한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제4호 (2011년 11월), 61–86

힐베르트의 저서 '기하학의 기초' 에 관하여

On Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie'

양성덕 Seong-Deog Yang 조경희* Kyeonghee Jo

이 논문에서 우리는 힐베르트의 저서 '기하학의 기초' 에 관한 여러 문헌들을 소개하고 '기하학의 기초' 의 내용을 간략하게 살펴본다. 그리고 1902년에 발행된 (독일어) 초판 영문번역과 1971년에 발행된 (독일어) 10판 영문번역의 내용과 용어 및 표현에 어떤 변화가 있는지 살펴보고 이런 변화가 외국어 수학고전을 우리말로 옮기거나 우리말 수학도서를 저술하는 일에 대하여 시사하는 바를 논한다.

In this article we introduce old and new references for 'Grundlagen der Geometrie' written by Hilbert and summarize its contents. We then compare the 1902 English translation of the first (German) edition and the 1971 English translation of the 10th (German) edition focusing on the changes of the contents, terminologies, expressions, etc. We then finally discuss about the implications of these changes in translating mathematics classics into modern Korean and in creating mathematics books in modern Korean.

Keywords: 힐베르트(Hilbert), 기하학의 기초(Grundlagen der Geometrie, Foundations of Geometry).

1 서론

[14, 411쪽]에 의하면 수학 역사상 가장 유명한 책(celebrated books)은 수없이 많은 판이 발행된 유클리드($E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta\sigma$)의 '원론($\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\tilde{\iota}\alpha$)', 1794년 발행된 초판을 시작으로 12판까지 발행된 르장드르(Legendre)의 '기하원론(ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE)', 그리고 1899년 발행된 초판을 시작으로 14판까지 발행된 힐베르트(Hilbert)의 '기하학의 기초(Grundlagen der Geometrie)' 라고 한다.

'기하학의 기초' 의 내용과 그 변천과정에 대한 소개는 이미 많은 문헌에서 이루어져 있으나, 그럼에도 불구하고 국내에 '기하학의 기초' 에 대한 소개는 산발적으로, 그리고

*교신저자

MSC: 51M04, 51M05, 01A05, 03-03
제출일: 10월 6일 수정일: 11월 2일 게재확정일: 11월 7일

때로는 부정확하게 이루어져 있다. 예를 들어 google에서 '힐베르트 기하학의 기초'를 검색하여 보면 많은 관련 홈페이지 및 문서들이 검색되는데 일단 제목이 '기하학의 기초', '기하학기초론', 그리고 저술연도가 1899년, 1902년 이렇게 두 가지 씩으로 소개되어 있다. 또한 힐베르트의 공리가 스물 한 개라고 소개되어 있는 경우가 많은데 뒤에서 살펴보겠지만 이는 사실이 아니다. 고교 교과서만 하더라도 2008년 발행된 [8, 198쪽]은 '힐베르트 기하학 기초론', [9, 219쪽]은 '힐베르트 기하학의 기초론'이라 한다. 학술서적을 살펴보자면 1977년 발행된 콘사이스 수학사전[7]은 '힐베르트 기하학 기초론'이라 하고 있고 1989년 발행된 [5, 90쪽]은 '힐버트 기하학의 기초'라고 하고 있다. 우리는 '힐베르트 기하학의 기초'로 이름을 정하였다[6].

'기하학의 기초'에 관한 우리 나름의 연구가 필요한 이유 중의 하나는 이 책이 우리 수학교육에 끼치는 영향 때문인데 그 영향의 한 단편을 점, 직선, 평면을 나타내는 기호에서 살펴볼 수 있다. 우리 고교수학교과서의 공간도형 단원에는 점, 직선, 평면을 나타내는 기호를 다음 표에 나타난 바와 같이 한다고 씌어 있다. '기하학의 기초'에서는 점은

교과서	점	직선	평면
[8, 203쪽]	$A,\ B,\ C,\ \cdots$	$a,\ b,\ c,\ \cdots$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$
[9, 220쪽]	$A,\ B,\ C\ \cdots$	$l,\ m,\ n\ \cdots$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma$
[10, 222쪽]	알파벳 대문자 $A,\ B,\ C,\ \cdots,$ $P,\ Q,\ R,\ \cdots$	알파벳 소문자 $a,\ b,\ c,\ \cdots,$ $l,\ m,\ n,\ \cdots$	그리스 문자 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ $\pi,\ \cdots$

$A,\ B,\ C,\ \cdots$, 직선은 $a,\ b,\ c,\ \cdots$, 평면은 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$ 등의 문자로 나타낸다('기하학의 기초' 이전의 서적에도 점은 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ 등으로 나타내었다[22].). 한편, 영어로 쓰여진 현대수학서적 중에는 점을 $P,\ Q,\ R,\ \cdots$, 직선을 $l,\ m,\ n,\ \cdots$, 평면을 $p,\ q,\ r,\ \cdots$로 나타내는 경우가 많은데 이는 Point, line, plane의 머리글자를 이용한 것이며 평면을 π로 나타내는 경우도 있는데 이는 p에 해당하는 그리스 문자가 π여서 그렇게 쓴 것이라는 것이 통설이다. 따라서, 우리 고교수학교과서의 표기법은 '기하학의 기초'의 표기법이 일본을 통하여 전파된 것과 영어로 쓰여진 현대수학도서의 관행이 뒤섞여 있는 형태라고 짐작된다. 당연히, 이런 형식적인 것 외에 내용에서 '기하학의 기초'가 우리 수학교육에 어떠한 영향을 끼치고 있는지 알아내는 것은 우리가 풀어나가야 할 중요한 연구과제다.

'기하학의 기초'에 관한 본 연구는 초판 영역 [18]을 우리말로 옮기고자 하는 과정에서 시작되었는데[6], '기하학의 기초'가 14판까지 출판된 만큼 [18]의 번역만으로는 '기하학의 기초'를 완벽하게 소개할 수 없어 '기하학의 기초'에 대한 [6]과는 다른 관점의 종합적 소개는 여전히 필요하다.

이 논문에서 우리는 먼저 '기하학의 기초'에 관한 여러 문헌들을 소개하고 이 문헌

들을 통하여 ‘기하학의 기초’ 가 어떻게 시작되고 변화되었는지 살펴본다. 그러고 나서 ‘기하학의 기초’ 의 기본적 구성을 살펴본 후 두 영역의 내용과 용어, 문체 등등에 어떤 변화가 있는지 간략하게 살펴본다. 마지막으로 두 영역이 우리의 수학도서 번역문화와 저술문화에 어떠한 점을 시사하는지 논한다.

아쉽게도 독일어를 잘 알지 못하는 저자들로서는 독일어 1차 사료들을 분석하고 비교하는 일은 할 수가 없었는데, 이로 인하여 발생되는 연구의 부족함은 후속학자들의 연구를 통하여 개선되어야 할 것이다.

2 문헌조사

‘기하학의 기초’ 가 14판이나 발행된 만큼 그 모든 판을 비교·분석하는 것은 기하에 대한 힐베르트의 생각이 어떻게 변하였는지, 기하학의 기초에 관한 당시 연구가 어떻게 전개되었는지, 후대 수학자들이 힐베르트의 기하학을 어떻게 평가하고 발전시켜 나갔는지 알 수 있게 해 주는 매우 흥미로운 연구로 생각되는데 Hallet와 Majer는 2004년 발행된 [14] 에서 바로 이런 작업을 하고 있다. 이 문헌은 수학사의 관점에서 힐베르트의 기하에 대한 연구결과를 집대성한 책이며, 특히 ‘Grundlagen der Geometrie’ 독일어 초판의 원본 내용이 그대로 실려있다. 수학사적 관점에서 ‘기하학의 기초’ 에 관하여 알고자 한다면 일단 이 책을 보아야 한다. 이 책은 총 여섯 권으로 이루어진 전집의 첫 권인데 나머지 다섯 권의 제목은 다음과 같다.
<David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1894–1917>, <David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933>, <David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Physics, 1898–1914 (Classical, Relativistic and Statistical Mechanics)>, <David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Physics, 1915–1927 (Relativity, Quantum Theory and Epistemology)>, <David Hilbert’s Notebooks and General Foundational Lectures>.

Hartshorne의 [15]는 학부생을 위한 기하학 교재인데 ‘기하학의 기초’ 의 많은 내용이 현대수학의 개념과 용어로 상세히 설명되고 있다.

김명환, 김홍종의 [1]은 힐베르트의 스물 세 문제 중 문제 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 17, 18(a), (c) 에 대한 소개를 하고 있다. 이 중 세 번째와 열 일곱 번째가 ‘기하학의 기초’ 와 직접 연관된다.

‘기하학의 기초’ 는 유클리드 기하의 공리계를 엄정히 세우는 것으로부터 시작하므로 ‘기하학의 기초’ 를 이해하기 위해서는 유클리드의 원론의 구조를 이해하고 있어야 한다. 이무현이 번역한 유클리드의 원론 [2] 의 가권부터 라권까지는 [11] 에서 원론만을 번역한 것이고, 마권부터 자권까지는 [11] 에서 Heath가 쓴 해설 부분을 번역한 것이다. 가권은

평면 기하, 나권은 비율과 수, 다권은 무리수, 라권은 공간기하를 다루고 있다.

Reid의 [5, 8단원]도 힐베르트가 기하학에 관심을 가지게 된 당시의 수학적 배경과, 힐베르트가 어떤 관점에서 기하학을 생각하였고 '기하학의 기초' 를 저술하게 되었는지에 대하여 잘 이야기하여 주고 있다.

Greenberg의 [13]은 3판도 출간되어 있으며 부록에 힐베르트의 공리들이 제시되어 있다. 그런데 Greenberg가 제시한 공리의 형태는 '기하학의 기초' 의 독일어판이나 영역판에 나타난 형태 그대로는 아니다.

