

와이블수명분포를 갖는 제품의 신뢰성인증시험에서 형상모수의 영향분석

권 영 일

청주대학교 산업공학과

The Effect of Shape Parameters in Designing Reliability Qualification Test for Weibull lifetime distribution

Kwon, Young Il

Department of Industrial Engineering, Cheongju University

Abstract

In the fields of reliability application, the most commonly used test methods for reliability qualification are zero-failure acceptance tests since they require fewer test samples and less test time compared to other test methods that guarantee the same reliability with a given confidence level. Usually values of shape parameters are assumed to be known in designing reliability qualification tests for Weibull lifetime distribution. It is important to select correct values of shape parameters to guarantee the specified reliability with given confidence level exactly. The effect of using wrong values of shape parameters in designing reliability qualification test for products with Weibull lifetime distribution is examined and selecting proper values of shape parameters for conservative reliability qualification is discussed.

Key words : design of reliability qualification test(신뢰성인증시험설계), Weibull distribution (와이블분포), shape parameter(형상모수), zero-failure acceptance test(무고장시험)

1. 서론

제품이나 부품의 설계과정에서 신뢰성 입증을 위한 인증시험(reliability qualification test)으로 무고장 합격기준을 사용하는 시험방식(zero-failure acceptance test)이 선호되고 있다. 무고장 시험방식은 요구수명을 주어진 신뢰수준으로 보장하는 시험방식들 중에서 적용이 비교적 수월하며, 동일한 신뢰도와 신뢰수준을 보증하는 방식들 중 상대적으로 시험시간이나 시료수가 단축된다는 장점을 갖는다.

수명이 와이불 분포를 따르는 제품이나 부품에 대한 수명시험에서, 고장 시료 수가 매우 적은 시험데이터나 고장이 없는 무고장 시험데이터로부터 신뢰도를 평가하거나 보증하기 위한 방법들이 Abernethy(2000), Nelson(1985), Ke(1999), Yan 과 Herfat(2004), Kwon(2006), 그리고 Yadav et al.(2006) 등에 의해 연구되었으며, Kwon(2011)은 총 시험비용을 최소화하는 경제적인 무고장 시험방식을 설계하였다. 이들 연구는 모두 와이불분포의 형상모수 값을 알고 있는 상황을 다루고 있다.

한편 형상모수 값이 미지인 상황에서 시료수가 적거나 고장이 거의 관측되지 않는 시험 결과를 사용하여 신뢰도를 평가하게 되면 평가결과의 불확실성이 크고 의미 있는 분석이 불가능할 수도 있다. 이와 같은 상황에서는 시험부품의 특성이나 과거 경험으로부터 도출된 형상모수 값의 추정치를 사용하여 분석하는 것이 불확실성을 크게 감소시키는 것으로 알려져 있다(Abernethy, 2000). 따라서 신뢰도 인증시험설계에서 통상 와이불 분포의 형상모수는 알고 있다고 가정한다. Bloch 와 Geitner(1997), 그리고 Barringer & Associates(2001)는 다양한 전기, 전자, 기계류 부품들에 대해 고장모드별 형상모수 값에 대한 자료를 제시하고 있다.

한편 인증시험 설계에서 과거 경험데이터로부터 추정한 형상모수나 유사제품의 형상모수를 사용하더라도 이 값이 현재 대상제품의 형상모수와 일치한다는 보장은 없다. 잘못된 형상모수 값 사용에 의한 인증시험 결과의 오류를 최소화하기 위해서는, 가능한 형상모수값의 범위 내에서 보증신뢰도나 신뢰수준을 훼손시키지 않는 형상모수값을 보수적으로 선택하는 방법을 사용할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 신뢰성 인증시험설계에서 형상모수값의 변화에 따른 시료수와 시험시간의 변화를 파악하고, 잘못된 형상모수값의 사용이 합격한 제품의 신뢰도와 신뢰수준에 미치는 영향을 분석하였다. 여기서 얻어진 결과는 와이불분포를 따르는 제품에 대한 신뢰성 인증시험설계에서 요구수명을 주어진 신뢰수준으로 보증하기 위해 보수적인 형상모수 값을 선택하는데 참고자료로 활용될 수 있을 것이다.

