한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제4호 (2011년 11월), 1–6

洪正夏의 數論

Hong Jung Ha's Number Theory

홍성사 Sung Sa Hong   홍영희 Young Hee Hong   김창일* Chang Il Kim

조선의 가장 위대한 산학자 洪正夏의 저서 《九一集》(1724) 에 들어있는 최소공배수를 구하는 법을 조사하여 홍정하의 수론에 대한 업적을 밝혀낸다. 홍정하는 두 자연수 a, b 의 최대공약수 d와 최소공배수 l에 대하여 $l = a\frac{b}{d} = b\frac{a}{d}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$는 서로 소인 것을 인지하여, 자연수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 최대공약수 D에 대하여, $\frac{a_i}{D}(1 \leq i \leq n)$도 서로 소이고, 이들의 최소공배수 L도 서로 소인 $c_i(1 \leq i \leq n)$가 존재하여 $L = a_ic_i(1 \leq i \leq n)$임을 보였다. 이 결과는 조선에서 얻어낸 수론에 관한 수학적 업적 중에 가장 뛰어난 것 중의 하나이다. 홍정하가 수학적 구조를 밝혀내는 과정을 드러내는 것이 이 논문의 목적이다.

We investigate a method to find the least common multiples of numbers in the mathematics book GuIlJib(九一集, 1724) written by the greatest mathematician Hong Jung Ha(洪正夏, 1684～?) in Chosun dynasty and then show his achievement on Number Theory. He first noticed that for the greatest common divisor d and the least common multiple l of two natural numbers a, b, $l = a\frac{b}{d} = b\frac{a}{d}$ and $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ are relatively prime and then obtained that for natural numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, their greatest common divisor D and least common multiple L, $\frac{a_i}{D}(1 \leq i \leq n)$ are relatively prime and there are relatively prime numbers $c_i(1 \leq i \leq n)$ with $L = a_ic_i(1 \leq i \leq n)$. The result is one of the most prominent mathematical results on Number Theory in Chosun dynasty. The purpose of this paper is to show a process for Hong Jung Ha to capture and reveal a mathematical structure in the theory.

Keywords: Hong Jung Ha(洪正夏, 1684～?), GuIlJib(九一集, 1724), Number Theory, greatest common divisors, least common multiples

1 서론

중인 산학자 홍정하(1684～?)는 《楊輝算法》(Yang Hui suan fa, 1274～1275, [3, 4]), 朱世傑(Zhu Shi Jie)의 《算學啓蒙》(Suan xue qi meng, 1299, [3, 4]), 安止齋(An Zhi Zhai)의 《詳明算法》(Xiang ming suan fa, 1373, [3, 4]), 程大位(Cheng Da Wei,

*교신저자

MSC: 01A13, 01A50, 05-03, 11-03, 11A50
제출일: 10월 3일   수정일: 11월 7일   게재확정일: 11월 10일

1533～1606)의 《算法統宗》(Suan fa tong zong, 1592, [3, 4])과 그의 외조부의 숙부인 慶善徵(1616～?)의 《默思集算法》([1])을 연구하여 조선의 산서로 가장 위대한 《九一集》(1724, [7])을 저술한다([2]). 홍정하는 《산학계몽》에 들어있는 천원술과 《양휘산법》에 들어있는 《田畝比類乘除捷法》(1275)과 《산법통종》에 들어있는 개방법을 확장하여 구고술을 포함하는 조선의 방정식론을 완벽하게 정리하였다([5, 6]). 유리수체 위에서 전개된 중국의 방정식론에서 사원술과 음수해를 제외하면, 홍정하의 방정식론은 더 이상 발전할 여지가 없는 업적이다. 《구일집》은 범례와 9권으로 이루어져 있다. 처음 8권은 20門 , 493問으로 마지막 세 門이 開方各術門이므로 실제로는 18門이다. 이 중에 제5권 구고호은문(78問), 제6～8권의 개방각술문(166問)을 보면 저자가 《구일집》을 저술한 동기를 알 수 있다. 범례에 들어있는 $a(x+b)^n$의 계수를 증승개방법에 사용한 조립제법으로 구할 수 있는 것을 보인 것과 $(x \pm 1)^n$의 이항계수를 나타낸 것도 홍정하의 수학이 매우 뛰어난 것임을 보여주는 대목이다. 제9권은 잡록으로 河國柱(He Guo Zhu)와의 대담을 기록한 것과 함께 간단한 천문학과 율려를 포함하고 있다. 중성도(中星圖)에 "今甲辰"이라 하고 이어서 원 인종의 연호인 "延祐(1314～1320) 원년 갑인년부터 현재 갑진년 까지 411년"이라 하여 갑진년이 1724년임이 확인된다. 따라서 《구일집》은 1724년에 완성되었다. 그러나 하국주와 1713년에 대담한 기록에 들어있는 내용으로 보아 처음 8권은 이미 1713년 이전에 완성되었고 1724년 잡록을 더하여 출판하였다.