힐베르트의 '기하학의 기초'는 최소한 두 번 영어로 번역되었다([18, 초판 번역, 1902년], [21, 10판 번역, 1971년]). 초판 영역자인 Townsend는 힐베르트의 지도로 박사학위를 취득한 수학자다. [14, 407쪽]에 보면 1899년에 찍은 사진이 한 장 있는데 거기에는 Klein, Hilbert, Townsend 등이 등장한다. 안타깝게도 이 영역판에 대하여 별로 호의적이지 않은 여러 비판이 존재한다고 한다[14, 418쪽]. 이 초판 영역은 pdf 파일이나 TEX파일의 형태로 인터넷(http://www.gutenberg.org/etext/17384)에서 구할 수 있는데 [18], [19]와 비교하여 보면 잘못 타자된 부분들이 없지 않다.

유클리드 작도에 관한 대단히 친절한 설명을 Moise의 [25]에서 찾아볼 수 있는데 이는 '기하학의 기초' 제7장 내용을 이해하는 데 도움이 된다.

'기하학의 기초' 에 대한 Poincaré의 서평 [26]은 인터넷에서 구할 수 있는데 [5, 90쪽]은 이 서평으로부터 두 글을 인용함으로써 '기하학의 기초' 의 중요성을 이야기한다.

中村幸四郎(나카무라 코시로)[1]의 '기하학기초론' [27]은 Grundlagen der Geometrie 7판을 번역한 것이다. [27, 3쪽]에는 <힐베르트 기하학기초론(제7판 1930)은 1943년에 처음 일본어로 번역 출판되고 1946년 제3판이 출판된 후 절판되었다.>, [27, 243쪽]에는 <본서는 1969년 11월30일 淸水弘文堂(시미즈코분도)로부터 출판된 책이다. 문고화하는 데 있어서 새로운 글자와 카나(일본문자)로 표기를 개정하였다. 또한 읽기 쉬움을 고려해서 인명과 일부 표기를 현대식으로 개정했다. 더욱이 명백한 오기·오식(誤記誤植)을 정정하였다.>라고 씌어 있다. 종합하면 이 책의 글은 1946년 발행되었으나 절판된 번역을 1969년 10월 淸水弘文堂에서 재출판하였고 최근에 이르러서는 筑摩書房(치쿠마쇼보)에서 문고 형태로 묶으면서 2005년 12월 25일에 제2인쇄한 것이다. 당연히, [27]은 '기하학의 기초' 가 국내에 기하학기초론이라는 이름으로 알려지게 된 데에 큰 영향을 끼쳤을 것으로 짐작된다.

그런데 '기하학의 기초에 관한 이론' 을 뜻하는 말로 기하학기초론을 쓰기도 하므로 힐베르트의 기하학기초론이라 할 때 그것이 힐베르트의 이론을 의미하느냐 아니면 힐베르트의 책을 의미하는냐를 분명히 하여야 할 것이다.

1) 中村幸四郎는 '위상기하학', '원론' 이라는 말을 창안하였다고 한다. [27, 240쪽].

3 '기하학의 기초' 의 변화과정

힐베르트는 1891년부터 유클리드 기하학에 관하여 여러 번 강의하였고 특히 1898-1899 겨울 학기동안에는 집중적으로 기하학을 강의하였다. '기하학의 기초' 는 1899년 괴팅겐 대학교가 가우스와 베버의 동상을 제막할 때 기념으로 발행된 논문집의 앞 절반으로 출판되었기 때문에 이 책에는 기념논문집이란 뜻의 독일어 'Festschrift' 라는 별명이 붙어 있기도 하나 글 제목 자체는 'Grundlagen der Geometrie' 다. 나머지 절반은 Emil Wiechert가 쓴 '전자기학의 기초' 다[5],[14]. '기하학의 기초' 의 초판은 이 기념논문집에 수록된 내용을 뜻하며 1903년 발행된 2판부터는 'Grundlagen der Geometrie' 라는 제목의 단행본으로 출판되었다. 초판 이후 힐베르트가 6번의 개정판을 냈고 그의 사후에는 후대 사람들이 7판을 더 냈다. 즉, 힐베르트가 직접 저술과 개정에 관여한 것은 7판까지다. 각 판에 대한 역사와 내용의 변화는 [14]에 자세히 나와 있다. [21, iii쪽]에 일부 인용된 힐베르트의 7판 서문에 의하면, 7판에는 그 이전 판들에 비하여 크게 손질된 부분이 많은데 힐베르트를 위해 원고의 세세한 부분을 작성하였으며 특히 부록 7의 새로운 형식을 제안한 힐베르트의 학생 H. Arnold Schmidt가 직접 쓴 주석과 따름정리도 상당수 들어 있다 한다. 8판부터 11판까지는 힐베르트의 제자였으며 '수학의 기초' 를 힐베르트와 함께 저술한 Bernays[5]가 편집하였는데, 7판의 본문은 거의 손대지 않았으나 부록에 있는 논문들을 많이 삭제하였다고 한다[14, 425쪽].

'기하학의 기초' 에 관하여 인터넷에 퍼져있는 우리말 정보 중 정정되어야 할 것 중의 하나는, 힐베르트의 공리가 스물 한 개라는 것이다. 1899년에 발행된 독일어 초판에는 공리가 스무 개 제시되어 있는데 이를 불어로 번역하던 Léonce Laugel은 완비성 공리가 빠져있음을 발견하고 힐베르트의 동의 하에 1900년에 발행된 불역판에 완비성 공리를 첨가하였다. 1902년에 발행된 초판 영역 [18]에도 이 완비성 공리가 나타나며 따라서 공리가 스물 한 개인 것처럼 보인다. 그러나 그 후 발행된 여러 판을 통하여 내용에 적잖은 변화가 있었으며[2] 10판 영역 [21]에는 스무 공리가 제시되어 있다. 이는 힐베르트가 직접 손을 본 판의 마지막인 7판의 내용과 같을 것이므로[3] 결국 힐베르트의 공리는 스무 개로 이루어져 있다고 말하는 것이 타당하다. 물론 그 내용이 초판 영역 [18]에 제시되어 있는 것과 다름은 말할 것도 없다.

2) 1903년에 발행된 2판에는 이미 공리의 분할을 포함한 여러 가지 변화가 있었다[14, 419쪽].

3) 7판 일역 [27]에도 공리는 스무 개 제시되어 있다.

4 초판 영역 [18]을 통하여 살펴본 '기하학의 기초' 의 기본적 구성

'기하학의 기초' 는 '원론' 에서 이론적으로 미비한 부분을 철저히 다룬다. 따라서 '기학학의 기초' 는 '원론' 과 비교되면서 읽혀야 한다. 특히 제1, 3, 7장의 내용이 그렇다.

'제1장 다섯 공리군' 의 내용에 관하여 힐베르트의 공리계는 다음과 같이 다섯 개의 그룹으로 나뉘어 있다[4]: I 결합공리군, II 순서공리군, III 평행공리(유클리드 공리), IV 합동공리군, V 연속공리(아르키메데스 공리).

힐베르트의 공리계가 유클리드의 공리계와 다른 점은 다음 네 가지로 요약될 수 있다.

첫째로, 힐베르트는 유클리드와 달리 점이란 무엇인가, 직선이란 무엇인가 등을 정의하지 않고 점, 직선, 평면을 무정의 용어로서, 정의 없이 그냥 기하의 구성요소로서 보고 있다. 즉, 탁자, 의자, 맥주잔으로 세 단어를 바꾸어도 기하학의 체계는 변하지 않는다.

둘째로, 순서공리를 만들었다는 점이다. Hartshorne은 [15]에서 이 순서공리의 도입이 힐베르트의 공리계의 내용 중에서도 가장 두드러지고 획기적인 부분이라고 언급하였다. 유클리드의 여러 증명에서 이러한 점, 직선 등 구성요소들 간의 상대적인 위치관계 등을 직관과 상식에 호소하여 이용하는 것을 볼 수 있다. 우리에게 참이라고 인식되고 있는 가정이 무의식적으로 증명에 적용되고 있음을 유클리드 자신도 깨닫지 못한 것이다. 힐베르트는 이 공리군을 도입함으로써 유클리드 기하가 이러한 순서공리를 만족하는 기하의 한 예에 다름아님을 보여준다.

셋째로, 두 삼각형에 대한 변-각-변 합동정리에 해당하는 내용을 공리에 넣었다는 점이다(합동공리 IV, 6). 유클리드는 이 정리를 증명할 때 '두 도형을 겹친다' 라는 불명확한 개념을 사용하고 있는데, 이를 공리로 채택함으로써 힐베르트는 논리적인 결함을 해소하였다. 그리고 사실 이 공리의 존재는 현대수학에서 이 기하가 '자기변환군이 충분히 크다' 라는 것과 같은 의미를 가지고 있다 ([15]의 Proposition 17.1, Proposition 17.4 참조).

마지막으로, 힐베르트는 공간기하도 공리계로 다루고 있다. 평면기하를 공리계로 바라보는 시각은 많은 문헌에서 찾아볼 수 있으나 공간기하를 공리계로 바라보는 문헌은 별로 많지 않은 것 같다. 그는 공리 I, 3-7[5]를 평면기하에 관한 내용만 담고 있는 평면공리 I, 1-2와 구별하여 공간공리라 이름하였다. '평면기하는 어떤 공간기하의 부분기하다' 라는 너무나 당연히 참일 것 같은 명제가 사실은 기하에 따라 참일 수도 거짓일 수도 있음을 힐베르트는 이 책 5장에서 데자르그 정리를 이용하여 보인다.

4) 부록 1 참조.

