한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제3호 (2011년 8월), 77–94

정적분 기호 이해의 특징과 교수학적 전략

Comprehending the Symbols of Definite Integral and Teaching Strategy

최정현 Jeong-Hyun Choi

본 연구에서는 리만합의 극한식과 정적분 기호 각각의 구성 요소의 의미와 상호 관계에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보고, 이를 토대로 하여 정적분 기호 지도에 대한 교수학적 전략을 제안함으로써 학생들이 넓이, 부피를 나타내는 정적분 기호에 대한 올바른 심상을 형성할 수 있도록 하고자 한다. 이를 위하여 정적분 기호 탄생의 수학사적 배경과 교과서의 정적분 단원의 진술 내용을 살펴보았으며, 이를 토대로 고등학교 학생 70명을 대상으로 한 설문 조사를 분석하였다. 이 연구에서 학생들의 정적분 기호에 대한 이해의 층위를 5단계로 구분할 수 있었으며, 상위 단계일수록 학생들의 기호에 대한 심상이 정적분 기호 탄생의 역사와 관련 깊음을 알 수 있었다. 이러한 분석을 바탕으로 하여 정적분 기호 지도에 대한 교수학적 전략을 제안하였으며, 그 결과 학생들이 넓이, 부피를 구하는 정적분 기호들에 대한 올바른 심상을 형성할 수 있음을 알 수 있었다.

This study aims to provide a teaching strategy accommodating the symbols of the definite integral and guiding students through the meaning of notations in area and volume calculations, based on characterization as to how students comprehend the symbols used in the Riemann sum formula and the definite integral, and their interrelationship. A survey was conducted on 70 high school students regarding the historical background of integral symbols and the textbook contents designated for the definite integral. In the following analysis, the comprehension was qualified by 5 levels; students in higher levels of comprehension demonstrated closer relation to the history of integral notations. A teaching strategy was developed accordingly, which suggested more desirable student understanding on the concept of definite integral symbols in area and volume calculations.

Keywords: 정적분(Definite Integral), 정적분 기호(the Symbols of Definite Integral)

1 서론

수학을 학습하는 것은 여러 수학 기호의 의미를 파악하고, 수학 공동체에서 약속한 규칙을 올바르게 사용하고, 수학 기호를 통하여 정신적 능력을 발전시키며, 적절한 순간

MSC: 97C30, 97D40 ZDM: C34, D44
제출일: 6월 19일 수정일: 8월 11일 게재확정일: 8월 17일

에 다른 사람이 이해할 수 있도록 독창적인 기호를 생산하는 방법을 배우는 것이다([5]). 이러한 수학 기호는 정신적 실체의 형성과 적용을 지원하는 것은 물론 개념적 실체를 대신할 수도 있다. 수학자들은 자신이 갖고 있는 기존 개념들을 표현하고 정교화하기 위하여 기호를 만들었는데, 학교에서는 이러한 기호에 대한 심상(心象)들을 만들 수 있는 경험을 충분히 제공하기 전에 기호의 조작에 집중하는 경향이 많으며, 적분의 학습에서도 이러한 상황은 빈번히 나타난다([13]).

학교수학에서 추상성과 형식성이 강한 정적분은 분할한 것의 합에 극한을 취하여 전체를 구하는 리만합의 의미와 미분의 역연산으로서의 부정적분을 찾아 정적분을 계산하는 정적분의 기본정리의 의미가 동시에 포함되어 있다. 그런데, 학생들은 넓이나 부피 등을 구하는 과정에서 발달되어 온 정적분의 개념보다는 적분이 미분의 역연산이라는 사실을 이용한 정적분의 계산에 치중하고 있으며, 정적분의 본래 의미(넓이, 부피)를 소홀히 하고 있는 경향이 있다([7]). 이로 인하여, 많은 학생들이 정적분 기호 $\int_a^b f(x)dx$를 리만합의 극한으로서의 의미보다는 미분의 역연산인 부정적분을 찾아 계산하는 기호로 파악하고 있으며, 회전체의 부피를 구하는 기호 $\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$에 대하여는 아무런 심상 없이 단순 공식으로 암기하고 있는 학생들이 많다.

신보미([3])는 한국의 일반 학생들이 리만합의 극한보다는 넓이, 부정적분이 정적분과 더욱 관련 깊은 것으로 생각하고 있다고 하였고, Oberg([16])의 5명의 대학생의 정적분 개념 이해에 대한 면담 조사에서는 한 명만이 정적분을 리만합의 극한으로 설명하였다. 허학도([8])는 한국의 예비 대학생 42명 중 11명만이 정적분의 정의를 리만합의 극한으로 바르게 설명한다고 하였다. 또한, 정연준 · 강현영([6])은 고등학생들이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 무한소로 해석함을 설명하고 있다. 위의 연구들은 정적분 개념 정의에 대한 학생들의 어려움을 지적하거나, 정적분 개념의 이해에 대한 특징을 살펴보고는 있지만, 리만합의 극한을 나타내는 기호 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$와 정적분 기호 $\int_a^b f(x)dx$ 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호관계에 대한 학생들의 이해의 특징을 다루고 있지는 않으며, 정적분 기호 자체에 대한 심상을 만들 수 있는 교수학적 전략을 제안하고 있지는 않다. 이제껏 수학교육 연구에서 수학 기호는 수학적 아이디어를 나타내기 위한 수단과 도구 역할에 초점이 맞추어져 왔으며, 수학 기호 자체가 학습 대상이 되고 수학적 아이디어와 기호가 더불어 발전하는 교수 설계에 대한 연구는 등한시되어 왔다([1]).

이에 본 연구에서는 리만합의 극한식 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$와 정적분 기호 $\int_a^b f(x)dx$ 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호관계에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보고, 그것을 바탕으로 정적분 기호의 지도에 대한 교수학적 전략을 제안함으로써, 넓이와 부피를 나타내는 정적분 기호를 리만합의 극한으로 올바르게 이해할 수 있는 심상을

형성할 수 있도록 하는 데 목적이 있다. 수학 개념 지도에 있어서 학생들이 수학 기호에 대한 올바른 심상을 형성하도록 하는 것이 중요한 문제임을 감안할 때, 넓이, 부피를 나타내는 정적분 기호에 대한 심상 형성을 위한 교수학적 전략의 제안은 주요한 시사점을 줄 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 다음과 같은 연구 문제를 설정한다.