2. 신뢰성 인증시험

2.1 인증시험 설계

먼저 형상모수가 m , 척도모수가 η 인 와이불분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^m}, \quad t > 0 \quad (1)$$

수명이 위와 같은 와이불분포를 따르는 경우 백분위 수명 $B_{100p} = t_0$ 를 주어진 신뢰수준 CL_0 로 보증하기 위해, 크기 n 의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 시간 T 동안 고장이 없으면 합격시키는 무고장 합격기준 신뢰성 인증시험에서 시료수 n 과 무고장 시험시간 T 의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$T = t_0 \left[\frac{\ln(1 - CL_0)}{n \times \ln(1 - p)} \right]^{1/m} \quad (2)$$

위 식에서 규정된 보증수명 $B_{100p} = t_0$ 와 신뢰수준 CL_0 를 만족하는 다양한 (n, T) 조합이 존재함을 알 수 있다.

식 (2)를 만족하는 시험방식 (n, T) 에 대한 OC곡선, 즉 $B_{100p} = t$ 인 제품이 시험에 합격될 확률은

$$\begin{aligned} P_a(t) &= \left[e^{-\left(\frac{T}{\eta} \right)^m} \right]^n \\ &= (1 - CL_0)^{\left(\frac{t_0}{t} \right)^m} \end{aligned} \quad (3)$$

이다.

2.2 형상모수가 인증시험 (n, T) 에 미치는 영향

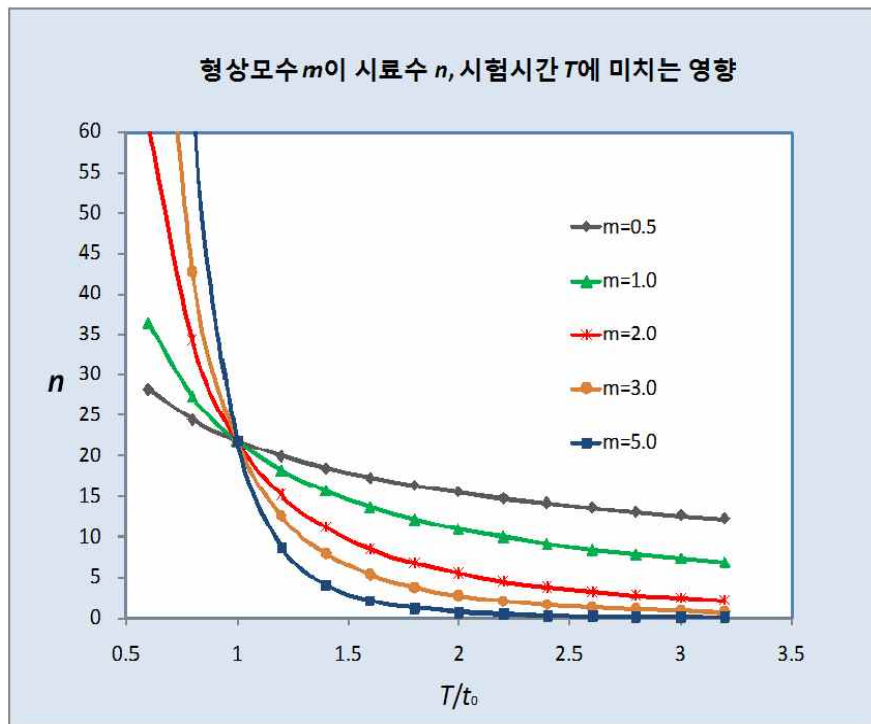
여기서는 형상모수 값 m 이 인증시험의 시료수 n 과 시험시간 T 에 미치는 영향을 분석한다. 식 (2)에서

$$A = \frac{\ln(1 - CL_0)}{\ln(1 - p)} \quad (4)$$

이라 할 때, 시료수 $n < A$ 면 형상모수 m 이 클수록 시험시간 T 는 감소함을 알 수 있다. 반대로 $n > A$ 이면 형상모수 m 이 클수록 시험시간 T 는 증가한다. 끝으로 $n = A$ 이면, 시험시간 T 가 보증수명 t_0 와 동일하며 형상모수 m 의 영향을 받지 않는다.

<그림 1>은 $p = 0.1$, $CL_0 = 0.9$ 인 인증시험 설계에서 형상모수값 m 에 따른 시료수 n 과 보증 요구수명 t_0 에 대한 시험시간 T 의 비율 T/t_0 의 관계를 나타낸 것이다. 그림에서 전반적으로 시험시간이 길수록 시료수는 감소함을 나타내고 있다. 식 (2)에서도 알 수 있듯이 시험시간 T 가 요구수명 t_0 보다 클 때에는 형상모수값 m 이 커질수록 시료수 n 은 감소하며, 반대로 시험시간 T 가 요구수명 t_0 보다 작을 때에는 형상모수값 m 이 커질수록 시료수 n 도 급속히 늘어남을 볼 수 있다.