5) 이 논문에서는 이 기호를 '일의 삼부터 칠까지' 라 읽기로 한다.

'제2장 공리들의 무모순성과 독립성' 의 내용에 관하여 2장의 요점은 1장에서 힐베르트가 정한 공리들이 (1) 서로 모순되지 않고 (2) 서로 독립임을 보이는 것으로서, 이는 수학 역사상 공리체계 자체의 무모순성을 보이는 최초의 시도라고 한다.

공리들이 서로 모순되지 않다는 것은, 이 공리들로부터 어떠한 논리적인 추론과정을 거쳐도 이 공리들 중 어느 것에라도 위배되는 명제를 이끌어 낼 수 없다는 뜻인데, 힐베르트는 모든 공리들이 다 성립하는 기하를 만들어 보임으로써 이를 증명한다.

공리들이 서로 독립이라는 것은 공리계 상호간의 의존성 문제로 어떤 공리도 나머지 다른 공리들로부터 추론될 수 없다는 것이다. 그 첫 번째로 평행공리의 독립성을 보이고 있는데, 평행공리가 다른 공리들로부터 유도될 수 없음을 쌍곡공간기하의 공 모델을 이용하여 설명하고 있다.

합동공리의 독립성에 대해서는, 삼각형에 대한 합동공리 IV, 6이 다른 공리들로부터 유도될 수 없음을 증명한다. 그 방법은 역시 위에서와 마찬가지로 공리군 I, II, III, IV 1-5, V는 모두 성립하나 IV, 6은 성립하지 않는 기하가 존재함을 보이는 것이다. 이러한 기하는 보통기하에서 좌표가 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 인 두 점에 대하여 두 점 사이의 거리를

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

으로 정의함으로써 얻고 있다.

연속공리의 독립성에 대해서도 힐베르트는 아르키메데스 공리를 제외한 다른 모든 공리는 성립하나 아르키메데스 공리는 성립하지 않는 비-아르키메데스 기하를 직접 만들어 연속공리의 독립성을 보인다. 그 방법은, 한 변수 t 로부터 시작하여 사칙연산과 다섯 번째 연산 $\omega \mapsto \sqrt{1+\omega^2}$ 을 통하여 만들어지는 t 에 관한 모든 대수적 함수들로 이루어진 가산집합 $\Omega(t)$ 를 정의하고, 이 수계의 임의의 두 원소 a 와 b 에 대하여 다음과 같은 대소관계를 주고 있다 : 충분히 큰 모든 t 에 대하여 $a - b$ 가 항상 양(음)이면 a 가 b 보다 크다(작다)고 정의한다. 이 $\Omega(t)$ 로부터 좌표평면과 좌표공간을 만든 후 점, 직선, 평면을 정의하여 공간기하를 만들면 이 기하는 비-아르키메데스 기하가 된다. 사실, 선분 t 에서 선분 1을 계속하여 아무리 놓아나가도 결코 t 의 끝점에 이르지 못하기 때문이다.

'제3장 비례에 관한 이론' 의 내용에 관하여 힐베르트의 비례이론과 유클리드의 비례이론은 내용면에서 큰 차이를 보이고 있다. 유클리드는 아르키메데스 공리를 만족하는 기하에서만 비례이론을 전개하고 있다. 이는 원론 제 V권 정의 4가 정확히 아르키메데스 공리임을 보면 바로 알 수 있다. 이에 반해, 힐베르트는 아르키메데스 공리를 사용하지 않고 비례 이론을 정립한다. 대신 파스칼의 정리를 중요하게 사용하는데, 힐베르트는 선분들 사이에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등의 연산을 정의하여 선분들의 집합을 하나의 가환체로 보고 있으며, 이로부터 비례이론을 이끌어 내고 있다. 사실, 앞에서 설명한 $\Omega(t)$ 를 이용하여 만들어진

기하에서도 비례이론을 이야기할 수 있는데, 이 기하는 아르키메데스 공리는 만족시키지 않지만 파스칼의 정리는 만족시키는 기하다. [26, 12쪽]을 보면 Poincaré는 힐베르트가 아르키메데스 공리를 사용하지 않고 여러 가지 기하의 성질들을 알아내려고 했다는 것에 대하여 진지하게 생각했던 것 같다.

힐베르트가 비례이론을 통하여 달성한 또 하나의 중요한 업적은, 1장에서 만든 논증 기하를 해석기하로 바꾸는 것이다. 선분들 사이에 연산을 준 선분계로부터 좌표평면을 만들면, 즉, 선분들로 좌표를 주면, 모든 선형방정식은 직선을 나타내게 된다. 그런데 이 좌표평면은 우리가 중학교 때 공부하는 그 좌표평면과는 다른데, 그 이유는 근본적으로 힐베르트 수계가 실수계가 아니기 때문이다. 통상적으로 힐베르트가 만든 좌표평면을 힐베르트 평면이라 하고 우리가 중학교 때 공부한 좌표평면을 데카르트 평면이라 한다. 이렇게 비례 이론은 공리를 이용하여 기술된 논증기하를 해석기하로 바꾸는 데 중요한 역할을 한다. 원래 힐베르트는 직선을 점, 평면과 더불어 무정의 용어로 사용하였으나 선분연산을 이용하여 좌표를 도입함으로써 직선과 평면을 각각 어떤 방정식의 해집합으로 본 것이다.

'제4장 넓이에 관한 이론' 의 내용에 관하여 유클리드의 넓이 이론에는 현대적 개념의 넓이 함수가 등장하지 않는다. 유클리드는 단지 두 도형의 '넓이가 같다' 라는 개념만을 이용하여 넓이 이론을 전개하고 있으며, 이를 이용하여 피타고라스의 정리 등 도형에 관련된 여러 가지 정리를 증명해 내고 있다. 이러한 과정에서 유클리드는

한 도형 안에 완전히 들어가는 도형의 넓이는 원래 도형의 넓이보다 작다 (*)

라는 것을 몇몇 증명에서 사용하고 있는데, 이는 그가 제시한 5번째 보통공리[6) '전체는 부분보다 크다' 를 이용한 것이다. 그런데 이 보통공리의 사용을 여러 수학자들이 편하게 생각하지 않았던 듯하다. 힐베르트도 그 중의 한 명으로서 이 보통공리를 사용하지 않고 위 명제 (*)을 증명하고자 하였다. 그는 비례이론을 이용하여 넓이 함수를 정의함으로써 이를 해낸다. F. Schur와 W. Killing 등도 (*)을 증명하였으나 모두 아르키메데스 공리를 이용하였으며, O. Stolz는 (*)에 해당하는 내용을 공리로 채택했다고 한다[18]. 하지만 힐베르트는 아르키메데스 공리와는 전혀 무관하게 (*)을 증명하였다. 사실 그의 넓이 이론의 핵심요소는 파스칼의 정리임을 알 수 있다.

힐베르트는 넓이 이론을 전개하기 위하여 두 개념을 도입한다. 하나는 equal content 라는 개념으로서 유클리드 넓이 이론의 '두 도형이 (넓이가) 같다' 라는 표현과 동일한 의

6) 유클리드의 원론은 유클리드 기하계를 구성하는 공리들과 별개로 기하와 상관없이 서술되는 다섯 개의 보통공리[4]를 명시하고 있는데 '전체는 부분보다 크다' 는 그 중의 하나다. 이 다섯 개의 보통공리를 지칭하는 용어로 [11]은 common notions, [18]은 general proposition, [21]은 general theorem, [2]는 상식, [3]은 공리, [4]는 보통공리를 사용한다.

미를 가진다. 다른 하나는 equal area라는 개념인데, 이는 '같은 넓이' 라는 일상적인 의미를 가지는 용어가 아니다. 여기서 '두 도형이 equal area를 가진다'는 것은, 두 도형이 각각 유한 개의 삼각형으로 분해되며 그 삼각형들이 일대일로 대응되고, 대응되는 삼각형들이 서로 합동이라는, equal content보다 훨씬 강한 의미를 가진다.

참고로, 유클리드의 원론에서 도형의 넓이에 관한 내용은 제1권 정리 34가 처음이며 그 내용은 다음과 같다

[2] 법칙 34. 어떤 사각형이 마주 보는 변들이 서로 평행하다고 하자. 그러면 마주 보는 변들은 길이가 같고, 마주 보는 각들은 크기가 같다. 그리고 맞모금은 넓이를 이등분한다.

[11] Proposition 34. In parallelogramic areas the opposite sides and angles are equal to one another, and the diameter bisects the area.

여기서 영문번역 [11]에는 area가 두 번 등장함에 반하여 국문번역 [2]에는 area의 통상적 번역인 '넓이' 가 한 번만 등장함에 주목하자. area는 두 가지 의미를 가지고 있다. '(평면) 영역' 그 자체를 가리키기도 하고 그 영역의 '넓이' 를 가리키기도 한다. 원론에는 이 정리가 등장할 때까지 우리가 통상적으로 알고 있는 '넓이' 의 개념은 등장하지 않는다. 이 정리의 증명을 들여다보면 맞모금은 평행사변형을 합동인 두 도형으로 나눈다는 것이 '넓이를 이등분한다' 는 말의 의미이다. 또한 뒤에서 다루겠지만 Heath의 Proposition은 오늘날 Theorem에 해당하는 것으로 보이며 따라서 '법칙' 은 오늘날의 '정리' 로 보는 것이 타당해 보인다.