- 리만합의 극한식 $\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$와 정적분 기호 $\int_a^b f(x)dx$ 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호관계에 대한 학생들의 이해의 특징은 어떠한가?
- 정적분 기호 자체에 대한 심상을 형성할 수 있는 교수학적 전략은 무엇인가?
- 개발한 교수학적 전략은 넓이, 부피를 나타내는 정적분 기호에 대한 심상을 올바르게 형성할 수 있게 하는가?

이를 위하여 우선 정적분 기호 탄생과 관련된 수학적 아이디어의 역사적 배경을 살펴보고, 현행 교과서의 정적분 기호에 대한 진술 내용을 분석하였으며, 대구광역시 소재 D 고등학교 2학년 학생 70명을 대상으로 리만합의 극한 기호와 정적분 기호의 의미와 서로의 관계에 대한 설문 조사를 하였다. 이를 바탕으로 하여 정적분 기호에 대한 올바른 심상을 만들 수 있는 교수학적 전략을 제안, 적용하였으며, 그 결과를 면담 조사를 통하여 알아보았다. 본 연구는 대구의 D고등학교 2학년 학생 70명을 대상으로 하였으므로, 연구 결과를 일반화하는 데에 제한점이 있음을 밝히는 바이다.

2 이론적 배경

2.1 수학 기호의 이중성

수학 기호는 종이 위에 표시되어 있는 표현일 뿐 아니라, 그 표현이 지시하는 대상이 무엇인지에 대한 해석이 요구되는 역동적 대상이다([1]). Gray & Tall([12])은 수학기호는 '과정(process)'과 '개념(concept)'을 동시에 표상하는 이중적 성격을 가졌다고 하였다. 예를 들어 '3+4'는 3에 4를 더하는 계산의 의미와 가법(加法) 연산의 개념의 의미를 동시에 포함하고 있는데, 이러한 덧셈 기호의 이중적 성격이 학생들의 인지 과정에서 유연하게 상호작용하면서 학생들의 수학 학습에 도움이 되기도 하고, 장애가 되기도 한다고 하였다. 즉, 수학 기호가 지니고 있는 이중성(과정, 개념)이 학생의 인지 과정에서 이중적으로 제대로 작용을 할 때만이 학생들이 그 수학 기호가 지니고 있는 수학 개념에 대한 유연한 사고를 할 수 있으며, 수학 기호가 하나의 사고 가능한 개념(thinkable concept)이 된다고 하였다.

한편, Dubinsky([9])는 그의 APOS 이론에서 수학 개념 형성과 이해 과정에서 '과정(process)'과 '대상(object)'의 상호작용이 결정적 역할을 한다고 하였다. 수학 기호와

관련하여 APOS 이론을 살펴본다면, 수학 기호 사용의 반복 학습 및 그것을 통한 학습의 알고리즘화 되는 것을 '과정' 이라 하며, 이러한 과정을 통하여 수학 기호 조작에 대한 과정을 전체적으로 인식하고 수학적 개념을 형성하는 것을 '대상' 이라고 할 수 있다. 어떤 수학적 개념의 학습에서 어려움을 겪는 학생들은 그 개념의 '과정' 단계에 머물러 있다고 볼 수 있으며, 학습에서 성공한 학생들은 그 개념의 '대상' 단계에 도달했다고 볼 수 있다.

Gray & Tall([12]) 과 Dubinsky([9]) 의 주장에 비추어 볼 때, 정적분 기호 역시 '과정' 과 '개념', 또는 '과정' 과 '대상' 의 이중적 성격을 띠고 있다고 생각할 수 있다. 정적분 기호를 리만합의 극한값으로 인식하지 못한 채, 단순히 넓이를 나타내는 기호나 부정적분의 역연산으로서만 생각하고 있는 학생들은 정적분의 개념 학습에 있어서 '과정' 단계에 머물러 있다고 볼 수 있다. 이러한 학생들이 정적분 기호의 뜻을 리만합의 극한으로서 제대로 이해하고, 그 기호를 넓이, 부피를 구함에 있어 원리를 제대로 적용하며, 부정적분의 역연산으로서의 정적분 계산을 유창하게 해 낼 수 있는 '개념' 또는 '대상' 단계로 도달할 수 있도록 하는 것이 이 연구의 목적이다. 그러기 위해서는 정적분 기호 지도에 대한 교수학적 전략을 개발해야 하며, 그 개발을 위하여 정적분 기호에 대한 수학사적 분석과 교과서의 정적분 단원에 대한 내용의 분석이 필요하다.

2.2 정적분 기호 탄생의 역사

적분의 개념은 무한의 문제와 함께 고대 그리스 시대부터 그 유래를 찾을 수 있다. 현재의 적분법에 가장 근접한 방법을 사용한 Archimedes는 넓이 또는 부피를 구하는 데 있어서 그것을 매우 얇은 조각으로 가르는 '평형법(method of equilibrium)' 이라는 방법을 사용하여 구의 부피를 계산하였다([10]). 평형법이란 어떤 도형의 넓이와 부피를 찾기 위해서, 그것을 매우 얇고 평행한 가로 평면과 세로 평면으로 자르고 그 조각을 넓이와 무게중심을 이미 알고 있는 도형과 평형을 이루도록 주어진 지레의 한 끝에 매달아 평형을 이루게 하여 넓이나 부피를 구하는 방법이다. 이 방법은 Newton과 Leibnitz의 무한소 아이디어를 토대로 한 미적분학 창안의 전신이 되는 아이디어였다.

17세기에 이르러 Cavalieri는 도형의 넓이나 부피를 구함에 있어서 '불가분량의 방법(method of indivisibles)' 을 고안하였는데, 그는 선을 그 불가분량인 점의 집합으로, 면은 그 불가분량인 선의 집합으로, 입체도형은 그 불가분량인 단면의 집합으로 이루어진 것으로 간주하였다. 그의 방법은 넓이와 부피를 구하는 도구로 널리 사용되었으나 불가분량에 대한 모호한 개념과 길이가 없는 점이 모여 선이 되고 부피가 없는 면이 모여 입체도형을 이루게 되는, 즉 차원이 다른 도형을 혼용하는 문제로 인해 많은 논란을 일으켰다([2, 11]).

이러한 Cavalieri의 불가분량 아이디어는 Torricelli를 통하여 유럽의 수학자들에게 전파되었는데, 이 전파 과정에서 Cavalieri의 불가분량의 아이디어는 Torricelli의 불가분량의 아이디어로 변형되었다. Torricelli의 불가분량은 두께를 지니고 있고, 주어진 도형보다 한 차원 아래의 것이 아니라, 주어진 도형의 무한히 작은 부분이다. 즉 면의 불가분량은 한 변이 무한히 작은 직사각형이고, 입체의 불가분량은 두께가 한없이 작은 기둥으로 생각하였으며, Pascal, Wallis 등 불가분량을 지지한 수학자들이 다룬 불가분량은 Torricelli의 불가분량을 말하며, 이를 Cavalieri의 불가분량과 구분하여 무한소로 불렀다([15]).