《구장산술》(Jiu zhang suan shu)의 방전장에 약분을 위하여 도입된 최대공약수는 Euclid의 호제법과 같은 방법을 사용하여 구하고 이후의 모든 산서에서 취급된다. 최소공배수를 구하는 방법은 소광장에 들어있지만 약간의 오류가 있고 이 방법은 잊히게 되었다([8]). 분수의 통분도 최소공배수를 사용하지 않고 분모를 모두 곱한 공배수를 사용하였다. 《양휘산법》의 《乘除通變算寶》(1274)에 승제 첩법을 위하여 인수분해가 도입되기는 하였지만 수론으로 발전되지는 못하였다. 방정식론과 마찬가지로 동양의 수론은 인수분해가 도입되지 않아 서양의 수론과 전혀 다른 길을 걷게 된다. 최소공배수를 구하는 문제도 여러 산서에 들어있지만 서로 소인 경우가 대부분으로 바로 곱하여 구하는데 그쳤는데, 《양휘산법》의 《續古摘奇算法》(1275) 상권에 서로 소가 아닌 두 수 a, b의 경우에 최대공약수 d, 최소공배수 l에 대하여 $dl = ab$임을 인지하지 못하여 l을 제대로 구하지 못하고 있다.

홍정하의 수론은 《구일집》 제2권 貴賤差分門 第7～9問에 들어있는 최소공배수 문제에 나타나고, 전술한 양휘의 문제도 잡록에서 $dl = ab$를 사용하여 고쳐놓았다. 홍정하는 최소공배수를 구하는 문제에서 최대공약수, 최소공배수의 구조를 정확하게 인지하여 그의 수론을 구성하였다.

이 논문의 목적은 홍정하가 사용한 예문을 통하여 그가 얻어낸 결론을 포함하는 그의

수론을 논하는 것이다. 자연수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 최대공약수 d에 대하여 $\frac{a_i}{d}(1 \le i \le n)$는 서로 소이다. 이들의 최소공배수 l은 서로 소인 $c_i(1 \le i \le n)$가 존재하여 $l = a_i c_i(1 \le i \le n)$이고, 이를 이용하여 홍정하는 최소공배수 l을 구하였다. 홍정하는 최소공배수의 구조를 정확하게 드러낸 최초의 수학자이다.

2 洪正夏의 數論

전술한 貴賤差分門 第7問은 아래와 같다.

今有甲乙二人同起程 只云甲日行八十五里 乙日行六十五里
問甲乙所行各幾日 以行里適等
答曰 甲一十三日 行一千一百五里, 乙一十七日 行一千一百五里
法曰 置甲日行八十五里 乙日行六十五里 約之得五爲法
另列八十五里以法五除之 得十七日此乙之日也
又列六十五里以法五除之 得十三日此甲之日也
乃列各日以其日行乘之 各得其里數一千一百五里 合問
一法 置甲日行八十五里 乙日行六十五里 乘之得五千五百二十五里爲實
另甲乙日行約之得五爲法 除之亦得各其行一千一百五里

갑 을 두 사람이 각각 매일 85리, 65리씩 갈 때 같은 거리를 가는데 각각 며칠 걸리는가 하는 문제이다. 즉 85와 65의 최소공배수를 구하는 문제로 귀착한다. 홍정하는 두 수의 최대공약수 5를 구하여 $\frac{85}{5} = 17$, $\frac{65}{5} = 13$을 구하여 각각 을과 갑이 간 날 수이고, 최소공배수 $85 \times 13 = 65 \times 17 = 1105$리를 구하였다. 별해로 $\frac{85 \times 65}{5} = 1105$, 즉 $5 \times 1105 = 85 \times 65$를 사용하여 구하였다.

第8問은 다음과 같다.

甲乙丙三人行步不等 甲日行四十五里 乙日行四十里 丙日行三十五里
問幾日 以所行里相等
答曰 甲五十六日 行二千五百二十里 乙六十三日 行二千五百二十里
丙七十二日 行二千五百二十里
法曰列三人日行數互相約之得五 以除四十五里得九爲甲分母
以除四十里得八爲乙分母 以除三十五里得七爲丙分母
乃列於左行 又列各人日行於右行 以左行互乘右行三位 各得二千五百二
十里 此相等之數 各以日行除之得各日

第7問과 같은 종류의 문제로 갑, 을, 병 세 사람이 각각 매일 45리, 40리, 35리를 가는 경우 이다. 세 수의 최대공약수 5로 각수를 나누어 9, 8, 7을 구한 후에 $45 \times 8 \times 7 =$

$40\times 9\times 7 = 35\times 9\times 8 = 2520$리를 구하고 이를 각각의 매일 가는 거리로 나누어 각각이 걷는 날의 수를 구하였다.