'제5장 데자르그 정리' 의 내용에 관하여 이 장에서 힐베르트가 탐구하고자 하는 질문은 한 평면기하가 있을 때 그것이 항상 어떤 공간기하의 일부일 수 있는가 하는 것이다. 힐베르트의 공리계를 살펴보면 다섯 공리군 중에서 결합공리군만이 공간 기하에 관한 공리를 포함하고 있는데, 특히 I, 1-2는 평면기하에 관한 공리이고 I, 3-7는 공간 기하에 관한 공리이다. 이제 I, 3-7를 하나도 포함하지 않는 적당한 공리들로 구성되어 있는 평면기하가 있다고 하자. 여기에다가 공리 I, 3-7를 더하여 공간기하를 구성하고자 하는데 이것은 항상 가능한 것일까, 아니면 어떤 경우에는 불가능한 것일까 하는 것이 힐베르트가 이 장에서 제시한 질문이다. 힐베르트는 데자르그 정리를 이용하여 이 질문에 대한 답을 구한다.

22절에서 힐베르트는 공간기하에 관한 공리를 쓰지 않고 합동공리를 사용하여 데자르그 정리를 증명한다. [7] 23절에서 힐베르트는 합동공리를 쓰지 않으면 평면에서의 데자르그 정리를 증명할 수 없음을 보인다. 좀 더 정확하게 말하면 공리 I 1-2, II, III, IV 1-5로 구성되는 기하에서는 데자르그 정리를 증명할 수 없음을 공리 I 1-2, II, III, IV 1-5는 성립하지만 데자르그 정리는 성립하지 않는 평면기하를 하나 만듦으로써 보인다.

---

7) 데자르그 정리가 공리 I, II, III 만으로 증명된다는 것은 잘 알려져 있는데, 힐베르트는 공리 I 1–2, II, III, IV 만으로도 증명할 수 있다는 것을 보인 것이다.

24절에서는 합동공리를 쓰지 않고 선분연산을 정의한다(선분연산은 15절에서 합동공리를 이용하여 정의된 적이 있다.). 특히 합동공리가 쓰이지 않으면 두 선분의 곱이 어떻게 정의되는지 잘 살펴볼 만하다. 25절에서는 새로 정의한 선분연산에서 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 평면의 데자르그 정리를 사용하여 증명한다. 26절에서는 곱셈에 대한 결합법칙과 두 분배법칙이 성립함을 보이는데, 이 과정에서 데자르그 정리가 쓰인다. 주목할 만한 점은, 여기서는 곱셈에 대한 교환법칙은 증명하지 않는다는 것이다. 사실, 곱셈에 대한 교환법칙이 반드시 성립하지는 않는데, 그 예로는 다음 장인 6장 33절에서 소개하는 $\Omega(s,t)$가 있다.

27절에서는, 17절에서 한 것처럼, 새로 정의한 선분연산을 이용하여 평면에 좌표를 도입하고 임의의 직선이 선형방정식으로 표현됨을 설명한다. 여기서 한 가지 다른 점은, 이 새로운 선분연산에 의한 직선의 선형방정식에서는 변수 x와 y의 왼쪽에만 상수에 해당하는 선분이 곱해질 수 있다는 것이다. 상수가 변수의 오른쪽에 곱해지는 선형방정식은 일반적으로 직선을 나타내지 않는다([6]에 반례가 제시되어 있다.). 28절에서는 새롭게 정의된 선분연산의 성질들을 요약하고 있다. 이 선분연산은 곱셈에 대한 교환법칙과 아르키메데스 공리를 제외한 모든 성질들을 만족시키며, 데자르그 정리를 바탕으로 만들어지기에 데자르그 수계라고 불린다. 29절에서는, 앞에서 평면기하로부터 데자르그 수계를 만들고 그 수계를 이용하여 평면기하를 해석적으로 재구성한 것과 같은 방법으로, 임의의 데자르그 수계로부터 출발하여 공간기하를 구성한다. 결론적으로, 평면기하에서 데자르그 정리가 성립함은 그 평면기하가 공간기하의 한 부분기하이기 위한 필요충분조건임을 30절에서 논하고 있다.

'제6장 파스칼의 정리' 의 내용에 관하여 이 장에서는 3장에서 다루었던 파스칼의 정리를 새로운 관점에서 다루고 있다. 3장에서는 공리 I 1-2, II, III, IV로부터 파스칼의 정리를 증명하였는데, 특히 데자르그 정리를 증명할 때와 마찬가지로 공간공리를 사용하지 않고 합동공리를 사용하였다. 그렇다면 파스칼의 정리도 합동공리를 사용하지 않고 대신 공간공리를 사용하여 얻을 수 있을까? 즉, 공리 I, II, III 만으로 얻을 수 있을까? 라는 질문을 생각할 수 있는데 파스칼의 정리는 공간공리가 있다 하더라도 합동공리 없이는 증명되지 않는다. 이 점에서 파스칼의 정리는 데자르그 정리와는 다름을 알 수 있다. 그렇지만 힐베르트는 (공간공리를 만족하는 경우) 합동공리 대신 아르키메데스 공리를 사용하면 파스칼의 정리를 얻을 수 있음을 증명한다. 아르키메데스 수계에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 반드시 성립한다는 정리 38이 이 증명의 핵심인데 이는 곱셈에 대한 교환법칙은 기하적으로 파스칼의 정리에 다름 아니기 때문이다.

힐베르트는 이 장의 마지막 절에서 교차점에 관한 정리에 대하여 언급하고 있는데 주된 결론은 평면에서의 교차점에 관한 모든 정리들은 보조점과 보조선을 잘 이용하면 데자르그

정리와 파스칼의 정리의 조합으로 나타날 수 있다는 것이다.

‘제7장 작도’ 의 내용에 관하여 작도는 유클리드의 원론 전체를 통하여 중요하게 쓰인 개념인데 유클리드가 작도에 쓴 도구는 눈금 없는 자와 컴퍼스다. 힐베르트가 작도에 쓴 도구는 눈금 없는 자와 선분이동기라는 것인데 후대에 출간된 책들에서는 ‘기하학의 기초’ 에서 작도에 사용하는 도구들을 힐베르트의 도구들이라고 소개하고 있다[15]. 어떤 작도가 가능한가 하는 질문에 대한 답은 작도 도구에 따라서 달라진다. 예를 들어 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용해서는 주어진 정육면체에 대하여 부피가 두 배가 되는 정육면체를 작도할 수 없으나, 눈금 있는 자와 컴퍼스를 사용하면 그런 정육면체를 작도할 수 있다[15, Proposition 30.2].

유클리드 기하학의 체계를 재정립하려는 힐베르트로서는 작도 문제를 그냥 지나칠 수 없었을 것이다. 유클리드가 작도의 도구로 눈금 없는 자와 컴퍼스를 선택한 것과는 달리 힐베르트가 눈금 없는 자와 선분이동기를 선택한 이유는 힐베르트의 공리계가 그렇게 요구하기 때문이다. 눈금 없는 자와 선분이동기를 이용하여 행할 수 있는 작도는 눈금 없는 자와 컴퍼스, 사실은 컴퍼스 만으로 행할 수 있다는 것은 쉽게 알 수 있다. 거꾸로, 컴퍼스를 가지고 할 수 있는 작도는 눈금 없는 자와 선분이동기로 할 수 있는가 하는 질문을 생각해 볼 수 있는데 반드시 그런 것은 아니다. 즉, 컴퍼스를 가지고서는 작도할 수 있지만 눈금 없는 자와 선분이동기를 가지고는 작도할 수 없는 도형들이 있다는 것을 힐베르트가 37절의 마지막 부분에서 반례를 통하여 밝혀 놓았다. 컴퍼스로 작도할 수 있는 것들은 눈금 없는 자와 선분이동기로 작도할 수 있는 것과 작도할 수 없는 것으로 나눌 수 있는데 7장에서 힐베르트는 그 정확한 판정기준이 무엇인가를 밝힌다.

5 두 영역판 비교

‘기하학의 기초’ 의 두 영문번역 [18] 과 [21] 의 차이는 크게 내용의 변화, 용어의 변화, 표현의 변화로 구분될 수 있다. 이 중 예, 반례를 다르게 쓴 부분 등에 대해서는 ‘기하학의 기초’ 초판 영역 [18] 의 우리말 번역 [6] 에 나타내었다. 용어의 변화 중에서 간단한 것들은 [6] 에 나타냈으며 여기에는 본 논문의 주제와 관련하여 설명이 필요한 부분에 한하여 설명을 제시한다. 초판이 출간된 이후 발생한 수학적 발견에 의하여 생긴 내용의 변화에 대해서는 간략한 설명을 제시한다.

책의 제목의 차이 [18] 의 제목과 [21] 의 제목에는 차이가 있다. Google에서 ‘Hilbert’s Grundlagen der Geometrie’ 를 검색하여 나오는 책의 겉표지 사진을 보면 분명히 Die가 붙어있지 않으므로 [21] 의 제목이 원전에 좀 더 가까운 것으로 보인다.

‘제1장 다섯 공리군’ 에서의 차이 결합공리군에서는, [18] 의 I, 7이 [21] 에서는 I, 3과 I, 8로 쪼개져 직선공리와 평면공리가 구분된다.

순서공리군에서는, 힐베르트가 [21] 의 각주에도 직접 언급한 바 있듯이, 1902년 Moore에 의해 공리 II, 4는 공리군 I과 공리군 II에 있는 다른 공리들로부터 증명될 수 있음이 밝혀짐에 따라, [21] 에는 [18, 공리 II, 4] 의 내용이 공리군에서 제외되고 정리 5로 나와 있다. 또한 공리 II, 2와 II, 3에도 약간의 변화가 있는데, 두 경우 모두 다른 공리들로부터 추론되는 부분을 정리 3과 정리 4로 각각 처리하여 공리의 내용을 약화시켰다.