Newton과 Leibnitz는 이러한 무한소의 아이디어들을 토대로 하여 미적분을 고안하였다. 특히, Leibnitz는 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 무한소를 이용하여 구할 수 있다고 하였다. 그는 선을 1차원의 넓이가 없는 선이 아니라 아주 작은 폭을 가지는 사각형으로 생각했으며, 넓이를 무한소량의 넓이를 가지는 직사각형의 합으로 이해하였다. 즉, 넓이를 무한소량의 넓이를 가지는 직선의 합으로 이해하여 직선을 합하여 구할수 있다고 하였다([14]).

무한소에 대한 직관적 아이디어로 미적분학을 확립한 Leibnitz는 미적분학의 여러 가지 기호화를 시도했으며, 매우 실용적이고 편리한 표기법을 도입하였다. 그는 오늘날까지 사용하고 있는 미분학의 적절한 기호를 고안해 냈을 뿐 아니라 현대적인 적분기호도 도입하였다.

Leibnitz는 무한소의 합을 묘사하는 라틴어 summa의 첫글자로부터 유래된 s에 따라 현재의 적분기호 $\int$을 처음 사용했으며, $\int f(x)dx$를 무한소량과 함숫값의 곱의 합으로 생각하였다.

이와 같이, 정적분 기호는 형식적인 극한의 정의에 기반한 현대의 정적분의 정의와 달리 무한소에 대한 직관적 통찰을 바탕으로 하여 탄생되었다.

이후, 19세기에 이르러 Cauchy에 의하여 극한과 연속의 개념이 $\epsilon - \delta$를 사용하여 엄밀하게 정의되고, Weierstrass와 Riemann의 실수 체계의 엄밀화 작업을 통하여 미적분학의 산술화가 이루어지며, 현대의 정적분의 형식적 정의가 탄생하게 된다.

위에서 살펴본 바와 같이 극한의 형식적 정의와 실수 체계의 엄밀화 작업이 이루어지기 전까지의 정적분의 개념은 직관적 통찰에 바탕을 둔 무한소와 밀접한 관계가 있었으며, 정적분 기호 자체에도 수학자의 그러한 아이디어가 숨어있음을 알 수 있다. 이러한 정적분 기호의 탄생의 역사는 학교수학에서 학생들의 정적분 기호 이해에 대한 특징을 분석하는 데 중요한 지침이 될 수 있으며, 정적분 기호에 대한 학생들의 심상을 형성하는 교수학적 전략을 세움에 있어서도 큰 역할을 할 수 있다.

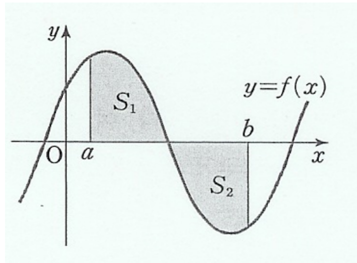

그림 1: $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$

2.3 교과서의 정적분 단원 분석

고등학교 교과서에서 정적분은 '정적분', '정적분의 활용' 의 두 중단원으로 구성되어 있다.

'정적분' 중단원에서 정적분의 정의는 구분구적법의 아이디어를 일반화한 리만합의 극한을 통하여 정의된다. 정적분을 리만합의 극한으로 정의한 후, $f(x) \geq 0$이면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선으로 둘러싸인 넓이를 나타내며, $f(x)$가 <그림 1>과 같이 양, 음의 값을 모두 가지면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 x축의 위쪽의 넓이 S_1에서 x축의 아래쪽의 넓이 S_2를 뺀 값을 나타낸다고 설명하고 있으며, 그 이유에 대하여는 구체적으로 언급하고 있지 않다([4]).

정적분의 정의에 대한 설명 후, 정적분의 기본정리를 통하여 학생들이 정적분의 계산을 부정적분을 구하여 계산할 수 있도록 설명하고 있으며, 정적분의 성질[1)]을 모두 정적분의 기본정리를 사용하여 증명하고 있다.

한편, '정적분의 활용' 중단원에서는 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 및 입체도형과 회전체의 부피를 구할 수 있도록 하고 있다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $f(x) \geq 0$일 때 $\int_a^b f(x)dx$이고, $f(x) \leq 0$일 때는 <그림 2>와 같이 $y = f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 $y = -f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a, x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같다고 설명하고 있다. 따라서, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a, x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$라고 설명하고 있다.

위에서 살펴본 바와 같이, 고등학교 교과서에서는 정적분의 정의를 도입할 때에만 구분구적법의 아이디어를 일반화한 리만합의 극한을 소개할 뿐이며, 그 후의 정적분과 관계된

1) 정적분의 성질

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

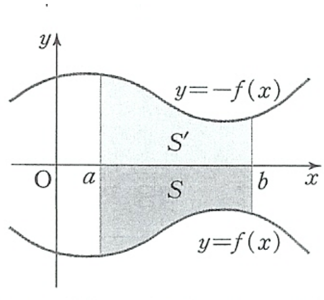

그림 2: $f(x) \leq 0$ 일 때 $\int_a^b |f(x)|dx$

설명은 부정적분의 역연산을 이용하여 설명하거나 넓이를 이용하여 설명하고 있다. 따라서, 일반학생들은 정적분 단원의 도입부에서 정적분의 정의를 리만합의 극한으로 학습함에도 불구하고 정적분의 정의를 넓이 또는 부정적분의 역연산으로 이해하고 있는 경우가 많다 ([3]).

한편, '정적분의 활용' 중단원에서 입체도형의 부피와 회전체의 부피를 구하는 방법을 설명할 때, 다시 리만합의 극한의 개념을 도입하여 설명하고 있다.

그러나, 정적분을 이미 넓이나 부정적분의 역연산으로 이해하고 있는 많은 학생들은 입체도형의 부피를 구하는 리만합의 극한 과정을 제대로 이해하지 못한 채, 그 결과인 공식 $\int_a^b S(x)dx$ 를 암기하고 있으며, 회전체의 부피 구하는 공식 $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 또한 그 원리는 이해하지 못한 채, 그 결과만을 암기하고 있는 학생들이 많다.

