한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제3호 (2011년 8월), 37–58

연구 프로그램으로서의 힐버트 계획

Hilbert's Program as Research Program

정계섭 Kye-Seop Cheong

수리 논리학의 발전은 상당 부분 힐버트 (D. Hilbert, 1862∼1943)의 증명이론(Beweistheorie)에 뿌리를 두고 있다. 흔히 '힐버트 계획' (Hilbert's program)으로 불리는 이 계획의 목표는 형식적 공리론적 방법에 의해 수학의 모든 명제와 증명을 형식화하고 이 형식 체계의 완비성과 무모순성 증명을 통해 고전 수학을 '구원' 하고, 수학의 토대를 공고히 하자는 데에 있다. 1931년 괴델의 제 1정리에 의해 결정불가능 명제의 존재가 드러나면서 완전성이 위기를 맞고, 제 2정리에 의해 무모순성의 확립이 무산될 위기에 처한다. 그러나 '상대적' 내지 '부분적' 힐버트 계획은 효과적인 연구 프로그램으로서 살아 있다고 말하는 학자들이 적지 않다. 우리는 특히 힐버트 계획 이 오늘날 구성주의 수학 의 발전에 동력을 제공하고 있다는 점을 커리-하워드 대응 (Curry-Howard Correspondence)을 통하여 부각시키고자 했다. 자연연역에서 증명(proof)이 바로 컴퓨터 프로그램 (computer program)에 다름 아니라는 사실에 의해 수학의 형식화(formalization)는 새로운 조명을 받게 된 것이다. 요컨대 힐버트 계획은 컴퓨터 과학에서 알고리듬(algorithm)이라는 핵심개념에 가장 잘 부합되는 것이다.

The development of recent Mathematical Logic is mostly originated in Hilbert's Proof Theory. The purpose of the plan so called Hilbert's Program lies in the formalization of mathematics by formal axiomatic method, rescuing classical mathematics by means of verifying completeness and consistency of the formal system and solidifying the foundations of mathematics. In 1931, the completeness encounters crisis by the existence of undecidable proposition through the 1st Theorem of G?del, and the establishment of consistency faces a risk of invalidation by the 2nd Theorem. However, relative of partial realization of Hilbert's Program still exists as a fruitful research program. We have tried to bring into relief through Curry-Howard Correspondence the fact that Hilbert's program serves as source of power for the growth of mathematical constructivism today. That proof in natural deduction is in truth equivalent to computer program has allowed the formalization of mathematics to be seen in new light. In other words, Hilbert's program conforms best to the concept of algorithm, the central idea in computer science.

Keywords: 증명, 형식적 공리론, 완전성, 무모순성, 커리-하워드 대응, 절단제거

이 연구는 2011년도 덕성여자대학교 교내연구비 지원으로 수행되었습니다. 아울러 진지하고 유익한 조언을 주신 익명의 심사위원들에게 감사합니다.

MSC: 03X-XX ZDM: E5

제출일: 6월 21일 수정일: 8월 11일 게재확정일: 8월 17일

1 들어가면서

프레게(G. Frege, 1848～1925)에 의하면 모든 개념 내지 속성은 하나의 집합을 형성하며, 이를 내포공리(Comprehension axiom)라고 한다.

$$R = \{x \mid P(x)\}$$

여기에서 $R = \{x \mid x \notin x\}$라 하면,

$$R \in R \quad \longleftrightarrow \quad R \notin R$$

이것이 이른바 '럿셀의 역설'(1901)이다.

이보다 앞서 '칸토어의 역설' 이 나왔는데, 모든 집합들로 이루어진 집합 $\mathfrak{U}$를 가정할 때 발생한다. $\mathfrak{U}$의 부분집합들의 집합 $P(\mathfrak{U})$는 $\mathfrak{U}$에 포함되면서 $\mathfrak{U}$보다 큰 기수를 가져야 하기 때문이다.

이 모두가 '모든 집합들의 집합' 처럼 우리가 통제할 수 없이 너무 큰 집합, 필연적으로 '무한한 전체' 즉 실무한 (actual infinity)이라는 개념으로부터 유래한다. 요컨대 토대의 위기의 근원은 무한의 개념 속에 숨어 있는 것이다. 그래서 이 개념을 명료화하는 작업이 힐버트의 표현에 의하면 "인간 오성의 명예"를 위해 시급한 과제가 된 것이다.