특히 시험시간 T 가 요구수명 t_0 와 동일할 때에는 형상모수 값의 변화가 시료수에 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서 형상모수 m 에 대한 정보가 전혀 없을 때에는 시험시간과 요구수명을 동일하게 둬으로써 형상모수의 영향을 배제한 인증시험방식을 설계할 수 있다.



<그림 1> 형상모수값 m 이 인증시험의 시료수 n 과 시험시간 T 에 미치는 영향

3. 형상모수 오류의 영향

3.1 합격된 제품의 신뢰도에 미치는 영향

여기서는 실제와 다른 형상모수를 사용하여 설계된 신뢰성 인증시험에서 합격된 제품에 대한 t_0 에서의 신뢰도 $R(t_0)$ 의 추이를 분석한다. B_{100p} 수명 t_0 를 신뢰수준 CL_0 로 보증한다는 뜻은 t_0 에서 신뢰도가 $R(t_0) = 1 - p$ 임을 신뢰수준 CL_0 로 보증한다는 것과 같은 의미이다. n 개의 시료로 T 동안 시험하여 고장이 없이 시험이 종료되었을 때 척도모수 η 와 신뢰도 $R(t_0)$ 의 $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰하한은 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= T \times \left[\frac{2n}{\chi^2(2; \alpha)} \right]^{1/m} & (5) \\ &= T \times \left[-\frac{n}{\ln \alpha} \right]^{1/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{R}(t_0) &= e^{-\left(\frac{t_0}{\hat{\eta}}\right)^m} & (6) \\ &= e^{-\frac{\ln \alpha}{n(A/n)^{m/m_0}}} \end{aligned}$$

여기서 $\chi^2(2; \alpha)$ 는 자유도가 2인 카이제곱분포의 $100(1 - \alpha)\%$ 백분위수를 말하며 A 는 식(4)에서 정의된 식이다. 식(6)으로부터 시험설계에 사용된 형상모수 m_0 와 t_0 에서의 신뢰도 추정값 $\widehat{R}(t_0)$ 의 관계는 다음과 같이 정리된다.

- 정리 1.**
- i) $n < A$ 면 $\widehat{R}(t_0)$ 는 m_0 의 감소함수이다.
 - ii) $n > A$ 면 $\widehat{R}(t_0)$ 는 m_0 의 증가함수이다.
 - iii) $n = A$ 이면 $\widehat{R}(t_0) = 1 - p$ 이며 m_0 의 영향을 받지 않는다.

위 정리에서 $n < A$ 인 경우 식(2)로부터 시험시간 T 가 보증수명 t_0 보다 길어짐을 알 수 있다. 이 때 시험설계에 사용된 형상모수의 추정값 m_0 가 실제 형상모수값 m 보다 클수록 시험에 합격한 제품의 신뢰도(추정값)는 감소하며, 반대로 형상모수의 추정값이 실제보다 작을수록 합격한 제품의 신뢰도는 증가한다. 따라서 이 경우 가능한 형상모수값의 범위 내에서 가장 작은 값을 선택하여 인증시험을 설계하는 것이 보증 신뢰도의 저하를 방지하는 보수적인 결정방법이 될 것이다.

또한 $n > A$ 면 시험시간 T 가 보증수명 t_0 보다 작아진다. 이 경우는 위와는 반대의 결론이 성립한다. 즉 가능한 형상모수값의 범위 내에서 가장 큰 값을 선택하는 것이 보수적인 결정 방법이 될 것이다.

끝으로 $n = A$ 면 시험시간 T 가 보증수명 t_0 와 같아지며, 시험에 합격된 제품의 신뢰도는 $1 - p$ 로서 m_0 의 영향을 받지 않는다.