이에 본 연구에서는 학생들의 정적분 기호과 리만합의 극한식의 상호 관계에 대한 학생들의 이해의 특징을 알아보고, 정적분 기호에 대한 수학사적 분석과 교과서 내용 분석을 바탕으로 하여 정적분 기호 지도에 대한 교수학적 전략을 제안하여 넓이, 부피를 나타내는 정적분 기호에 대한 학생들의 올바른 심상을 형성시키고자 하는 것이다.

3 연구 방법

3.1 연구 대상

본 연구는 2010년 3월부터 2011년 2월까지 연구자가 1년 동안 지도한 대구의 D고등학교 2학년의 2개 반 70명을 대상으로 하였다.

70명의 학생 모두 자연계열에 속해 있는 학생들이며, 7차 개정 교육과정의 '적분과 통계' 과목을 2010년 9월부터 2011년 2월까지 6개월에 걸쳐서 이수한 학생들이다. 70명의 학생들의 성적분포를 알아보기 위하여 2010년 9월 한국의 인문계 고등학교 2학년 전체 학생들을 대상으로 실시된 교육청 주관 전국연합학력평가에서 받은 수학 성적을 근거로 하여

백분위	상위10%이내	10～20%	20～30%	30～40%	40～50%
인원수	26명	12명	19명	10명	3명

표 1: 전국연합학력평가에서의 70명의 학생들의 성적분포

<표 1>과 같이 분석하였다.

<표 1>에서 알 수 있듯이, 70명의 학생들 모두 전국의 인문계 고등학교 2학년 학생들 중 상위 50% 내에 속하며, 그 중 상위 10% 내에 26명이 속해 있는 우수 집단이다. 본 연구에서는 70명의 학생들을 대상으로 하여 리만합의 극한식과 정적분 기호 각각의 구성 요소의 의미와 상호 관계에 대한 이해의 특징을 조사하기 위하여 설문 조사를 실시하며, 설문 조사의 분석을 통하여 학생들의 정적분 기호에 대한 이해의 특징을 알아보고, 이해의 층위를 구분한다.

3.2 연구 절차

설문 조사 및 이해 특징 분류

70명의 학생들을 대상으로 설문 조사를 실시하고, 그 결과를 분석한다. 설문 문항은 다음과 같다.

(1) 등식 $\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$에 대하여 좌변의 각각의 기호와 같은 의미로 대응된다고 생각하는 우변의 기호를 짝짓고, 각 기호가 의미하는 바에 대한 자신의 생각을 적으시오.

(2) $\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$를 구성하고 있는 각각의 기호의 의미와 식 전체가 뜻하는 바에 대한 자신의 생각을 적으시오.

설문지의 (1)번 문항은 리만합의 극한식과 정적분 기호 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호관계에 대한 학생들의 이해의 특징을 알아보기 위한 것이다. 이 문항의 분석을 통하여 학생들의 정적분 기호에 대한 심상의 형태를 알아보고, 그 이해의 층위를 분류한다.

설문지의 (2)번 문항은 (1)번 문항에서 나타난 학생들의 정적분 기호 $\int_a^b f(x)dx$에 대한 심상이 회전체의 부피를 구하는 기호 $\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$의 이해에 어떤 영향을 미치고 있는가를 알아보기 위한 것이다.

즉, 설문 조사의 분석을 통하여 학생들의 정적분 기호에 대한 이해의 특징 및 이해의 층위를 분류하고, 정적분 기호의 이해에 따른 회전체의 부피를 구하는 기호에 대한 이해의 상호 관계에 대하여 살펴본다.

교수학적 전략의 개발 및 적용

설문 조사 결과에서 나타난 학생들의 정적분 기호에 대한 이해의 층위 중 회전체의 부피를 구하는 기호에 대한 아무런 심상이 없는 이해 층위의 학생들을 대상으로 한 교수학적 전략을 개발한다. 이를 위하여 정적분 기호 탄생의 수학사적 배경을 분석하고, 현행 교과서의 정적분 단원 내용을 분석한다. 또한, 회전체의 부피를 구하는 기호에 대한 심상이 제대로 형성되어 있는 학생들의 정적분 기호에 대한 심상이 어떠한 것인지를 파악한다. 이러한 것들을 바탕으로 하여 정적분 기호 지도에 대한 교수학적 전략을 제안하고, 그 전략을 회전체의 부피를 구하는 기호에 대한 아무런 심상이 없는 이해 층위의 학생들을 대상으로 하여 적용한다.

면담 조사

개발된 교수학적 전략을 회전체의 부피를 구하는 기호에 대한 아무런 심상이 없는 이해 층위의 학생들을 대상으로 하여 적용 후, 각 학생들을 대상으로 하여 면담을 실시하여 회전체의 부피를 구하는 기호 $\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 와 입체도형의 부피를 구하는 기호 $\int_a^b S(x)dx$ 의 각 구성요소들의 의미에 대하여 설명하게 하고, 각 기호에 대한 학생들의 심상이 어떻게 형성되었는지를 알아본다.

4 연구 결과

4.1 학생들의 정적분 기호에 대한 이해

리만합의 극한식과 정적분 기호 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호관계에 대한 학생들의 이해를 알아보기 위한 설문 문항 (1) 에 대한 응답 결과는 <표 2> 와 같다.

응답 결과에 따르면, 리만합의 극한식과 정적분 기호에서 같은 의미끼리 대응되는 것끼리 전혀 짝짓지 못하면서 각 기호에 대한 아무런 의미를 갖지 않는 학생이 5명이었으며, 전국 성적 상위 35∼50%의 학생들이었다. 이 학생들은 정적분 기호에 대한 아무런 심상이 형성되어 있지 않음을 알 수 있으며, 정적분 기호를 리만합의 극한과 연관 짓지 못하고, 부정적분의 역연산으로서 이해하고 있음을 알 수 있다.

상위 20∼40%에 해당하는 학생 중 15명은 리만합의 극한식과 정적분 기호에서 같은 의미끼리 대응되는 것끼리 짝 지었으나, 각 기호에 대한 아무런 의미를 갖지 않았다. 이들 역시 정적분 기호에 대한 구체적 심상은 형성되어 있지 않음을 알 수 있다.

