_1(t)$를 상수 함수 $B_1(t)=K$로 정의한다.

Step 2 : 함수 $B_{n+1}(t)$을 오퍼레이터 $O(B(\cdot))$와 정의된 $B_n(t)$을 이용하여 $B_{n+1}(t)=O(B_n(t))$로 정의한다.

Step 3 : 자연수 n을 1씩 키우며, $\|B_{n+1}(t)-B_n(t)\|\le\epsilon$이 될 때까지 Step 2를 반복한다.

<Figure 1>은 보편적인 파라미터(parameter)를 대입하고 Step 2를 6번 반복한 수치적 반복 수렴 방법의 결과이다. x축은 만기까지의 시간을, y축은 기초자산의 값을 나타낸다. <Figure 1>은 수치적 반복 수렴 방법을 시행하였을 때, 4번만 반복하여도 최적행사가에 거의 근사한 함수로 수렴함을 관찰할 수 있다. 이는 본 연구에서 제시하는 수치적 반복 수렴 방법이 굉장히 효율적이라는 사실을 입증하는 결과라 할 수 있다.

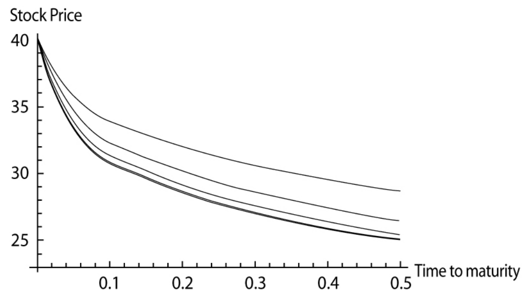

Figure 1. The convergency of optimal exercise boundary. The parameters are $S=40$, $K=40$, $r=0.05$, $\tau=0.5$, $\beta=1.4$, and $\sigma S^{1-\beta}=0.4$.

수치적 반복 수렴 방법으로 구한 최적행사가를 식 (8)에 대입하면 아메리칸 풋 옵션의 가치를 계산할 수 있다. 블랙-숄즈 모형과의 차별성을 관찰하기 위해 CEV 모형에서의 분산 탄력성이 아메리칸 풋 옵션 가격에 미치는 영향을 <Table 1>에 정리하였다. <Table 1>에 정리된 결과를 통해 가격 탄력성이 클수록 조기상환 프리미엄의 값이 커지는 사실을 확인할 수 있다.

Table 1. Early exercise premium with various values of the constant elasticity of variance β. The parameters are $S=40$, $K=40$, $r=0.05$, $\tau=0.5$, and $\sigma S^{1-\beta}=0.4$ The early exercise premium, the difference between American option price and European option price, rises with increasing the constant elasticity of variance β

	β	0.4	0.8	1.3	1.7
ITM ($K=45$)	European	6.71497	6.76183	6.82243	6.87262
	American	6.94477	6.99324	7.05641	7.10916
	Premium	0.2298	0.23141	0.23398	0.23654
ATM ($K=40$)	European	3.97596	3.97167	3.96819	3.96673
	American	4.09503	4.09316	4.093	4.09442
	Premium	0.11907	0.12149	0.12481	0.12769
OTM ($K=35$)	European	2.07055	2.01746	1.95377	1.90474
	American	2.13379	2.08168	2.01933	1.97142
	Premium	0.06324	0.06422	0.06556	0.06668

4. 결 론

본 연구에서는 기초자산이 위험중립확률에서 변이확률분포를 가지는 일반적인 마코프 프로세스를 따를 때의 아메리칸 풋 옵션 가격 결정 모형을 제시하고 있다. 아메리칸 풋 옵션의 복제 포트폴리오를 유지할 때 생기는 현금 흐름들의 현재가치에서의 기댓값으로 아메리칸 풋 옵션의 가격은 결정될 수 있다.

또한 본 논문에서는 일반적인 마코프 프로세스의 한 예로 기초자산이 CEV 모형을 따를 때의 아메리칸 풋 옵션 가격 결정 모형을 자세히 설명하고 있다. Kim and Yu의 연구결과와는 다르게 아메리칸 풋 옵션 공식을 비중앙 카이스퀘어 확률 변수 $\chi_{\nu}^{2}(\lambda)$의 누적확률분포로 정리함으로써 기존 모듈(module)을 이용한 수치적 가격 계산을 용이하게 만들었다(Kim and Yu, 1996). 특히 수치적 반복 수렴 방법을 통해 최적행사가와 아메리칸 풋 옵션을 계산하는 효율적인 방법을 제시하였다는 점은 본 연구의 가장 큰 의의라 할 수 있다.

참고문헌

Carr, P., Jarrow, R., and Myneni, R. (1992), Alternative Characterizations of American Puts, *Mathematical Finance*, **2**, 87-106.

Cox, J. C. (1975), Notes on Option Pricing I : Constant Elasticity of Variance Diffusions, *Mimeo*, Stanford University, Graduate School of Business.

Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976), The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics*, **3**, 145-166.

Huang, J., Subrahmanyam, M. G., and Yu, G. G. (1996), Pricing and Hedging American Options : A Recursive Integration Method, *Review of Financial Studies*, **9**, 277-300.

Ju, N. (1998), Pricing American Option by Approximating its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function, *Review of Financial Studies*, **11**, 627-646.

Kim, I. J. and Yu, G. G. (1996), An Alternative Approach to the Valuation of American Options and Applications, *Review of Derivatives Research*, **1**, 61-85.

Kim, I. J., Jang, B-G., and Kim, K. T. (2012), A Simple Iterative Method for the Valuation of American Options, *Quantitative Finance*, forthcoming.

Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, **36**, 394-419.

McKean, H. P., Jr. (1965), Appendix : A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, *Industrial Management Review*, **6**, 32-39.

Merton, R. C. (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183.

Merton, R. C. (1976), Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144.

Nunes, J. P. V. (2009), Pricing American Options under the Constant Elasticity of Variance Model and Subject to Bankruptcy, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **44**(5), 1231-1263.

Schroder, M. (1989), Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula, *Journal of Finance*, **51**, 1633-1652.

White, H. (1980), A Heteroscedasticity Consistent Covariance Matrix Estimation and a Direct Test for Heteroscedasticity, *Econometrica*, **48**, 817-838.