예제 1 : 형상모수값 m 이 1.2에서 1.8 사이로 알려져 있는 한 기계류 부품에 대해 B_{10} 수명 100만 사이클을 신뢰수준 $CL_0 = 0.9$ 로 보증하는 시험을 설계하고자 한다. 이 때 $A = \frac{\ln(1 - CL_0)}{\ln(1 - p)} = 21.85$ 이다. 시험설비와 비용의 제약으로 시료를 $n = 10$ 개($n < A$) 사용하여 시험한다면 정리 1의 i)의 조건에 해당한다. 따라서 보수적인 형상모수값의 결정기준은 가능한 범위 내에서 최소값을 사용하는 것이므로 $m_0 = 1.2$ 를 사용하여 인증시험을 설계한다. 이 때 T/t_0 는 식 (2)에서 다음과 같이 구해진다.

$$T/t_0 = \left[\frac{\ln(1 - CL_0)}{n \times \ln(1 - p)} \right]^{1/m_0} = 1.918$$

만약 실제 정확한 형상모수값이 $m = 1.5$ 라면 이 인증시험에 합격한 제품에 대한 90% 신뢰하한($\alpha = 0.1$)은

$$\widehat{R}(t_0) = e^{\frac{\ln \alpha}{n(A/n)^{m/m_0}}} = 0.917$$

이 되어 보증신뢰도 $R(t_0) = 0.9$ 가 충분히 만족됨을 알 수 있다.

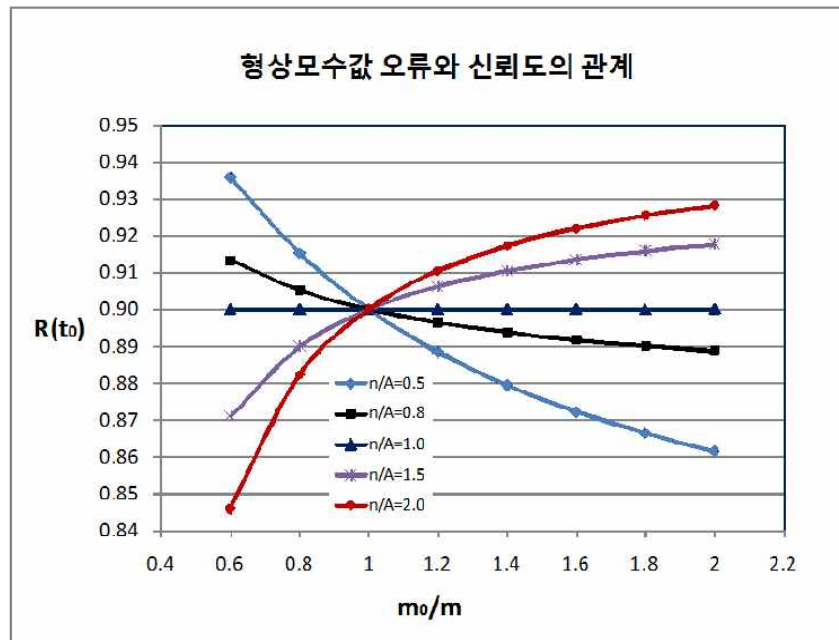
여기서 $n = 30$ 개의 시료를 사용하여($n > A$) 시험한다면 시험시간이 훨씬 단축되며 정리 1의 ii)의 조건에 해당한다. 이 때 보수적인 형상모수값은 $m_0 = 1.8$ 이 된다.

<표 1>은 $n = 10$ 및 $n = 30$ 에 대해 형상모수의 보수적 선택기준을 적용한 인증시험적용 시 실제 형상모수 값 m 의 변화에 따른 $R(t_0)$ 의 90% 및 60% 신뢰하한을 나타낸 것이다. 예제에서와 같이 B_{10} 수명 t_0 를 신뢰수준 90%로 보증하는 경우, 시험 종료 후 합격된 제품의 t_0 에서의 신뢰도에 대한 90% 신뢰하한은 0.9가 되어야 하며, 표에서 보수적 m_0 를 적용하였을 경우 모두 이 조건을 충족함을 알 수 있다.

<표 1> 실제 형상모수 값 m 의 변화에 따른 $R(t_o)$ 의 신뢰하한

m	90% 신뢰하한		60% 신뢰하한	
	$n = 10$	$n = 30$	$n = 10$	$n = 30$
1.2	0.900	0.910	0.959	0.963
1.3	0.906	0.908	0.961	0.962
1.4	0.912	0.906	0.964	0.962
1.5	0.917	0.905	0.966	0.961
1.6	0.922	0.903	0.968	0.960
1.7	0.927	0.902	0.970	0.960
1.8	0.931	0.900	0.972	0.959