한편, 상위 10∼30%에 해당하는 학생 중 23명은 정적분을 함숫값의 합으로 인식하고 있으며, dx 를 'x 에 대하여' 로 해석하고 있었다. dx 를 'x 에 대하여' 로 해석하는 것은 정적분을 부정적분의 역연산으로 생각하고 있는 것의 영향으로 파악되며, 정적분을 넓이의

문항	같은 의미 짝짓기	각 기호의 의미	인원	전국성적
1	$\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n} \Leftrightarrow \int_a^b$, $f(x_k) \Leftrightarrow f(x)$, $\Delta x \Leftrightarrow dx$	$\int_a^b$: 직사각형 합, $f(x)$: 직사각형높이, dx : 직사각형의 폭	15	상위 10%이내
	$\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n} \Leftrightarrow \int_a^b$, $f(x_k) \Leftrightarrow f(x)$, $\Delta x \Leftrightarrow dx$	$\int_a^b$:$f(x)$ 의 합, $f(x)$:함수식, dx: x를 무한히 잘게 나눈다	12	상위 5 ~20%
	$\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n} \Leftrightarrow \int_a^b$, $f(x_k) \Leftrightarrow f(x)$, $\Delta x \Leftrightarrow dx$	$\int_a^b$:$f(x)$ 의 합, $f(x)$:함수식, dx: x에 대하여	23	상위 10 ~30%
	$\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n} \Leftrightarrow \int_a^b$, $f(x_k) \Leftrightarrow f(x)$, $\Delta x \Leftrightarrow dx$	모르겠음	15	상위 20 ~40%
	짝짓지 못함	모르겠음	5	상위 35 ~50%

표 2: 설문 문항 (1) 에 대한 응답 결과

합이 아닌 함숫값의 합으로 생각하고 있는 것으로 보아 리만합의 극한식에서 $f(x_k)$와 Δx 의 곱의 구조를 파악하지 못한 채, $f(x_k)$의 합으로 인식하고 있음을 알 수 있다. 즉, 이 학생들의 정적분 기호에 대한 심상은 부정적분의 역연산과 리만합의 극한식에 대한 부족한 인식들이 혼재되어 있음을 알 수 있다.

상위 5~20%에 해당되는 학생 중 12명은 정적분을 함숫값의 합으로 인식하고 있으며, dx를 'x를 무한히 잘게 나눈다' 로 해석하고 있었다. 즉, 이 학생들은 정적분 기호를 불가분량의 합으로 인식하고 있지만, 리만합의 극한식에서 곱의 구조를 정확하게 파악하고 있지 않음을 알 수 있다. 상위 10% 이내에 해당되는 학생 중 15명은 정적분을 직사각형의 넓이의 합으로 인식하고 있으며, $f(x)$를 '직사각형의 높이', dx를 '직사각형의 폭' 으로 해석하고 있었다. 즉, 이 학생들은 정적분 기호를 무한소의 합으로 인식하고 있으며, 리만합의 극한에서의 곱의 구조를 정확하게 이해하고 있음을 알 수 있다. 설문 문항 (1) 의 결과를 살펴보면, 전국 상위 10% 이내의 학생들은 정적분 기호를 무한소의 합으로 해석하고 있으며, 리만합의 극한을 곱의 합 구조로 인식하고 있었다. 전국 상위 5~20% 이내의 학생들은 정적분 기호를 불가분량의 합으로 인식하고는 있지만, 리만합의 극한식을 곱의 합 구조로서 제대로 인식하고 있지는 못하였다. 그 외의 학생들은 정적분 기호를 부정적분과 연관 지어 생각하고 있거나 특별한 심상 없이 단순히 정적분의 계산에만 치중하고 있다는 것을 알 수 있다. 특히, Δx와 dx를 서로 관련 있는 기호로 생각하면서도 dx를 'x에 대하여' 란 뜻으로 생각하거나, 아무런 의미를 부여하지 않는 학생이 70명 중 43명이나 되었다. 이는 Gray & Tall([12]) 과 Dubinsky([9]) 가 주장한 수학 개념의 이해에서의 '과정 (process)' 단계에

해당한다고 볼 수 있으며, 정적분 기호를 무한소의 합으로 인식하면서 리만합의 극한식을 곱의 합 구조로 이해하고 있는 학생들은 '개념 (concept)' 또는 '대상 (object)' 단계에 도달한 학생이라고 볼 수 있다.

'과정' 단계에 있는 학생들이 정적분 기호를 함숫값의 합으로 인식하는 것은 리만합의 극한식에서 $f(x_k) \times \Delta x$ 를 곱의 구조로 인식하지 못하는 것에 기인하는 것이다. 즉, 많은 학생들이 리만합을 곱의 합이 아닌 단순히 $f(x_k)$ 의 합으로 인식하고 있다는 것을 알 수 있다. 따라서, 정적분 기호의 지도를 위한 교수학적 전략을 세울 때에도, 이 부분은 중요하게 고려되어야 할 것이다.

한편, 설문 문항 (2) 에 대한 결과는 크게 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

설문 문항 (1) 에서 정적분 기호를 무한소의 합으로 대답한 학생 15명 (상위 10% 이내) 은 기호 $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 를 좁은 폭의 원기둥의 부피의 합으로 대답하였으며, $\pi\{f(x)\}^2$ 을 '원기둥의 밑면의 넓이', dx 를 '원기둥의 높이' 로 해석하였다. 또한, 설문 문항 (1) 에서 정적분 기호를 불가분량의 합으로 대답한 학생 12명 (상위 5∼20%) 은 기호 $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 를 원의 넓이의 합으로 대답하였으며, $\pi\{f(x)\}^2$ 을 '원의 넓이', dx 를 'x 를 무한히 잘게 나눈다' 로 해석하였다.

이 외의 43명의 학생들은 기호 $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 를 회전체의 부피를 구하는 공식으로만 인식할 뿐이며, 이 기호를 구성하고 있는 각각에 대한 의미 또한 부여하지 않았다.

설문 문항 (1), (2) 의 응답 결과를 분석한 결과, 상위 학생일수록 정적분 기호를 불가불량 또는 무한소의 합으로 해석하며, 리만합의 극한식을 곱의 합 구조로 이해하고 있음을 알 수 있었다. 한편, 일반 학생들은 정적분 기호를 부정적분의 역연산으로 해석하고 있거나, 리만합의 극한식을 곱의 합 구조로 이해하지 못하고 있으며, 정적분 기호에 대한 특별한 심상 없이 단순 계산에만 치우쳐 있다는 것을 알 수 있었다. 즉, 상위 학생들의 정적분 기호에 대한 심상은 이 기호를 처음 고안해 낸 Leibnitz의 아이디어와 일치한다는 것을 알 수 있으며, 고등학생들이 정적분 기호를 이해함에 있어서 무한소의 합에 의한 해석과 함께 곱의 합 구조로 해석하는 것이 수학 개념의 이해에서 Gray & Tall의 '대상' 단계 또는 Dubinsky의 '개념' 단계에 도달한 상태라는 것을 알 수 있다. 이는 정적분 기호 지도를 위한 교수학적 전략을 세움에 있어서 큰 의미를 부여할 수 있다.