평행공리는 [18, III] 에서 [21, IV] 로 순서가 바뀌었을 뿐만 아니라 그 내용에서도 약간의 차이가 있다. [18] 에서는 평행공리의 내용에 평행선의 존재성과 유일성을 모두 언급하고 있는데, 존재성은 사실 다른 공리들로부터 추론되는 것이기 때문에 [21] 에서는 유일성만을 공리로 채택하고 있다.

합동공리군에서는, [18, 공리 IV, 5] 가 [21] 에서는 삭제되고 대신 정리 19로 들어가 있다. 이는 A. Rosenthal에 의해 증명된 것이다. [21, 6절] 에는 [18, 7절] 에 비하여 합동공리에 관한 좀 더 자세한 그리고 더 많은 결과들이 증명되어 있다.

연속공리군 V에서는, [18] 의 완비성 공리가 [21] 에서는 직선의 완비성 공리로 대체되었는데, [18] 에서 완비성 공리로 제시되었던 내용은 [21] 에서는 증명되고 있다.

이상에서 알 수 있듯이, 제1장에서 내용의 변화는 공리들 중 다른 공리들로부터 증명될 수 있는 것들을 빼고 꼭 필요한 것만 남겨두어 공리들 간의 독립성을 성취해 가는 과정에서 나타나는 자연스러운 변화라고 볼 수 있겠다. 독자들이 공리계의 변화를 직접 들여다 볼 수 있도록 두 영문번역의 모든 공리들을 부록에 나타내었다.

용어와 표현에 대해서는 다음과 같은 점들이 관찰된다: [18, 4쪽] 은 <A lies upon a>, <A, B, C lie in α> 등과 같은 표현을 쓰고 있는데 [21] 에서는 <A lies on a>, <A lies in α> 등과 같은 표현을 쓰고 있다. 따라서 upon, on, in의 용법에 대하여 너무 민감하게 생각할 필요가 없으며 이는 [6] 에서 ‘A lies on A’ 를 ‘A는 a 위에 있다’ 가 아닌 ‘A는 a에 있다’ 라고 번역하는 한 근거가 된다.

또한 표현이 많이 간결해지고 있는데 예를 들어 [18, 공리 I, 1] ‘Two distinct points A and B always completely determine a straight line a. We write $AB = a$ or $BA = a$.’ 와 [21, 공리 I, 1] ‘For every two points A, B there exists a line a that contains each of the points A, B.’ 에서 그런 사실을 확인할 수 있다. [21, 공리 I, 1]은 무언가의 존재성을 말함에 있어서 오늘날의 정형화된 영문 형태를 띄고 있음을 알 수 있다.

‘제2장 공리들의 무모순성과 독립성’ 에서의 차이 내용을 살펴보면, [21, 9절] 끝에는 [18] 에 비하여 한 쪽 정도 설명이 더 있다. 공리들의 무모순성을 보이면서 사용한 실수의 부분집합 Ω 대신에 실수 전체를 사용하여 기하를 만들 경우 우리들이 알고 있는 보통의 좌표평면

기하가 되는데, 이 기하의 경우 완비성 공리가 성립함을 증명하고 있다. [21, 10절]에서는 평행공리와는 무관하게 독립적으로 성립하는, 즉 유클리드 기하와 비유클리드 기하에서 모두 성립하는 여러 정리들을 소개하는데 여섯 쪽 정도를 더 쓰고 있다. 여기에서 르장드르의 유명한 두 정리를 증명하고 있는데, 특히 제1정리의 증명에는 아르키메스 공리가 꼭 필요하다는 것을 강조하고 있다. [21, 11절]에서는 합동공리의 독립성을 증명하는 과정에서 제시된 예가 다른 것으로 대체되어 있다. [21, 12절] 에서는 르장드르 정리와 관련된 그 당시 최근 연구결과를 소개하는 내용이 한 쪽 정도 첨가되어 있는데, 특히 아르키메데스 공리를 가정하지 않는 경우 르장드르 정리가 어떻게 일반화되는지에 대한 결과, 아르키메데스 공리를 만족하는 기하에서는 평행공리가 '한 삼각형의 내각의 합은 두 직각이다.'라는 명제와 동치라는 결과 등을 소개하고 있다.

용어와 표현에서는, 우선 제 2장을 이루는 네 절의 제목에서 The의 사용에 차이가 있다. 각 절의 제목을 보면 [18, 9절]은 The compatibility of the axioms, [21, 9절]은 The Consistence of the Axioms, [18, 10절]은 Independence of the axiom of parallels. Non-euclidean gemetry, [21, 10절]은 The Independence of the Axiom of Parallels (Non-Euclidean Geometry)이다. 10절의 제목에서 [18]은 The를 쓰지 않는 반면 [21]은 쓰고 있는데 이는 책의 제목에서 [18]은 The를 쓰고 [21]은 The를 쓰지 않는 것과는 반대되는 현상이다. 또한 [18]은 axiom of parallels, axioms of congruence, axioms of continuity 등으로 쓰고 있는데 반하여 [21]은 Axiom of Parallels, Congruence Axioms, Continuity Axiom 등으로 쓰고 있다.

'제3장 비례에 관한 이론' 에서의 차이 힐베르트는 비례이론을 전개하기 위하여 합동공리를 사용하여 선분들 사이에 연산을 정의하는데, 여기에서 파스칼의 정리를 핵심적으로 사용한다. 그러므로 3장은 선분계를 소개하기 위하여 일반적인 수계를 정의하고 나서 바로 파스칼의 정리를 증명하는 것으로 시작된다. 그런데 초기 몇 판을 발표한 후 힐베르트는 비례이론을 전개할 때 파스칼의 정리의 특수한 경우만이 필요하다는 것을 발견한 듯하다. 사실, 교차하는 두 직선이 직각으로 만날 때, 그리고 교차점에서 두 직선의 첫 번째 점까지를 나타내는 두 선분이 서로 합동일 경우의 파스칼의 정리만 사용하여도 비례이론을 전개하는데 아무 문제가 없다. 그래서 힐베르트는 이것을 개정판에서 언급하고 있다. [18, 3장]과 [21, 3장]의 내용 상의 전개에 있어서는 크게 달라진 것은 없으나, 파스칼의 정리를 증명하는 14절에서 위 특수한 경우의 간단한 증명을 보여 주고 있으며, 선분연산을 정의하는 15절에서도 파스칼의 정리를 직접적으로 사용하지 않고 곱셈에 대한 교환법칙을 증명하며, 위 특수한 경우의 파스칼의 정리만을 이용하여 곱셈에 대한 결합법칙을 증명하는 또 다른 방법을 추가로 설명하고 있다.

표현에 있어서 달라진 다른 변화를 보면 다음과 같다.

우선 [18, 제3장] 의 제목은 THE THEORY OF PROPORTION인데 [21, 제3장] 의 제목은 THEORY OF PROPORTION으로 THE가 빠져 있다.

[18, 13절] 에는 복소수계를 구성하는 성질이 열 일곱 개가 제시되어 있으나 [21, 13절] 에는 완비성 정리가 추가되어 열 여덟 개로 늘어나 있으며 또한 성질 2와 3, 그리고 5와 6이 뒤바뀌어 소개되어 있다. 그리고 ‘THEOREMS OF CONNECTION(1-12)’ 이 ‘THEOREMS OF COMPOSITION(1-6)’ 와 ‘RULES OF OPERATION(7-12)’ 로 나뉘어 제시되어 있다.

[18, 14절] 의 제목은 ‘Demonstration of Pascal’s Theorem’ 인데 [21, 14절] 의 제목은 ‘Proof of Pascal’s Theorem’ 이다. demonstration이 증명을 뜻하였음은 증명종료를 뜻하는 말로 알려져 있는 Q. E. D. (Quod erat demonstrandum) 로도 짐작할 수 있는데 [18] 로 미루어 짐작할 때 1900년 전후에도 여전히 demonstration은 오늘날의 proof에 해당하나 그 영향은 많이 줄었음을 알 수 있다. 사실 [18] 도 제목에서는 Demonstation을 쓰고 있지만 본문에서는 Proof를 쓰고 있다. 한편 [23] 에서는 증명의 뜻으로 Demonstration을 쓰고 있으니 1800년대 후반이 증명으로 Demonstration이 Proof로 변해가는 과도기인 것으로 짐작된다.

[18, 16절] 의 제목에 THEOREMS OF SIMILITUDE라고 되어 있는 것이 [21, 16절] 의 제목에는 Similarity Theorem으로 되어 있으며, [18, 17장] 마지막 문단에 ‘ideal’ or ‘irrational’ elements라고 되어 있는 것이 [21, 17장] 에는 단순히 ‘irrational’ element로 되어있다.

‘제4장 넓이에 관한 이론’ 에서의 차이 [21] 에서 나타나는 또 다른 큰 변화 중의 하나는 ‘밑넓이가 같고 높이도 같은 두 삼각뿔은 equidecomposable인가?’ 하는 가우스의 질문에 대해서 21절에서 다루고 있다는 점이다. 이는 힐베르트의 세 번째 문제로, Dehn이 분해합동이 아니면서 밑넓이가 같고 높이도 같은 두 삼각뿔을 찾음으로써 해결되었는데, Dehn은 사실 다면체의 부피이론은 넓이이론의 전개와 똑같은 과정을 통하여 얻어낼 수 없음을 증명하였다. 부피이론을 넓이이론과 똑같은 방법으로 전개할 수 없다는 것이 밝혀졌지만, W. Süss가 equidecomposable, equicomplementable을 약간 변형한 유사한 개념에 의해 비슷한 전개를 할 수 있다는 사실을 증명하였음을 소개하고 있다. 또한 아르키메데스 공리를 만족하는 공간기하에서는 equicomplementable인 두 다면체는 equidecomposable임이 J. P. Sydler에 의해 증명되었다고 한다.