<그림 2>는 B_{10} 수명 t_o 를($R(t_o) = 0.9$) 신뢰수준 90% 로 보증하는 경우, 몇몇 n/A 값에 대해 m_0/m 와 합격된 제품에 대한 $R(t_o)$ 의 90% 신뢰하한의 관계를 나타내고 있다. 시료수 n 이 A 보다 큰 경우일수록($n/A = 2.0$), 설계 형상모수값 m_0 가 실제값 m 보다 작을 때 ($m_0/m = 0.6$) 합격된 제품의 신뢰도가 요구 신뢰도 0.9 보다 크게 감소함을 볼 수 있다. 그림은 정리 1의 결과를 잘 나타내고 있으며, n 값을 A 근처에 유지할수록 ($0.8 < A/n < 1.5$) 합격된 제품에 대한 신뢰도 $R(t_o)$ 의 변화가 작다는 것을 알 수 있다. 또한 전반적으로 m_0 값이 실제 m 에 비해 작은 경우보다($m_0/m = 0.6$) 클 경우에($m_0/m = 1.4$) $R(t_o)$ 의 변화가 더 작다는 것을 볼 수 있다.



<그림 2> m_0/m 와 합격된 제품에 대한 $R(t_o)$ 의 90% 신뢰하한의 관계

3.2 신뢰수준에 미치는 영향

B_{100p} 수명 t_0 를 신뢰수준 CL_0 로 보증하는 무고장시험(식(2))에서 실제 형상모수값이 m 일 때 $B_{100p} = t_0$ 인 제품의 경우 합격확률은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} P_a(B_{100p} = t_0) &= \left[e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^m} \right]^n \\ &= e^{n \ln(1-p) \left\{ \frac{\ln(1-CL_0)}{n \ln(1-p)} \right\}^{m/m_0}} \end{aligned} \quad (7)$$

위 식에서 $m = m_0$, 즉 시험설계 시 사용한 형상모수값 m_0 가 실제 참값 m 과 일치한다면

$$P_a(B_{100p} = t_0) = 1 - CL_0$$

이 되어 설계 시 규정된 신뢰수준 CL_0 을 만족한다.

식 (7)에서 m 이 m_0 와 일치하지 않을 때, 실제 신뢰수준 CL 은

$$CL = 1 - e^{n \ln(1-p) \left(\frac{A}{n}\right)^{m/m_0}} \quad (8)$$

이며, 위 관계식으로부터 m_0 와 실제 신뢰수준 CL 의 관계는 다음과 같이 정리된다.

정리 2. A 를 식 (4)와 같이 정의할 때

- i) $n < A$ 면 신뢰수준 CL 은 m_0 의 감소함수이다.
- ii) $n > A$ 면 신뢰수준 CL 은 m_0 의 증가함수이다.
- iii) $n = A$ 면 신뢰수준은 CL_0 로서 m_0 의 영향을 받지 않는다.

위 정리에서 $n < A$ 면 형상모수의 추정값 m_0 가 실제값 m 보다 클수록 실제 신뢰수준은 감소하며, 반대로 형상모수의 추정값이 실제보다 작을수록 실제 신뢰수준은 증가한다. 따라서 가능한 형상모수값의 범위 내에서 가장 작은 값을 선택하여 인증시험을 설계하는 것이 신뢰수준의 저하를 방지하는 보수적인 결정방법이 될 것이다. 또한 $n > A$ 면 위와는 반대의 결론이 성립한다. 이때에는 가능한 형상모수값의 범위 내에서 가장 큰 값을 선택하는 것이 보수적인 결정방법이 될 것이다. 끝으로 $n = A$ 면 형상모수 m_0 와는 무관하게 항상 설계 시 신뢰수준 CL_0 를 만족한다.

예제 2 : 예제 1에서 시료를 $n = 10$ 개 사용하면($n < A$) 정리 2의 i) 의 조건에 해당한다. 따라서 보수적인 형상모수값 $m_0 = 1.2$ 가 되며 인증시험에서 보증수명 t_0 와 시험시간 T 의 비율은 다음과 같다.

$$T/t_0 = \left[\frac{\ln(1 - CL_0)}{n \times \ln(1 - p)} \right]^{1/m_0} = 1.918$$

만약 실제 정확한 형상모수값이 $m = 1.5$ 라면 이 인증시험의 실제 신뢰수준은

$$CL = 1 - e^{-n \ln(1-p) \left\{ \frac{\ln(1 - CL_0)}{n \ln(1-p)} \right\}^{m/m_0}} = 0.939$$

가 되어 설계 시 설정된 신뢰수준 $CL_0 = 0.9$ 이상을 만족함을 알 수 있다.