마지막으로 第9問은 다음과 같다.

今有欲買牛馬騾驢 而其牛隻價十八兩 馬隻價十二兩 騾隻價九兩
驢隻價六兩 問四色幾隻之價適等
答曰 牛二 馬三 騾四 驢六 各價皆三十六兩
法曰各列四色價互相約之得三爲法 以除各價得牛六馬四騾三驢二
乃列於左行 又列各價於右行 以左行互乘右行四位
各得四百三十二兩爲實 各以其價除之得 牛二十四馬三十六
騾四十八驢七十二此亦等數
又四位互相約之-不能約者置之-得十二乃爲法
以除牛二十四得牛二 以除馬三十六得馬三 以除騾四十八得騾四
以除驢七十二得驢六
以除四百三十二兩得四色等價三十六兩 合問

소, 말, 노새, 나귀의 값이 각각 18, 12, 9, 6냥일 때 각각 몇 마리씩을 사면 같은 값이 되느냐이다. 18, 12, 9, 6의 최대공약수 3으로 각수를 나누어 6, 4, 3, 2를 얻는다. 第8問과 같이 $18\times(4\times 3\times 2) = 12\times(6\times 3\times 2) = 9\times(6\times 4\times 2) = 6\times(6\times 4\times 3) = 432$를 얻어 주어진 네 수의 공배수를 구한다. 다시 네 수 $4\times 3\times 2$, $6\times 3\times 2$, $6\times 4\times 2$, $6\times 4\times 3$의 최대공약수 12로 432와 위의 네 수를 나누어 36, 2, 3, 4, 6을 구한다. 이때 2, 3, 4, 6은 서로 소이고, $36 = 18\times 2 = 12\times 3 = 9\times 4 = 6\times 6$이 18, 12, 9, 6의 최소공배수이다.

위의 세 문제를 종합하면

85, 65의 최소공배수는 $85\times 13 = 65\times 17 = 1105$,

45, 40, 35의 최소공배수는 $45\times 56 = 40\times 63 = 35\times 72 = 2520$,

18, 12, 9, 6의 최소공배수는 $18\times 2 = 12\times 3 = 9\times 4 = 6\times 6 = 36$이고,

두 수 13, 17, 세 수 56, 63, 72, 네 수 2, 3, 4, 6은 모두 서로 소이다.

또 먼저 최대공약수를 이용하여 공배수를 구한 후 각 수로 공배수를 나눈 몫들을 구하여 이들이 서로 소인 경우인 第7, 8問은 구한 공배수가 최소공배수이고, 마지막 문제와 같이 이들이 서로 소가 아닌 경우는 몫들의 최대공약수로 이들을 나누어 서로 소인 수들을 구하여 이들과 원수들의 곱으로 최소공배수를 구하였다. 홍정하는 이 과정을 통하여 다음 정리를 얻어낸 것이다.

정리(홍정하) 자연수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 최대공약수, 최소공배수를 각각 d, l이라 하면 다음이 성립한다.

i) $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d} \cdots \frac{a_n}{d}$은 서로 소이다.

ii) 서로 소인 $c_1, c_2, \ldots, c_n$이 존재하여 $l = a_i c_i (1 \le i \le n)$이고 역도 성립한다.

정리의 증명을 하기 전에 자연수의 집합을 $\mathbb{N}$으로 나타내자. 집합 $\mathbb{N}$ 위에 순서 $\ll$를 다음과 같이 정의하자 : x가 y의 약수, 즉 $x \mid y$일 때 $x \ll y$라 하면 $(\mathbb{N}, \ll)$는 순서집합이다. 두 원소 $a, b \in \mathbb{N}$의 최대공약수, 최소공배수를 각각 d, l이라 하면, a, b의 임의의 공약수 p, 공배수 q에 대하여 p는 d의 약수이고, q는 l의 배수인 것은 잘 알려져 있다. 이는 순서집합 $(\mathbb{N}, \ll)$에서 d, l이 각각 a, b의 하한 $a \wedge b$, 상한 $a \vee b$임을 뜻하여 순서집합 $(\mathbb{N}, \ll)$은 격자(lattice)가 되어, 두 이항연산 $\wedge, \vee$은 결합법칙, 교환법칙, 멱등원법칙을 만족한다. 이상의 준비를 가지고 위의 정리를 증명하자.

증명 i)은 정의에 의하여 자명하므로 ii)만 증명하자.