[18] 은 넓이 이론을 전개하면서 equal area라는 개념과 equal content라는 용어를 사용하고 있다. 넓이 이론과 관련된 다른 문헌들에서는 equal area와 같은 의미로 equidecomposable, scissors congruent 등 여러 가지 다른 용어들이 사용되고 있다[15], [21], [17]. [21] 에서도 [18] 에 쓰인 of equal area, of equal content라는 용어는 사라지고 대신 equidecomposable, equicomplementable이 사용되었다. 참고로 [27] 은 equidecomposable을

分解等積, equicomplementable을 補充等積으로 번역하고 있다.

'제5장 데자르그 정리' 에서의 차이 정리 33의 증명이 [18]과 [21]에서는 다르게 되어 있다. 즉, 데자르그 정리가 성립하지 않는 평면기하의 예가 서로 다른 것들이 제시되어 있다. 그리고 [21, 22절]에는 공리 IV*가 등장하는데, 이는 합동공리 없이도 평행공리의 역할을 할 수 있도록 [21, 평행공리 IV]의 내용을 강화한 것으로 사실상 [18]의 공리 III이다. 앞에서도 설명한 바 있듯이 힐베르트는 다른 공리들로부터 추론되는 부분을 삭제하여 유클리드 공리계를 최대한 간단하게 하였으나, 몇 개의 공리들로만 이루어진 다른 기하를 분석하면서 다시 원래의 명제가 필요해지기도 한 것이다.

데자르그 정리를 이용하여 정의한 새로운 선분연산에 대한 내용에서도 개선된 점을 찾아 볼 수 있다. 우선 한 직선에 있는 두 선분의 합은 단위-선을 무엇으로 하느냐와 상관없이 잘 정의된다는 것을 증명하고 있으며, [21, 25절]에서 덧셈에 대한 결합법칙을 증명할 때, [21, 26절]에서 분배법칙을 사용할 때 [18]에서와는 다른 논법이 사용되었다.

[18, 5장]의 제목은 DESARGUES'S THEOREM인데 [21, 5장]의 제목은 Desargues' Theorem이다. '가우스의 위대한 정리' 를 'Gauss's Theorema Egregium' 이라 하는 현대 수학의 관행에 비추어 볼 때 꼭 후에 나온 [21]이 옳다고만 할 수는 없다고 생각된다. 이런 현상은 우리 말 번역에서 '데자르그의 정리' 와 '데자르그 정리' 중 어느 것이 맞는지에 비견될 수 있는 문제로 보이는 데 결국은 어느 것이 맞고 틀리는 지의 문제가 아니라고 보인다.

오늘날 우리가 직선공리, 평면공리라고 하는 것을 원래 [18]은 linear axiom, plane axiom이라 하였는데 [21]은 line axiom, plane axiom이라 하고 있다.

[18, 27절]의 제목은 'EQUATION OF THE STRAIGHT LINE, BASED UPON THE NEW ALGEBRA OF SEGMENTS' 인데 [21, 27절]의 제목은 'The Equation of a Line Based on the New Segment Arithmetic' 이다. Line이 우리가 통상적으로 생각하는 직선이 아닌 곡선을 의미했었음은 유클리드의 원론을 통해서도 알 수 있다. [11, Vol. 1, 159쪽]을 보면 line은 곡선을 의미하고 직선은 straight line으로 쓰였다. 이런 점으로 볼 때 [18] 시대까지만 하더라도 line은 곡선을 의미했고 직선은 straight line으로 쓰였는데 그것이 [21]이 나올 시점에는 line은 직선을 의미하게 되었을 거라고 유추할 수 있다. 또한 앞에서 살펴보았듯이 [18, I, 1]과 [21, I, 1]에서도 이런 차이가 발견된다.

'제6장 파스칼의 정리' 에서의 차이 [21, 35절]은 [18, 35절]에 비하여 한두 쪽 정도가 더 긴데, 평면기하에서 합동공리와 연속성 공리를 사용하지 않고, 파스칼의 정리로부터 데자르그의 정리가 유도될 수 있음을 보이는 것이 그 골자이며[21, 정리 61], 따라서 교차점에 관한 모든 정리들이 파스칼의 정리만으로 구성될 수 있음을 보인다.

[21, 31절]에는 아르키메데스 공리(공리 V, 1)의 변형인 공리 V, 1*가 등장한다. 이는 아

르키메데스 공리가 선분들 사이의 합동 개념을 사용하여 표현되어 있기 때문에, 합동공리가 성립하지 않는 데자르그 수계에서의 아르키메데스 공리에 해당하는 내용으로 다시 서술한 것이다. 이는 [18, V, 1]에서 나타나는 논리적인 결함을 보완한 것으로 볼 수 있다. 8)

[18, 31절] 첫 문단에 'we have shown that…' 이 [21, 31절] 첫 문단에는 'I have shown that…' 으로 나와 있다. 또한 [18, 31절] 두 번째 문단의 'Our investigation' 이 [21, 31절] 두 번째 문단에는 'The investigation' 으로 나타나 있다. 이와 같이 [18]에 쓰인 'we' 또는 'our' 가 [21]에는 'I' 로 변하거나 전혀 쓰이지 않은 것을 알 수 있다.

[18, 33절]의 제목은 'THE COMMUTATIVE LAW OF MULTIPLICATION FOR A NON-ARCHIMEDEAN NUMBER SYSTEM' 인데 [21, 33절]의 제목은 'The Commutative Law of Multiplication in a Non-Archimedean Number Set' 이다. FOR와 SYSTEM이 in과 Set으로 각각 바뀌어 있음을 알 수 있다. [18, 34절]의 제목에 PROPOSITION으로 나와 있는 것이 [21, 34절]의 제목에는 Theorem으로 나와 있다. 참고로, [21, 97쪽, 밑에서 일곱 번째 줄]의 However를 '그러나' 로 번역하면 문맥의 흐름이 뒤틀어지는데 이에 해당하는 [27]의 번역은 그리고, 그러고 나서 등을 뜻하는 そして이다.

'제7장 작도' 에서의 차이 [18, 7장]은 네 절로 이루어져 있는데 [21, 7장]은 두 절로 이루어져 있다. [21]은 [18]의 37~39절의 내용을 모두 합하여 한 절을 구성하는데 [18, 38절]의 핵심결론인 정리 43을 일반화한 정리가 1927년 Artin에 의하여 증명됨으로써 그 정리를 인용하여 [18, 39절]의 내용을 쉽게 증명하였다. 힐베르트의 23 문제 중 17번 째 문제 <다변수 다항식이 실수에 대하여 음이 아닌 값만을 가질 때 그 다항식은 유리다항식의 제곱의 합으로 나타낼 수 있는가?>가 여기 내용과 관련이 있는데 [1]과 [28]에서 자세한 설명을 찾아볼 수 있다.

용어에 있어서는, [18]에서 사용된 transferer of segments(선분이동기[6]) 대신 [21]에서는 scale이 사용되었다. [27]은 이를 定長尺이라 번역하였는데 이에 대한 이유는 [21]이나 [27]의 주석을 보면 짐작할 수 있다. 1902년에 모든 선분을 이동하지 않아도 단위길이의 선분만 이동할 수 있으면 된다는 것이 밝혀진 것이다. 참고로, [21]은 scale이란 용어를 사용하면서도 그렇게 그 용어를 좋아하지는 않았다고 생각된다. 그 이유는 36절의 제목을 Geometric constructions with ruler and compass라고 써 놓고 (즉, ruler and scale을 쓰지 않고) 본문에서는 ruler and scale을 썼으며 또한 본문에서 compass는 [18]의 compass와 같은 의미로 썼다. [27]의 정장척은 그런 의미에서 좋은 번역이라 하겠다. 만약 [21]의

8) 여기서 주의 깊게 살펴보아야 할 점은, 합동공리를 사용하지 않고 데자르그 정리만을 사용하여 선분연산을 정의할 경우, 한 직선에 있는 두 선분에 대해서만 합이나 대소 관계 또는 '두 선분이 같다' 라는 개념이 정의될 수 있다는 것이다. 힐베르트가 언급하고 있지는 않지만, 선분연산에서 합의 정의가 두 축을 처음에 어떻게 선택하느냐 하는 것에도 무관함을 보여야 하며, 이는 데자르그 정리를 이용하면 쉽게 할 수 있다.

우리말 번역이 이루어진다면 거기서는 [27]의 정장척이 아닌 '단위선분이동기' 라는 표현을 쓰는 것이 [6]과 맥을 같이 한다.

'결론' 에서의 차이 [18, 결론]은 여섯 쪽 반으로 이루어져 있는데 [21, 결론]은 한 쪽 정도로 이루어져 있다. [18, 결론]의 첫 문단과 마지막 두 문단의 적당한 변형이 [21, 결론]을 이루고 있으며 생략된 부분은 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군으로 이루어진, 즉 평행공리와 아르키메데스 공리를 제외한 공리들로 이루어진 기하의 종류에 관하여 Dehn이 연구한 결과를 해설한 것이다.

'부록' 에서의 차이 [18, 부록]은 힐베르트의 논문 하나의 요약문으로 이루어져 있는데 [21, 부록]은 힐베르트의 논문 5개와 Bernays의 보충해설로 이루어져 있다. [21, 부록]의 네 번째 논문의 요약이 [18, 부록]이다. 힐베르트가 세상을 떠나기 전 마지막으로 편집한 7판의 부록은 힐베르트의 논문 10개로 이루어져 있는데 이 논문들은 기하학의 기초 외에 수학일반의 기초론에 관한 논문들이라고 한다. 힐베르트의 사후 8판부터 11판까지를 편집한 Bernays는 힐베르트에게서 박사학위논문을 지도받았으며 힐베르트와 공동으로 '수학의 기초' 를 저술하였는데[5, 303쪽], '기하학의 기초' 를 편집하면서 기하학과는 상관없는 힐베르트의 논문들을 빼 버렸다고 한다[14, 425쪽]. Bernays가 힐베르트와 함께 수학의 기초를 저술하였다면 기하를 넘어선 수학일반의 기초에 대한 관심이 컸을 것으로 생각되는데 왜 기하학이 아닌 수학일반의 기초에 관한 부록은 빼 버렸는지 궁금할 따름이다.