한편, 정적분 기호에 대한 심상이 형성되어 있는 학생은 회전체의 부피를 구하는 기호에 대하여도 적절한 심상이 형성되어 있는 것을 알 수 있었으며, 정적분 기호에 대한 심상이 적절히 형성되어 있지 않는 학생은 회전체의 부피를 구하는 기호에 대해서도 적절한 심상 없이 단순 공식으로 암기하고 있다는 것을 알 수 있었다.

4.2 정적분 기호 지도를 위한 교수학적 전략의 제안 및 적용

설문 조사의 분석을 통해서 알 수 있듯이, 많은 학생들은 리만합을 $f(x_k)$와 Δx의 곱의 합으로 인식하지 못한 채 $f(x_k)$의 합으로 인식하고 있으며, 이러한 인식으로 인하여 많은 학생들이 정적분 기호에 대한 심상 역시 함숫값의 합으로 생각하고 있는 경우가 많았다. 또한, 이로 인하여 Δx와 dx가 서로 관련 있는 기호라는 것을 알면서도 dx를 'x에 대하여'로 인식하거나 아무런 의미를 부여 못하고 있는 상황이다.

이와 같이, 리만합을 곱의 합으로 인식하지 못하는 이유는 교과서의 내용 분석에서 찾을 수 있다. 교과서의 도입부에서 정적분의 뜻을 리만합의 극한으로 정의하지만, 그 이후로는 리만합의 극한으로 정적분을 생각할 수 있는 상황이 거의 없으며, 특히 Δx의 의미에 대하여 생각해 볼 수 있는 상황 또한 교과서에서 찾아볼 수 없다. 이러한 것들이 학생들이 리만합에 대한 올바른 심상을 형성하지 못하게 하는 원인이 될 것이다.

한편, 교과서의 논리적이고 연역적인 진술에만 의존하여 정적분 기호를 지도하는 것 이외에도, 정적분 기호를 처음 만들어 낸 Leibnitz의 아이디어를 학생들에게 소개하여 그 기호에 대한 자연스러운 심상이 형성되도록 하는 것 또한 중요할 것이다. 전국 성적 상위 10% 이내의 학생들은 교과서에 나타나지 않는 방식으로 자연스럽게 정적분 기호에 대한 직관적인 무한소 해석을 하고 있으며, 이것은 그 기호를 만들어 낸 Leibnitz의 생각과 일치하고 있음도 앞에서 살펴보았다.

위에서 살펴본 것처럼, 정적분 학습에서 리만합의 Δx에 대한 의미 있는 지도와 정적분 기호 탄생의 수학사적 의미를 살펴보는 것이 정적분 기호에 대한 적합한 심상을 형성하도록 하는 데 중요하다는 것을 알 수 있다. 따라서, 정적분 기호에 대한 교수학적 전략을 다음과 같이 세울 수 있다.

교과서의 정적분 정의의 도입부에서 정적분을 리만합의 극한으로 정의한 후, $f(x) \geq 0$이면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선으로 둘러싸인 넓이를 나타내며, $f(x)$가 양, 음의 값을 모두 가지면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 x축의 위쪽의 넓이 S_1에서 x축의 아래쪽의 넓이 S_2를 뺀 값을 나타낸다고 설명하고 있으며, 그 이유에 대하여는 구체적으로 언급하고 있지 않다.

이 부분을 지도할 때, $f(x)$가 양이면 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$에서 $f(x_k)$가 양, Δx도 양이므로 리만합의 극한값이 양수가 됨을 알게 한다. 또한, $f(x)$가 음이면 <그림 3>과 같이 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$에서 $f(x_k)$가 음, Δx가 양이므로 리만합의 극한값이 음수가 되어 정적분의 값이 음수가 됨을 알게 하는 것이 리만합의 극한에 의한 자연스러운 이해가 될 수 있을 것이다.

또한, 정적분의 정의 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$를 소개할 때에도 직사각형의 폭을 나타내는 Δx가 $n \to \infty$일 때, dx로 대응됨을 학생들이 인식할 수 있도록 한다. 그리고, 이 기호를 만들어 낸 Leibnitz의 아이디어를 소개하여 정적분 기호를 구성하고 있는 각

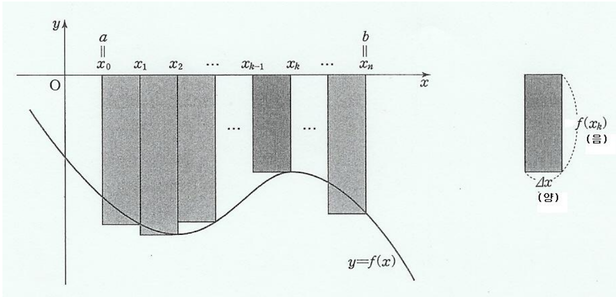

그림 3: $f(x) \le 0$일 때 리만합의 극한과 정적분 값의 관계

구성 요소에 대한 자연스러운 심상히 형성될 수 있도록 한다.

한편, 교과서에서는 등식 $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$를 정의로 소개하고 있다. 교사들은 이 등식을 학생들에게 소개할 때, 단순히 정의로 소개할 것이 아니라 내면에 숨어있는 그 의미에 대하여 학생들에게 다음과 같이 지도하여야 할 것이다.

등식 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^n f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$에서 Δx는 $\frac{b-a}{n}$인데, 정적분의 아래끝, 위끝이 바뀌게 되면 리만합의 극한식에서 Δx가 $\frac{a-b}{n}$이 되어 Δx의 부호가 바뀌게 된다는 것을 학생들에게 설명한다. 이를 통하여 학생들이 Δx가 직사각형의 폭을 나타낼 뿐만 아니라, 양, 음의 의미를 지니고 있다는 것을 알게 하며, 리만합을 곱의 구조로서 다시금 인식할 수 있게 하는 계기가 될 것이다.

그리고, 교과서에서 정적분의 성질을 증명할 때, 정적분의 기본 정리를 이용하여 부정적분의 역연산으로 증명하고 있다. 그러나, 학생들은 Σ기호의 선형성을 수열 단원에서 이미 학습하여 알고 있으므로, 리만합의 극한식을 이용하여 증명할 수 있을 것이다.