이에 대해 세 가지 처방이 나왔는데, 럿셀(Russell, 1872～1970)의 논리주의, 브라우어(Brouwer, 1881～1966)로 대표되는 직관주의 그리고 힐버트의 형식주의가 그것이다.

실상 논리주의와 형식주의 사이에는 큰 차이가 없다. 다만 힐버트는 논리주의에 포함된 무한공리(axiom of infinity)[1]와 나중에 럿셀 자신이 철회한 환원공리(axiom of reducibility) [2]를 받아들이지 않는다.

주된 공격은 직관주의학파로부터 나오는데, 힐버트는 이것이 고전 수학에 대한 중차대한 도전이라는 사실을 간파하고 자신의 프로그램으로 이에 대응한다. 그 시기는『기하학의 기초』(1899)로부터 1905～1917년 괴팅겐 대학의 세미나[3] 그리고 1927년『수학의 토대』

1) 무한공리는 실무한 집합의 존재를 형식화한 것이다. $(\exists x)(y)\{y \in x \supset y \cup \{y\} \in x\}$

2) 역설을 피하기 위해 럿셀은 유형론(theory of types)을 도입하는데, 집합은 자신을 원소로 가져서는 안 된다는 내용이다. 개별자는 '유형0' 이고, 개별자의 속성에 관한 주장은 '유형1' 이다. x가 y에 속하면, y는 x보다 더 높은 유형이 되어야 한다. 유형론의 복잡성을 피하기 위해 환원공리를 도입하는데, 명제에 관한 환원공리는 임의의 높은 유형의 명제는 '유형1' 의 명제로 환원된다는 주장이다.

3) 괴팅겐 대학의 세미나 주제는 다음과 같다.

1. Logische Principien des mathematicschen Denkens (Summer 1905)
2. Zahlbegriff und Prinzipienfragen der Mathematik (Summer 1908/09)
3. Prinzipien der Mathematik (Seminar, Winter 1908/09)
4. Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik (Summer 1910)
5. Logiche Grundlagen der Mathematic (Winter 1911/12)
6. Grundlagen der Mathematik und Physik (Summer 1913)

에까지 이른다고 볼 수 있다.

2 도전과 응전

칸트[4)]와 뿌엥까레 (Poincaré, 1854∼1912)[5)]를 염두에 두면서 논의를 크로네커 (Kronecker, 1823∼1891) 로부터 시작하자. 그는 정수 (integers) 는 신의 작품이고 나머지는 모두 인간의 작품이라는 유명한 말을 남겼다.

수에 대한 이러한 관점은 수학의 모든 개념에 대해 유한회의 단계를 거친 구축성 내지 구성성 (constructivity) 을 요구하기에 이른다. 예컨대 '소수의 집합' 은 유효한 수학적 개념이 될 수 없는데, 이런 개념은 유한회의 과정을 거쳐 구성될 수 없기 때문이다. 사정이 이러하니 그가 칸토어의 작업을 '조롱' 한 것은 짐작이 가는 일이다.

브라우어에 있어, 논리법칙은 유한집합으로부터 추상된 것인데 이를 무한집합에 까지 적용한 것이 화근이다. 직관주의의 관점을 요약하면,

i. 무한집합에 대한 추론에서 배중율과 선택공리를 거부한다.
ii. 비구성적인 (nonconstructive) 존재증명을 거부한다.

배중률의 거부에 대해 힐버트는 "금지의 독재" 라고 비난하면서 〈수학의 기초〉(1927) 에서, 수학자에게서 배중률을 빼앗은 것은 천문학자에게 망원경을, 권투선수에게 주먹의 사용을 금지하는 것과 마찬가지라고 흥분한다.

브루우어는 존재에 관한 진술은 존재에 대한 구성 (construction) 을 반드시 포함해야 하며, 그렇지 않을 경우에는 수학을 가치 없는 놀이 (game) 로 전락시킬 뿐이라고 단언한다. 그에게 있어 수학적 활동은 정신의 창조적 행위라서 결코 기계화 될 수 없고, 무엇보다도 수학은 형식화가 가능한 학문이 아니라는 것이다.