먼저 l을 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 최소공배수라 하면 $c_i (1 \le i \le n)$가 존재하여 $l = a_i c_i (1 \le i \le n)$가 된다. p를 $c_1, c_2, \ldots, c_n$의 최대공약수라 하면 $c_i = p x_i (1 \le i \le n)$인 x_i가 존재한다. 따라서 $\frac{l}{p} = a_i x_i (1 \le i \le n)$이므로 $\frac{l}{p}$이 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 공배수가 되어 $p = 1$, 즉 $c_1, c_2, \ldots, c_n$은 서로 소이다.

역을 증명하자. 서로 소인 $c_1, c_2, \ldots, c_n$이 존재하여 $l = a_i c_i (1 \le i \le n)$라 하자. m을 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 최소공배수라 하면 위의 증명에서 서로 소인 $p_1, p_2, \ldots, p_n$이 존재하여 $m = a_i p_i (1 \le i \le n)$이다. l은 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 공배수이므로, $l = mq$인 q가 존재한다. 따라서 $a_i c_i = a_i p_i q$에서 $c_i = p_i q (1 \le i \le n)$이므로 q는 서로 소인 $c_1, c_2, \ldots, c_n$의 약수가 되어 $q = 1$, 즉 $l = m$은 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 최소공배수이다. □

위의 세 문제의 해법에서 홍정하는 최소공배수를 구하기 위하여 먼저 주어진 수들의 최대공약수를 이용하여 공배수를 찾는데 이 때 "互乘"을 이용하여 공배수를 주어진 수로 나눈 몫들을 바로 구한다. 이어서 위의 **정리** i)을 사용하여 구하여진 몫들의 최대공약수로 이들을 나누어 서로 소인 인수들을 찾아 **정리** ii)에 따라 최소공배수를 구한 것을 알 수 있다. 죽간으로 만든 산서의 전통 때문에 논리적인 부분을 생략하는 동양 산서의 특징으로 위의 정리를 언급하지 않았을 뿐인 것을 쉽게 추정할 수 있다.

3 결론

홍정하의 《구일집》에 나타나는 특징은 저자가 단순히 그가 연구한 산서를 인용하지 않고 그 속에 포함된 수학적 구조를 철저히 규명해 내어 자신의 수학을 만들어 낸 것이

다. 예를 들어 범례에 들어있는 賈憲(Jia Xian)의 삼각형을 증승개방법에 사용되는 조립제법으로 얻어지는 것을 보인 것이다. 그는 전통적인 제곱근을 구하는 구장산술의 개방법과 증승개방법을 사용하여 구한 개방법의 구조를 비교하여, 전자는 가헌의 삼각형을 사용하여 구한 것으로 후자와 같은 결과를 얻어낸 것을 인지한다. 더욱이 그는 $(x+b)^n$의 계수뿐 아니라 $a(x+b)^n$의 계수도 조립제법으로 구할 수 있고 $(x-1)^n$의 계수도 같은 방법으로 구할 수 있음을 나타내어 양의 근만 취급한 증승개방법에서 음수도 같은 방법으로 사용할 수 있는 것을 보인 최초의 산서로 추정된다.

홍정하의 수론은 그의 수학적 태도를 잘 나타내는 예이다. 두 수 a, b의 최대공약수 d, 최소공배수 l에서 현재도 사용하는 관계식 $ab = dl$에 그치지 않고 $l = a\frac{b}{d} = b\frac{a}{d}$이고 $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$가 서로 소인 것에서 최소공배수의 수학적 구조를 완벽하게 얻어낸 최초의 수학자가 되었다. 조선 수학의 업적으로 가장 뛰어난 결과중의 하나이다.

참고 문헌

1. 慶善徵, 《默思集算法》, 韓國科學技術史資料大系 數學編 卷一, 驪江出版社, 1985.
2. 김창일, 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學者 洪正夏의 系譜, 한국수학사학회지, 23(2010), No. 3, pp. 1–20.
3. 《中國科學技術典籍通彙》 數學卷 全五卷, 河南教育出版社, 1993.
4. 《中國歷代算學集成》, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
5. 홍성사, 홍영희, 김영욱, 劉益과 洪正夏의 開方術, 한국수학사학회지 24(2011), No. 1, pp. 1–13.
6. 홍성사, 홍영희, 김창일, 18世紀 朝鮮의 句股術, 한국수학사학회지 20(2007), No. 4, pp. 1–22.
7. 洪正夏, 《九一集》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編, 2卷, 驪江出版社, 1985.
8. K. Shen, J. N. Crossley, A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the mathematical Art*, Oxford Univ. Press, 1999.

홍성사 서강대학교 수학과
Department of Mathematics, Sogang University
E-mail: sshong@sogang.ac.kr

홍영희 숙명여자대학교 수학과
Department of Mathematics, Sookmyung Women's University
E-mail: yhhong@sookmyung.ac.kr

김창일 단국대학교 수학교육과
Department of Mathematical Education, Dankook University
E-mail: kci206@dankook.ac.kr