여기서 $n = 30$ 개의 시료를 사용하여 시험한다면 $n > A$, 즉 정리 1의 ii) 의 조건에 해당하며, 보수적인 형상모수값은 $m_0 = 1.8$ 이 된다. 다음 <표 2>는 $n = 10$ 및 $n = 30$ 에 대해 형상모수의 보수적 선택기준을 적용한 인증시험에서 실제 형상모수 값 m 의 변화에 따른 신뢰수준 CL 을 나타낸 것이다. 두 경우 모두 최초 규정된 신뢰수준 $CL_0 = 0.9$ 이상을 만족함을 알 수 있다.

<표 2> 형상모수의 보수적 선택기준에 의한 신뢰수준

m	$n = 10$	$n = 30$
1.2	0.900	0.923
1.3	0.914	0.919
1.4	0.927	0.915
1.5	0.939	0.912
1.6	0.950	0.908
1.7	0.959	0.904
1.8	0.967	0.900

4. 결 론

본 연구에서는 수명이 와이불분포를 따르는 제품에 대한 신뢰성 인증시험설계에서 형상모수 값의 변화에 따른 시료수와 시험시간의 변화를 파악하고, 잘못된 형상모수값의 사용이 실제 시험에 통과된 제품의 신뢰도와 신뢰수준에 미치는 영향을 분석하였다. 인증시험에서 시료수 n 이 t_0 에서의 보증신뢰도 $(1-p)$ 와 신뢰수준 (CL_0) 의 함수인 식 (4)의 A 보다 작으면 시험시간 T 는 보증수명 t_0 보다 커지며, 이때에는 가능한 형상모수값의 범위 내에서 가장 작은 값을 선택해야 시험에 합격한 제품의 신뢰도나 신뢰수준을 모두 충족할 수 있으며, 반대로 n 이 A 보다 크면 시험시간 T 가 보증수명 t_0 보다 작아지며, 이때에는 가능한 형상모수값의 범위 내에서 가장 큰 값을 선택하는 것이 시험에 합격한 제품의 신뢰도나 신뢰수준을 충족할 수 있는 것으로 밝혀졌다. 또한 전반적으로 시료수 n 과 관련하여, n 값이 A 에 근접할수록 합격된 제품의 신뢰도가 보증신뢰도에 근접하며, n 값이 A 에서 멀어질수록 합격된 제품의 신뢰도와 보증신뢰도간에 차이도 커지는 것으로 나타났다. 여기서 얻어진 결과는 와이불분포를 따르는 제품에 대한 신뢰성 인증시험설계에서 정확한 형상모수 값을 알 수 없을 때 요구수명을 주어진 신뢰수준으로 보증하기 위해 가능한 형상모수 값의 범위에서 형상모수 값을 보수적으로 선택하는데 참고자료로 활용될 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] 권영일(2006), “기계류부품 신뢰성보증을 위한 2단계 시험방식 설계”, 한국품질경영학회지, 제34권 제1호, pp. 20-26.
- [2] 권영일(2011), “경제적인 무고장 신뢰성 인증시험 설계”, 한국품질경영학회지, 제39권 제1호, pp. 71-77.
- [3] Abernethy, R. B.(2000), The New Weibull Handbook.
- [4] Barringer & Associates (2001), Weibull Database, <http://www.barringer1.com>.
- [5] Bloch, H.P. and Geitner, F.K.(1997), Machinery Failure Analysis and Troubleshooting, Gulf Publishing Company, Houston, Texas.
- [6] Ke, H.Y.(1999), “Sampling Plans for Vehicle Component Reliability Verification”, Quality and Reliability Engineering International, 15, pp. 363-368.
- [7] Nelson, W.(1985), “Weibull Analysis of Reliability Data with Few or No Failures”, Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 3, pp. 140-146.
- [8] Yadav, O.P., Singh, N., and Goel, P.S.(2006), “Reliability Demonstration Test Planning; A Three Dimensional Consideration”, Reliability Engineering and System Safety, 91, pp. 882-893.
- [9] Yan, W. and Herfat, A.T.(2004), “Design Criteria Evaluation Using Field Test Data and Reliability Test Improvement Based on Statistical Analysis”, IEEE RAMS 2004, pp. 168-172.