그러나 힐버트는 주어진 공리군이 모순을 야기 시키지 않는다면 그들이 정의하는 대상은 존재한다. 무모순성, 또는 일관성이 존재성을 대체하는 것이다. 게임에 대한 힐버트의

---

7. Probleme und Prinzipien der Mathematik (Winter 1914/15)
8. Mengenlehre (Winter 1916/17)
9. Mengenlehre (Summer 1917)

수학의 형식화 작업과 무모순성 증명은 1920년대에도 계속된다.

1. Probleme der mathematicschen Logik (Summer 1920)
2. Grundlagen der Mathematik (Winter 1921-22)
3. Logische Grundlagen der Mathematik (Winter 1922-23)

이 시기에 뒤에 소개 될 ε-대체 방법 (epsilon substitution method) 이 소개된다.

4) 칸트에게 있어 수학의 명제는 선천적 종합판단으로서, 기하학의 명제는 공간에 대한 암묵적인 직관에 의존하고, 산수의 명제는 시간에 대한 직관에 근거한다.

5) 직관을 중시하는 뿌엥까레는 "논리학은 불임 (sterile) 이 아니라 모순을 생산한다." ('수학과 논리학', 1906) 고 야유를 던진다.

견해는 다음과 같다.

> 브루우어가 경멸적으로 여기는 논리식 게임(Formelspiel)은 수학적 가치 이외에도 아주 중요한 철학적 의미를 갖는다. 이런 논리식 게임은 정해진 규칙에 따라 수행되며, 그 규칙 속에는 우리의 사고의 기술(Technikunseres Denkens)이 포함되기 때문이다. 나의 증명이론의 핵심적 아이디어는 오성의 활동을 기술하는 것에 다름 아니며, 우리의 사고가 그에 따라 작동하는 규칙 들의 정관을 만들자는 것이다.[6)]

여기에서 힐버트가 강조하는 점은 형식적 과정이 우리의 사고를 표상하는데 유익할 뿐만 아니라 사고의 구성적인(constitutive)부분이라는 것이다. 역설의 발생과 고전 수학에 대한 직관주의자들의 공격은 힐버트로 하여금 논리체계 자체를 연구의 대상으로 삼는 '증명이론' (Beweistheorie) 또는 초수학(Metamathematics)이라고 명명한 새로운 수학 이론을 창시하도록 한다. 수학에서 증명은 핵심적인데도 불구하고 힐버트 이전에는 증명 자체가 수학적 탐구의 대상이 된 적은 없었다. 힐버트의 계획을 요약하면 다음과 같다.

> 첫째, 모든 수학적 추론을 형식체계 T 내에서 형식화한다.
>
> 둘째, T의 무모순성을 '유한한' 수단으로 증명한다.

형식화란, 비직관적인 기호들로 구성된 엄격한 문법규칙으로 모든 수학의 명제와 증명을 기술하는 것을 의미하는데, 이렇게되면 수학에서 통사론과 의미론의 분리가 이루어진다. 초보적인 문제에 관해서는 비형식적인 증명도 무방하다. 이런 경우에서까지 형식적 방법이 필요한 것은 아니고 직관적인 확실성만으로도 충분하다. 그러나 문제가 복잡할 때에는 자연언어보다 더 적확한 방법이 필요하다. 나아가 형식적 방법에 조합(combinatoric)의 원리를 적용하여 사전에 알 수 없었던 새로운 사실을 알 수도 있다.

이런 분리의 인식론적 함의는 지대하다. 전자는 증명가능성, 후자는 참의 개념과 각각 연결되기 때문이다. 증명가능성은 하나의 이론, 즉 공리체계에 관한 것이고, 참은 하나의 모델 즉 수학적 구조에 관한 것이다. 이는 바로 법칙과 관계를 지닌 집합에 다름아니다. 괴델의 불완전성정리는 바로 이 사실, 즉 증명가능성을 형식적으로 정의할 수 있는 가능성과 참을 형식적으로 정의할 수 없는 불가능성 의 차이에 대한 확고한 인식으로부터 기인한 것이다.

뒤에 보다 자세하게 취급될 것이지만, 여기에서 우리가 주목해야 할 것이 유한주의적(finitistic)관점이다. 유한한 수단은 모든 과학적 추론의 기본이며, 그것은 실무한에 의존하지 않는다. 그렇다면 '칸토어가 선물한 낙원' 에서의 추방을 거절한 힐버트는 자신의 입장과 상충되지는 않는가?

6) Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik, 1927

수학에서 새로운 발견 내지 발명에 토대를 제공하기 위해서는 이미 알려진 수학의 용어로 해석하는 경우가 종종 있다. 예컨대 복소수를 실수의 쌍으로 해석하는 경우처럼 말이다. 힐버트에게 있어서 무한의 개념은 하나의 '말하는 방식' 에 지나지 않는다.

무한소와 무한대의 의미로서 무한은 단지 "말하는 방식" (eine bloβe Redensart)[7] 으로 볼 수 있다. 그래서 우리는 추론의 수단으로서 만나는 무한한 전체(unendlichen Gesamtheit)의 의미로서의 무한은 단지 표면상의 것으로 인정해야 한다. 힐버트의 이런 관점은 라이프니츠로부터 직접 유래하는 것으로 우리는 생각한다.

> 나는 무한(∞)을 대수에서 허근($\sqrt{-1}$)처럼 계산에서 사용하기 위한 정신적 픽션으로 생각한다. 무한은 사고를 단축하는데 그리고 발견에 큰 도움이 된다. 무한에 관한 표현이 우리를 오류로 이끄는 것은 가능하지 않다.[8]

그리고 힐버트의 천재적 발상은 임의의 수학문제를 연구하는 대신에 증명체계 자체를 탐구의 대상으로 삼았다는 데에 있다. 수학에서 증명은 언제나 유한하기 때문이다.

3 힐버트의 계획

3.1 형식적 공리주의

공리적 방법의 전형적인 예는 유클리드의 『기하학원론』이지만 직관적인 단계에 머물러 있어서 논증의 전개는 자연언어에 의존하고 있다. 또한 기하학에서 필요한 모든 공리를 망라하지도 않았다. 예컨대 "사이에" (between) 라는 개념은 자주 사용되면서도 공리군에 포함되지 않았다.

> 우리가 과학의 토대에 대해서 탐구할 때에는 그 과학의 기본적인 아이디어들 사이에 존재하는 관계들에 대해 정확하고도 완벽한 기술을 포함하는 공리들의 체계를 세워야 한다. 이렇게 정립된 공리들은 동시에 기본적인 아이디어들의 정의이다. 이 과학의 영역내에서 그 토대가 정확하지 않은 어떤 진술도 유한회의 논리적 단계를 통해 이 공리들로부터 유도될 수 없다.[9]

공리적 방법은 논리적 형식주의를 필요로 한다는 사실을 인식한 힐버트는 프레게나 럿셀에 의해 수립된 수리논리학의 성과를 십분 활용하고자 했는데, 이것이 그의 형식적 공리

7) 힐버트, 무한에 대하여, 1926
8) 라이프니츠, Letter to B. Des Bosses, 1706～1716
9) 힐버트, Mathematical Problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicals at pairs in 1900.

주의[10] (Axiomatique formalisée)로서 유크리드 기하학의 공리론을 훨씬 능가한다. 이런 형식적 공리론의 방법에 의해 그는『기하학의 기초』에서 기하학의 무모순성을 산수의 무모순성으로 환원시켰다.[11] 무모순성의 문제는 빠리에서 1900년에 열린 세계 수학자대회에서 힐버트가 제시한 23개 문제 중 두 번째에 해당한다.

형식적 공리론에서는 의미가 문제가 아니라 공리에 나타나는 용어들 사이의 관계만이 문제가 된다. 그래서 기의(signified)를 배제하고 기표(signifier)만을 취급하는데, 이렇게 해서 수학은 의미가 배제된 기호들의 기계적 조작이 되는 것이다.

힐버트는 "점, 선, 면을 의자, 맥주컵, 테이블로 바꿔도 상관없다."고 즐겨 말했다고 한다. 바로 여기에서 우리는 기호의 중요성을 간파하게 된다.

> 프레게나 데데킨트와는 달리, 나는 수론의 대상들을 기호 자체에서 본다. 기호 생산의 특수한 조건 그리고 시공간과는 독립적으로 우리는 그들의 형태를 보편적으로, 확실하게 인식할 수 있다. 바로 여기에 순수 수학의 토대와 모든 과학적 사고에서 그리고 이해와 소통의 필요조건으로서 내가 요구하는 확고한 철학적 방침이 있다. 우리는 이렇게 말할 수 있다: "태초에 기호가 있었느니라."[12]

칸트에게 보내는 편지(1770년 10월 13일)에서 램버트(Lambert)[13]는 이렇게 말한다.