참고로, 일역 [27]의 부록은 '수의 개념에 관하여' 와 '공리론적 사유' 라는 힐베르트의 논문 두 개로 이루어져 있는데 이 둘은 [18, 부록]과 [21, 부록]에는 없다. 이 책의 원전인 'Grundlagen der Geometrie' 의 7판에 나와 있는 부록 열 개 중 두 개를 추출하여 번역한 것으로 추측되는데 이로부터 역자의 관심사 또는 1940년대 당시 일본 수학계의 관심사가 단순히 기하학만이 아닌 수학 전반의 공리화에 걸쳐 있었음이 짐작된다.

6 결론

이제까지 우리는 '기하학의 기초' 의 생성 및 변천과정과 그 내용을 간략하게 소개하고 또한 두 영문번역을 비교·분석하면서 내용의 변화와 함께 수학책 번역에 있어서 영어 사용에 어떤 변화가 있었는지 살펴보았다. 이를 통하여 우리는 다음과 같은 결론들을 내릴 수 있다.

[18] 또는 [21] 하나만을 읽는 것만으로는 '기하학의 기초' 가 말하는 내용을 완벽하게 이해하기는 쉽지 않으며 '기하학의 기초' 에 관한 이해는 '기하학의 기초' 여러 판과 관련 논문들을 통한 포괄적 접근이 이루어진 후에 가능할 것이다. 따라서 힐베르트가 마지막으로 손을 본 '기하학의 기초' 독일어 7판이나 또한 적어도 독일어 10판 영역 [21]에 대한 우리말

번역도 이루어져야 한다.

'기하학의 기초' 두 영역 [18]과 [21]에서 내용은 물론이려니와 용어 및 표현에 있어서도 많은 변화가 관찰되는데 이는 수학적 아이디어를 표현함에 있어 영어가 진화하는 과정에서 생긴 당연한 현상이며, 우리말로 수학을 말하고 씀에 있어서 시사하는 바가 크다. 당대의 수학 전 분야를 통달한 마지막 천재라는 힐베르트조차 여러 번의 개정을 통하여 아이디어와 용어를 다듬는데 우리는 이런 면에서 노력이 부족하다. 혹자는 우리말, 우리글이 수학적 아이디어를 표현함에 있어 적절하지 않은 언어라 하는데 그보다는 우리말이 아직 그러한 단계에 도달하지 못했다고 하는 것이 사실에 더 가깝다. 우리말로 수학을 표현하기 시작한 것이 불과 몇십 년 밖에 되지 않은 것을 생각한다면 현재로서는 우리말로 수학을 표현하기가 어려운 것이 당연하다. 이 단계를 벗어나기 위해서는 부지런히 우리말로 수학을 말하고 써야 한다. 어떤 작품을 내놓을 때는 당연히 완성된 작품을 내놓는 것을 목표로 해야 하겠지만, 우리말 수학책에 관한 한, 현 시점에서는 불완전하더라도 일단 내놓은 후 고치고 또 고치는 꾸준한 노력을 경주하여 완성된 작품을 만들어나가는 것도 한 방법이다. 자꾸 써야 정형화된 용어와 표현 등이 나올 수 있으며 그런 과정을 거쳐야 우리말로 수학을 이야기하고 쓰는 것이 자연스러워 질 것이다.

수학에서 가장 유명하다는 세 책 [11], [18], [22] 모두 기하학 서적임은 기하학이 가지는 교육적 효과에 대하여 좀 더 우리가 신경을 써야 한다는 점을 시사하는데, 이 중 르장드르의 '기하원론' 은 그 내용이 아직 국내에 자세하게 소개된 바가 없다. 이 책에 대한 국내 연구진의 체계적 학술적 연구와 국내 일반인들을 위한 우리말 번역이 이루어져야 한다.

우리나라 수학교과과정과 수학교과서를 일본과 중국의 그것과 비교하는 연구가 필요하다. 현 교과과정과 교과서만 비교만 할 것이 아니라 그 변천과정까지 연구하여야 하는데 이는 특히 기존 우리말 수학용어와 표현 등이 어떻게 생성되었는지를 이해하고 앞으로 유창한 우리말 수학책을 쓰는데 있어서 어떻게 용어와 표현, 기호 등을 정할 지 등에 있어서 반드시 선행되어야 할 연구다. 예를 들어 중고교 수학교과서에 등장하는 '점이 직선 위에 있다', '직선이 평면 위에 있다' 등과 같은 표현은 아마도 일본의 영향을 받은 부분이라고 생각된다. [27, 16쪽]에 보면 「Aかaの上にある」, 「aの上にAがある」 등과 같이 되어 있다.

감사의 글 2009년 봄 학기에 매주 한 번씩 모여 '기하학의 기초' 및 관련 글들을 읽고 토의하며 역자일동이 힐베르트의 아이디어를 이해하는 데에 많은 도움을 준 박형준, 최재용, 이동선, 양종호, 미국에서 [21]을 구입하여 직접 들고 와 양성덕에게 기증하여 준 안광우 박사, 언제나 이 연구의 진행에 관심을 가지고 여러 도움 말씀을 주신 김영욱 교수님께 감사드립니다.

참고 문헌

1. 김명환, 김홍종, 『현대수학입문』, 경문사, 2001.
2. 유클리드, 『기하학 원론』 가-자(총 9권), 이무현 번역, 교우사, 1998–1999.
3. 이종우 편저, 『기하학의 역사적 배경과 발달』, 경문사, 1997.
4. 고바야시 쇼시찌, 『유클리드 기하에서 현대 기하로』, 원대연 옮김, 청문각, 제1판 3쇄, 2001.
5. 콘스탄스 리드 , 『힐버트』, 이 일해 번역, 대우학술총서 · 번역 19, 민음사, 1989.
6. 다비드 힐베르트, 기하학의 기초, 조경희·양성덕 번역중, 2011.
7. 박을룡, 김치영, 박한식, 조병하, 정지호 (책임편집위원), 『콘사이스 수학사전』, 창원사, 1977년 초판, 1995년 중판.
8. 이강섭 외 6인, 『고등학교 수학 II』, (주) 지학사, 2008. 3. 1. 6쇄.
9. 우정호 외 5인, 『고등학교 수학 II』, 대한교과서 (주), 2008년 3월 1일, 제3판.
10. 박규홍 외 5인, 『고등학교 수학 II』, (주) 교학사, 2004년 3월 1일 발행.
11. Euclid, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Vols. 1,2,3, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
12. G. Frege, "On the fondations of geometry", *The Philosophical Review*, Vol. 69, No. 1, 1960, pp.3–17.
13. Marvin Jay Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, Second Edition, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
14. Michael Hallett and Ulrich Majer (Editors), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902*, David Hilbert's Foundational Lectures Series, Vol. 1. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
15. Hartshorne, Robin, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
16. D. Hilbert, "Úber ternáre definite Formen," *Mathematische Annalen*, Vol. 17, pp. 169–197, 1893.
17. Chih Ha Sah, "Scissors congruences I, Gauss-Bonnet map", *Math. Scand.* 49, pp. 181–210, 1982.
18. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902. – Kessinger Publishing's Rare Reprints.
19. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902. – BiblioBazaar Reproduction Series.
20. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902. – LateX Source From Internet.
21. D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, Translated by Leo Unger from the tenth German Edition, Open Court Classics, Revised and Enlarged by Paul Bernays, Open Court, 1971.
22. Adrien M. Legendre, *ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE*, Paris, 1794.
23. Adrien M. Legendre, *Elements of Geometry*, Translated from the French for the use of the students of the university at Cambridge, New England by John Farrar, Hilliard and Gray, and Company, Boston, 1841.

24. George E. Martin, *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*, Springer, New York, 1975.
25. Edwin Moise, *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint*, Addison Wesley, 1963.
26. H. Poincaré, “Poincaré’s review of Hilbert’s ‘Foundations of Geometry,’” *Bulletin of AMS*, *Oct*., 1903, pp. 1–23.
27. D. ヒルベルト, 『幾何学基礎論』, 7판, 中村幸四郎 번역, 筑摩書房, 2005.
28. `http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_seventeenth_problem{.}`

부록 1 : '기하학의 기초' 초판 영역 [18]에 제시되어 있는 힐베르트의 공리계

I 결합공리군

I, 1. 서로 다른 두 점 A와 B는 항상 직선 a를 완전히 결정한다. 우리는 $AB = a$ 또는 $BA = a$로 나타낸다.

I, 2. 한 직선의 서로 다른 두 점은 그 직선을 완전히 결정한다; 즉, 만약 서로 다른 두 점 B, C에 대하여, $AB = a$고 $AC = a$면 또한 $BC = a$다.

I, 3. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C는 항상 평면 α를 완전히 결정한다. 이 때, 우리는 $ABC = \alpha$라고 표현한다 .

I, 4. 한 직선에 있지 않은, 한 평면 α의 임의의 세 점 A, B, C는 그 평면을 완전히 결정한다.

I, 5. 한 직선 a의 두 점 A, B가 평면 α에 있으면 a의 모든 점이 α에 있다.

I, 6. 두 평면 α, β가 점 A를 공유하면, 그 두 평면은 A와 다른 점 B를 최소한 하나 더 공유한다.