예를 들면, 교과서에서 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$의 증명을 다음과 같이 하고 있다.

$$\int_a^b kf(x)dx = [kF(x)]_a^b = k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(x)dx$$

이 등식을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^n kf(x_i)\Delta x = k\lim \Sigma_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)dx$$

이러한 증명 방법을 통하여 정적분 기호를 단순히 부정적분의 역연산이 아닌 리만합의 극한으로 다시 생각해 볼 수 있는 계기가 될 것이다. 한편, 교과서에서는 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 방법을 다음과 같이 설명하고 있다.

(i) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 $0 \le g(x) \le f(x)$일 때, 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

(ⅱ) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 $g(x) \le f(x)$이고, $f(x)$또는 $g(x)$가 음의 값을 가질 때, <그림 4>와 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 적당히 k만큼 평행이동하여 $0 \le g(x)+k \le f(x)+k$가 되게 할 수 있다.

평행이동하여도 구하는 도형의 넓이는 변하지 않으므로 S는 다음과 같다.

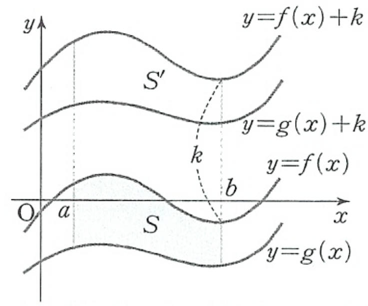

그림 4: $S = \int_a^b \{f(x)+k\}dx - \int_a^b \{g(x)+k\}dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

(ⅲ) <그림 5>와 같이 닫힌 구간 $[a,c]$에서 $g(x) \le f(x)$이고, 구간 $[c,b]$에서 $f(x) \le g(x)$일 때, S는 다음과 같다.

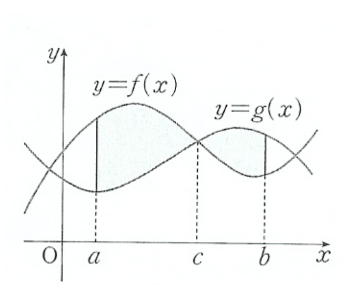

그림 5: $S = \int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$

교과서에서는 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 설명할 때, 위에서와 같이 3가지 경우로 나누어서 설명하고 있다. 이것은 정적분 기호를 단순히 넓이를 나타내는 기호로만 인식하게 할 뿐이며, 리만합의 극한에 의한 그 원리를 생각하게 할 수 없는 방법이다.

따라서, 이 부분 역시 <그림 6>과 같이 설명하는 것이 훨씬 간단하며, 리만합의 극한에 대한 원리를 다시 생각해 볼 수 있는 계기가 될 것이다.

<그림 6>과 같이, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 리만합의 형태로 생각하게 하면, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} |f(x_k)-g(x_k)|\Delta x = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$가 되며, 기존의 교과서에서 진술된 것처럼 세 가지 경우로 나눌 필요가 없으며,

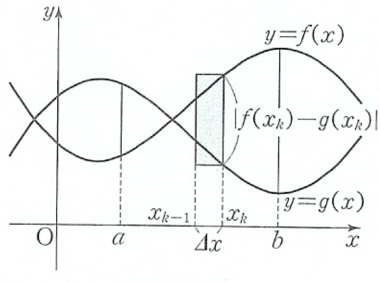

그림 6: $\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n}|f(x_k)-g(x_k)|\Delta x=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

정적분 기호에 대한 심상을 리만합의 극한으로 자연스럽게 형성할 수 있을 것이다.

이상과 같이 정적분 기호의 지도를 위한 교수학적 전략을 제안하며, 이 방법을 학생들에게 적용하였다. 적용 대상은 설문 문항 (1)에서 리만합의 극한식과 정적분 기호에서 같은 의미끼리 대응되는 것끼리 전혀 짝짓지 못하면서 각 기호에 대한 아무런 의미를 갖지 않은 5명의 학생이며, 이 학생들의 동의를 구한 후, 약 1시간 동안 위의 방법으로 정적분 기호에 대한 설명을 하였다.

4.3 면담 조사 결과

리만합의 극한식과 정적분 기호에서 같은 의미끼리 대응되는 것끼리 전혀 짝짓지 못하면서 각 기호에 대한 아무런 의미를 갖지 않은 5명의 학생을 대상으로 한 정적분 기호에 대한 설명을 마친 후, 5명을 대상으로 개별 면담을 실시하였다. 면담에서 회전체의 부피를 구하는 기호 $\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$와 입체도형의 부피를 구하는 기호 $\int_a^b S(x)dx$의 각 구성요소들의 의미에 대하여 설명하게 하고, 각 기호에 대한 학생들의 심상이 어떻게 형성되었는지를 알아보았다. 5명 모두 회전체의 부피를 구하는 기호와 입체도형의 부피를 구하는 기호를 리만합의 극한과 관련하여 설명할 수 있었으며, 정적분 기호 $\int_a^b f(x)dx$에 대한 심상을 이용하여 기호 $\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$, $\int_a^b S(x)dx$들을 이해하였다. 다음은 5명의 학생 중 학생 A와의 면담 내용의 일부분이다.

교 사 : 입체도형의 부피를 구하는 식 $\int_a^b S(x)dx$를 알고 있나요?

학생 A : 네, 알고 있습니다.

교 사 : $\int_a^b S(x)dx$라는 기호를 이전에는 어떻게 이해하고 있었나요?

학생 A : 그냥 공식으로만 외웠고, 그 뜻에 대해서는 생각해 보지 않았습니다.

교 사 : 지금은 식 $\int_a^b S(x)dx$의 의미에 대하여 알겠나요?

학생 A : 네. $\int_a^b f(x)dx$ 의 뜻을 그대로 적용하면 될 것 같습니다. $S(x)$가 단면의 넓이이고, dx는 좁은 폭을 나타내니까 $S(x)dx$는 단면 넓이와 높이를 곱하는 거니까 부피라고 생각합니다.

교 사 : 그래서요?

학생 A : 정적분이 아주 좁은 폭의 도형을 무한히 합하는 거니까, 좁은 폭의 도형의 부피를 모두 합하면 구하는 입체도형의 부피가 되는 것 같습니다.

교 사 : 네, 잘했습니다. 그럼, $\int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$에 대해서도 설명할 수 있을까요?

학생 A : 네, 회전하면 단면이 원이 되고, 원의 넓이는 πr^2 이라서 $\pi\{f(x)\}^2$ 인 것 같습니다.

교 사 : 그래서요?

학생 A : dx는 아주 좁은 폭의 높이니까, $\pi\{f(x)\}^2 dx$가 원기둥 부피가 되고, 그것들을 다 합하면 회전체 부피가 된다고 생각합니다.