> 그 누구도 무한급수의 모든 원소에 대해 명확한 표상을 형성하지 못했고, 이는 앞으로도 그러할 것이다. 그러나 우리는 상징적 지식의 법칙 덕분에 그들의 합을 구할 수 있고 그러한 급수들을 가지고 산수를 할 수 있다. 이렇게 우리는 우리가 현재 생각 할 수 있는 경계 너머로 우리 자신을 확장하는 것이다. $\sqrt{-1}$라는 기호는 생각할 수 없는 비(非)사물(non-thing)을 가리킨다. 그런데 그것은 새로운 정리들을 발견하는데 아주 잘 사용된다. 순수 오성의 견본이라고 여겨지는 것들은 대개 상징적 지식의 견본으로 볼 수 있다.

램버트는 개념이 실패하는 곳에서 비(非)의미론적인(non-semantical)기호 사용의 중요성을 역설하는데, 이것은 힐버트의 가장 긴밀한 협력자 베르나이스(Bernays)가 하는 말과 정확히 일치한다.

> 개념이 실패하는 곳에서 기호가 때맞추어 도입된다.

---

10) 이와 대조되는 개념이 내용적 공리주의(contentual axiomatic)로서, 힐버트와 베르나이스는 그 사례로 유크리드 기하학, 뉴턴 역학, 끌로지우스의 열역학을 들고 있다.

11) 그래서 이제는 산수의 무모순성을 확립하는 작업이 초미의 관심사가 된 것이다. 그 전에 프레게의『산수의 기초』(1883)에서 순수한 논리학적 관점에서 산수를 정립하기 위한 시도가 있었다.

12) 힐버트, "Neubegründung der Mathematik", 1922

13) 램버트(J. H. Lambert, 1728~1777), 스위스의 수학자, 물리학자, 천문학자

이것이 힐버트 이론의 방법론적 원리이다.[14)]

이처럼 기호는 문제를 표상하는 기능뿐만 아니라 우리의 사고를 인도하는(conductive) 기능이 있으니 바로 이러한 점이 기호학의 진정한 연구목표 중 하나가 되어야 한다고 우리 역시 믿어마지 않는다.

3.2 형식체계

힐버트의 근본적인 생각은 앞서 인용한대로 우리들의 사고가 실제 그에 따라 수행하는 규칙들의 정관(protocol)을 만드는 데에 있다. 이를 위해,

- 형식체계에서 사용될 모든 기호들의 목록을 만들어야 하고,
- 적형식 (well formed formula)을 결정하기 위한 문법규칙을 세워야 하며,
- 하나의 표현을 다른 표현으로 다시 쓰기 위한 규칙이 필요하고,
- 이런 체계를 위한 공리군을 설정해야 한다.

여기에서 기호 (상항, 변항, 술어, 함수)의 선정에는 별 문제가 없으며, 적형식을 위한 문법규칙도 기지의 사실이다.[15)] 그래서 문제되는 체계의 모든 정리들이 도출되는 공리들의 선택이 중요하다. 힐버트는『수학의 토대』에서 17개의 공리를 채택하고 있는데 이는 별첨 I 로 처리하고자 한다.

이제 명제계산에 대한 힐버트식의 연역체계를 아주 간단한 사례를 통해서 보도록 하겠다.[16)]

1) 공리계 힐버트의 공리계는 연산자 $\neg$와 $\rightarrow$만을 가진 최소체계로서 보통 SKC[17)]체계라 부른다.

(K) $\alpha \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \alpha_1)$

(S) $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3)) \rightarrow ((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \rightarrow ((\alpha_1 \rightarrow \alpha_3))$

---

14) Bernays, Über Hilbert's Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik, 1922 (베르나이스의 32개 논문을 보려면: www.phil.cmu.edu/projects/bernays/b-translations.html)

15) - p가 n항 술어이고, $t_1, \cdots, t_n$이 용어일 때, $p(t_1, \cdots, t_n)$은 적형식이다.
- p와 q가 적형식일 때 $(p * q)$는 적형식이다. $(* : \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$
- p가 적형식일 때 $\sim p$는 적형식이다.
- A가 적형식이고 X가 변항이면, $\forall x A$와 $\exists x A$는 적형식이다.