I, 7. 모든 직선에는 점이 적어도 두 개 있다. 모든 평면에는 한 직선에 있지 않은 점이 적어도 세 개 있다. 그리고 공간에는 한 평면에 있지 않은 점이 적어도 네 개 있다.

II 순서공리군

II, 1. 만약 A, B, C가 한 직선의 점이고 B가 A와 C 사이에 있으면, B는 또한 C와 A 사이에 있다.

II, 2. 만약 A와 C가 한 직선의 두 점이면, A와 C 사이에 최소한 한 점 B가 있고, C가 A와 D 사이에 있게 되는 점 D가 최소한 하나 있다.

II, 3. 한 직선의 임의의 세 점 중에서 반드시 단 한 점이 있어 그 점은 나머지 두 점 사이에 있다.

II, 4. 한 직선의 임의의 네 점 A, B, C, D는 다음과 같이 배열할 수 있다: B는 A와 C 사이에 있고 또한 A와 D 사이에 있다. 그리고 C는 A와 D 사이에 있고 또한 B와 D 사이에 있다.

II, 5. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C와 평면 ABC에 있으면서 A, B, C 중 어느 점도 지나지 않는 직선 a가 있을 때, 직선 a가 선분 AB의 한 점을 지나면 a는 선분 BC 또는 선분 AC의 한 점을 지난다.

III 평행공리

III. 평면 α의 직선 a와 그 직선 밖의 한 점 A가 주어졌을 때, 점 A를 지나고 직선 a를 만나지 않는 직선이 평면에 단 하나 있다. 이 직선을 점 A를 지나고 α에 평행한 직선이라고 한다.

IV 합동공리군

IV, 1. 직선 a의 두 점 A, B와 직선 a'(직선 a와 같을 수도 있음)의 점 A'이 주어졌을 때, 직선 a'의 A'으로부터 임의의 방향에 우리는 항상 유일한 점 B'을 찾을 수 있어 선분 AB(또는 BA)와 선분 $A'B'$은 합동이 된다. 이 관계는

$$AB \equiv A'B'$$

으로 표시한다. 모든 선분은 자신과 합동이다. 즉, 항상

$$AB \equiv AB.$$

IV, 2. 선분 AB가 선분 $A'B'$과 합동이고 선분 $A''B''$과도 합동이면 선분 $A'B'$은 선분 $A''B''$과 합동이다; 즉, $AB \equiv A'B'$이고 $AB \equiv A''B''$이면 $A'B' \equiv A''B''$이다.

IV, 3. 직선 a의 두 선분 AB와 BC가 점 B만을 공유하고, 직선 a'의 두 선분 $A'B'$과 $B'C'$이 점 B'만을 공유한다고 하자. 여기서 a와 a'은 같은 직선일 수도 있다. 그러면, 만약 $AB \equiv A'B'$이고 $BC \equiv B'C'$이면 $AC \equiv A'C'$이다.

IV, 4. 각 (h, k)가 평면 α의 각이라고 하자. 직선 a'을 포함하는 평면 α'에 직선 a'에 대한 한쪽 면이 주어지고, h'이 점 O'을 시점으로 하는 직선 a'의 한 반직선일 때, 우리는 항상 다음 성질을 만족시키는 반직선 k'을 단 하나 찾을 수 있다: 각 (h, k)가 각 (h', k')과 합동이고, 각 (h', k')의 모든 내부점들이 주어진 a'의 한쪽 면에 있다. 우리는 이러한 관계를

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

로 표시한다. 모든 각은 자신과 합동이다; 즉,

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$$

이거나

$$\angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

IV, 5. 각 (h,k)가 각 (h',k')과 합동이고 동시에 각 (h'',k'')과 합동이면, 각 (h',k')은 각 (h'',k'')과 합동이다 ; 즉, $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$이고 $\angle(h,k) \equiv \angle(h'',k'')$이면 $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$이다.

IV, 6. 두 삼각형 ABC와 $A'B'C'$ 사이에

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C',\ \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

V 연속공리(군)

V. A_1이 임의의 두 점 A와 B사이에 있다고 하자. 다음을 만족시키는 점열 A_2, A_3, A_4, $\cdots$을 고른다; A_1은 A와 A_2 사이에 있고, A_2는 A_1과 A_3 사이에, A_3은 A_2와 A_4 사이에 있는 등 A_i가 A_{i-1}과 A_{i+1} 사이에 있도록 배열되고, 선분

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \cdots$$

이 모두 같다. 그러면 이 점들 중 한 점 A_n에 대하여 B가 A와 A_n 사이에 있다.

완비성 공리 점, 직선, 평면으로 이루어진 기하에 다른 요소를 추가하여 다섯 그룹의 공리를 모두 만족시키는 새로운 기하를 얻을 수 없다. 다시 말해서, 다섯 그룹의 공리를 만족시키는 한, 기하의 요소들은 더 이상 확장할 수 없는 시스템을 구성한다.

부록 2 : '기하학의 기초' 10판 영역 [21]에 제시되어 있는 힐베르트의 공리계

I 결합공리군

I, 1. 어떠한 두 점 A, B에 대해서도 점 A와 B를 모두 지나는 직선이 있다.

I, 2. 어떠한 두 점 A, B에 대해서도 점 A와 B를 모두 지나는 직선은 많아야 하나 있다 .

I, 3. 한 직선에는 점이 적어도 두 개 있다. 한 직선에 있지 않은 점이 적어도 세 개 있다.

I, 4. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C에 대하여 A, B, C를 포함하는 평면이 있다. 어떤 평면에도 그것이 포함하는 점이 있다.

I, 5. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C를 포함하는 평면은 많아야 하나 있다.

I, 6. 한 직선 a의 두 점 A, B가 평면 α에 있으면 a의 모든 점이 평면 α에 있다.

I, 7. 두 평면 α, β가 점 A를 공유하면 두 평면은 적어도 다른 한 점 B를 공유한다.

I, 8. 한 평면에 있지 않은 점이 적어도 네 개 있다.

II 순서공리군

II, 1. B가 A와 C 사이에 있으면, A, B, C가 한 직선의 서로 다른 세 점이고 B는 또한 C와 A 사이에 있다. [9)]

II, 2. 임의의 두 점 A와 C에 대하여, 직선 AC에 적어도 한 점 B가 있어서 C가 A와 B 사이에 있다.

II, 3. 한 직선에 있는 세 점 중 많아야 한 점만이 나머지 두 점 사이에 있다.

II, 4. 한 직선에 있지 않은 세 점 A, B, C와 평면 ABC에 있으면서 A, B, C 중 어느 점도 지나지 않는 직선 a가 있을 때, 직선 a가 선분 AB의 한 점을 지나면 a는 선분 BC 또는 선분 AC의 한 점을 지난다.

III 합동공리군

III, 1. 직선 a의 두 점 A, B와 직선 a'(직선 a와 같을 수도 있음)의 점 A'이 주어졌을 때, 직선 a'의 A'으로부터 임의의 방향에 선분 AB와 선분 $A'B'$이 합동이 되는 점 B'을 항상 찾을 수 있다. 이 관계는

$$AB \equiv A'B'$$

으로 표시한다.

III, 2. 선분 $A'B'$과 선분 $A''B''$이 동일한 선분 AB와 합동이면 선분 $A'B'$은 선분 $A''B''$과 합동이다; 간단히 말하여, 두 선분이 제 삼의 선분과 합동이면 그 두 선분은 서로 합동이다.

III, 3. 직선 a의 두 선분 AB와 BC가 점 B만을 공유하고, 직선 a'의 두 선분 $A'B'$과 $B'C'$이 점 B'만을 공유한다고 하자. 여기서 a와 a'은 같은 직선일 수도 있다. 이 경우, 만약 $AB \equiv A'B'$이고 $BC \equiv B'C'$이면 $AC \equiv A'C'$이다.

9) [21]에서는 [18]과는 달리 ‘B가 A와 C 사이에 있다’ 라는 말의 정의가 이미 세 점이 모두 한 직선에 있다는 것을 포함하고 있다.

III, 4. $\angle(h,k)$가 평면 α의 각이고 a'이 평면 α'의 직선이며, a'에 대한 α의 한쪽 면이 주어졌다고 하자. h'이 점 O'을 시점으로 하는 직선 a'의 반직선이라 하자. 이러면 평면 α'에 각 $\angle(h,k)$가 각 $\angle(h',k')$과 합동이거나 같고 동시에 각 $\angle(h',k')$의 모든 내부 점들이 주어진 a'의 한쪽 면에 있게 되는 반직선 k'이 단 하나 있다. 우리는 이러한 관계를

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

로 표시한다. 모든 각은 자신과 합동이다; 즉,

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k).$$

III, 5. 두 삼각형 ABC와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

IV 평행공리

IV. 직선 a와 그 직선에 있지 않은 한 점 A가 주어졌을 때, a와 A로 결정되는 평면에는 점 A를 지나고 직선 a를 만나지 않는 직선이 많아야 하나 있다.

V 연속공리군

V, 1 (아르키메데스 공리). 어떠한 두 선분 AB와 CD에 대해서도 A에서 시작하여 반직선 AB를 따라 선분 CD를 n번 인접하여 붙여만든 선분이 점 B를 넘게 되는 자연수 n이 있다.

V, 2 (직선의 완비성 공리). 공리군 I-III과 V, 1로부터 나오는 직선에서의 순서와 합동에 관한 기본 성질들 뿐만 아니라 기존 원소들 사이에 있는 관계까지 보존하는 새로운 순서와 합동 관계를 가지는 집합으로 직선을 확장하는 것은 불가능하다.

양성덕 고려대학교 수학과
Department of Mathematics, Korea University
E-mail: sdyang@korea.ac.kr

조경희　목포해양대학교 교양과정부
Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime University
E-mail: khjo@mmu.ac.kr