교 사 : 잘 했습니다. 이전에는 이런 방식으로 생각한 적이 전혀 없나요?

학생 A : 이전에는 이렇게 생각한 적 없습니다. 그리고, 이런 방식으로 생각하니까 정적분에 대하여 잘 이해가 되는 것 같습니다.

면담 내용에서 알 수 있듯이, 제안된 교수학적 전략을 통하여 설명을 들은 학생들은 입체도형의 부피와 회전체의 부피를 구하는 기호를 리만합의 극한과 관련된 방식으로 해석할 수 있게 되었으며, 그 기호들에 대한 적절한 심상이 형성되는 것을 알 수 있었다.

5 결 론

본 연구는 리만합의 극한식과 정적분 기호 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호관계에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보고, 그것을 바탕으로 정적분 기호의 지도에 대한 교수학적 전략을 제안함으로써, 넓이와 부피를 나타내는 정적분 기호를 리만합의 극한으로 올바르게 이해할 수 있는 심상을 형성할 수 있도록 하는 데 목적이 있다. 이를 위하여 정적분 기호 탄생의 수학사적 배경을 살펴보고, 현행 교과서의 정적분 단원 진술을 분석하였다. 설문 조사는 고등학교 2학년 학생 70명을 대상을 진행하였으며, 학생들의 정적분 기호에 대한 이해의 특징은 다음과 같다.

첫째, 상위 학생이 아닌 일반 학생들은 정적분 기호와 리만합의 극한식의 각각의 구성 요소의 의미와 두 기호의 상호 관계를 제대로 알지 못했으며, 정적분 기호를 부정적분의 역연산으로 이해하고 있었으며, 회전체의 부피를 구하는 공식에 대하여도 리만합의 극한으로서의 이해 없이 단순 공식으로 암기하고 있음을 알 수 있었다.

둘째, 중상위 학생들은 정적분 기호와 리만합의 극한의 상호 관계에 대하여 말할 수 있었으나, 리만합을 $f(x_k)$와 Δx의 곱으로 인식하지 못한 채 $f(x_k)$의 합으로 인식하는 경향이 있었으며, 정적분 기호에 대한 심상은 함숫값의 무한합과 부정적분의 역연산에 대한 개념이 혼재된 것이었다.

셋째, 상위 학생들은 정적분 기호와 리만합의 극한의 상호 관계에 대하여 말할 수 있었으며, 리만합을 $f(x_k)$와 Δx의 곱으로 인식하고 있었다. 또한, 정적분 기호에 대한 심상도 무한소의 합으로 형성되어 있었다.

이상의 설문 조사의 결과와 정적분 기호의 수학사적 의미, 교과서의 정적분 단원 분석을 바탕으로 하여 정적분 기호 지도를 위한 교수학적 전략을 세웠다. 이러한 교수학적 전략을 리만합의 극한식과 정적분 기호에서 같은 의미끼리 대응되는 것끼리 전혀 짝짓지 못하면서 각 기호에 대한 아무런 의미를 갖지 않은 5명의 학생들에게 적용하여 보았다. 적용 후, 5명의 학생들과 개별 면담을 실시하였으며, 면담 결과 단순 공식으로 암기하고 있던 회전체의 부피와 입체도형의 부피를 구하는 정적분 기호를 리만합의 극한과 관련된 방식으로 해석할 수 있음을 알 수 있었다.

본 연구는 정적분 기호에 대한 학생들의 이해의 특징을 분석하고, 이를 바탕으로 하여 정적분 기호 지도에 있어서의 교수학적 전략의 제안을 통해 정적분 기호 이해에 있어서 과정 (process) 단계—정적분 기호 계산에 치중되어 있는 상태—에 머물러 있는 학생들을 개념 (concept) 또는 대상(object)의 단계로 끌어올릴 수 있었음을 알 수 있었다. 이상의 연구 결과는 대구광역시 소재 자연계열 고등학생 70명을 대상으로 한 것으로 이를 전체 고등학생들에 일반화 하는 데에는 한계가 있다. 그러나, 이 연구는 고등학생들을 대상으로 한 정적분의 개념 지도를 위한 교수학적 전략을 세우는 데 기여할 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 김선희 · 이종희. 「수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입 방법」. 학교수학, 4(4), 2002. 539–554.
2. 김용운 · 김용국. 『수학사의 이해』, 서울; 우성. 1997.
3. 신보미. 「고등학생들의 정적분 개념 이해」. 학교수학 11(1), 2009. 93–110.
4. 우정호 · 박교식 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 임재훈 · 이정아 · 김민경. 『고등학교 적분과 통계』. 서울: (주)두산동아. 2009.
5. 이성무. 『수학교육에서 기호의 의미와 도입에 대한 고찰』. 경성대학교 교육대학원 석사논문. 2007.
6. 정연준 · 강현영. 「정적분의 무한소 해석에 대한 고찰」. 학교수학, 10(3), 2008. 375–399.
7. 정창택. 『역사발생적 원리에 의한 적분단원의 재구성에 관한 연구』. 경남대학교 교육대학원 석사논문. 2006.
8. 허학도. 『직사각형 넓이의 공식의 이해와 인식론적 장애』. 서울대학교 대학원 석사학위논문. 2006.

9. Dubinsky, E., Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 류희찬, 조완영, 김인수 (공역) (2002), 고등수학적 사고. 서울: 경문사. 1991.
10. Eves, H., *Great Moments in Mathematics*, 『수학의 위대한 순간들』, 허민 · 오혜영 옮김, 경문사. 1994
11. Eves, H., *An introduction to the history of mathematics*, 『수학사』, 이우영 · 신항균 옮김, 경문사. 1995
12. Gray, E. M. & Tall, D. O., Duality, Ambiguity and Flexibility: A Process View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 1994. 115–141.
13. Harel, G. & Kaput, J., The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concept. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 류희찬, 조완영, 김인수 (공역) (2002), 고등수학적 사고. 서울: 경문사. 1991.
14. Knobloch, E., Leibnitz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums. *Synthese*, vol. 133(1-2), 2002. 59–73.
15. Malet, A., *From indivisibles to infinitesimals : studies on seventeenth-century mathematizations of infinitely small quantities*, Universitat Autonoma de Barcelona, Servei de Publications. 1996.
16. Oberg, T., *An investigation of undergraduate calculus student's conceptual understanding of the definite integral*. Doctoral Dissertation, The University of Montana. 2000.

최정현 대륜고등학교
Daeryun High School
E-mail: goora90@hanmail.net