16) 힐버트식의 연역체계 외에 자연연역과 순차식계산이 있다.

17) 조합논리 연산자 K와 S는 λ-연산에서

$$\mathsf{K} \equiv \lambda xy.x$$
$$\mathsf{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$$

로 정의되기 때문이다. C는 물론 대우(contraposition)를 가리킨다.

(C) $(\neg\alpha_1 \rightarrow \neg\alpha_2) \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \alpha_1)$

2) 추론규칙 힐버트 체계에서는 단 하나의 추론규칙을 채택하는데 'modus ponens' 가 그것이다.

$$\frac{\alpha_1, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2}{\alpha_2}$$

이러한 체계를 가지고, $\{A, (A{\rightarrow}B), (B{\rightarrow}C)\}$ 로부터 $(\neg D{\rightarrow}C)$ 를 유도해보도록 하자. 술어논리의 사례는 별첨에서 제시하겠다.

1.	A	가정
2.	$A{\rightarrow}B$	가정
3.	B	(1,2, MP)
4.	$B{\rightarrow}C$	가정
5.	C	(3,4, MP)
6.	$(C{\rightarrow}(\neg D{\rightarrow}C))$	(공리 1)
7.	$\neg D{\rightarrow}C$	(5,6, MP)

여기에서 보는 바처럼 전제로부터 결론의 연역은 순전히 형식적이다. 즉, A, B, C, D로 표현된 문장의 의미에 우리는 전혀 개입하지 않는다.

이제부터 이런 형식 체계가 갖추어야 할 속성에 대해 알아보자.

- 완전성 (completeness) : 공리체계는 추론규칙의 도움으로 모든 정리들을 유도 할 수 있어야 한다. 어떤 체계가 완전하다는 것은 p 나 $\sim p$ 둘 중 하나는 반드시 유도될 수 있어야 한다. 여기에서 '참' 은 '증명가능성' 과 동의어로 쓰여서, 증명가능한 명제는 참이고, 모든 참인 명제는 증명 가능해야 한다.

- 무모순성 (consistence) : 하나의 연역체계는 정합적 또는 무모순적이어야 한다.[18)] 즉 p 와 $\sim p$ 를 동시에 산출해서는 안 된다. 어찌 보면 당연한 듯이 보이는 이 속성을 명시하는 것은, 힐버트의 형식적 공리론에서 공리들은 유클리드기하학의 공리들처럼 자명한 것으로 간주되지 않기 때문이다.

1930년에 발표된 괴델의 완전성정리 (Completeness Theorem) 는 모든 참인 명제는 증명 가능함을 천명한다. 물론 그 역도 성립한다.[19)]

$$\models P \;\longleftrightarrow\; \vdash P$$

---

18) 관심의 축이 진리 (truth) 에서 무모순성 (inconsistence) 으로 옮겨진 것은 가우스, 볼리아이, 로바체프스키, 리만 등에 의한 비유클리드 기하학의 출현과 무관하지 않다. 이제 어떤 정리의 증명은 진리값 참의 발견이 아니라, 일련의 기호를 다시쓰기규칙에 의해 일련의 다른 기호로 변형하는 것이다.

19) 제1계 술어논리의 완전성은 에르브랑 (Herbrand) 과 겐첸에 의해서도 각각 다른 방법으로 증명되었다. 겐첸은 이 과정에서 증명의 탐구에 절묘한 체계인 순차식계산을 고안하였다.

이 정리는 명제의 타당성(validity)과 논리적 연역이라는 두 개념을 연결시키는 초정리(metatheorem)로써, 힐버트 계획으로서는 매우 고무적인 정리가 되겠다. 왜냐하면 모든 수학의 증명이 원리상 제1계 술어논리의 언어로 형식화될 수 있기 때문이다. 그러나 바로 1년 뒤 역시 괴델에 의해 저 유명한 불완전성정리가 나와 힐버트 계획은 일대 위기를 맞는다.[20)]

완전성의 문제에 부수적으로 결정문제 (Entscheidungsproblem)가 있다. 어떤 체계 S가 p를 증명하거나 $\sim p$를 증명하면, p는 S에 의해 '결정' 된다고 하고, 이 때 S는 완전(complete) 하다고 한다.

만일 p나 $\sim p$가 S에 의해 증명될 수 없으면, p를 결정불가능(undecidable) 명제라 하고 S를 불완전(incomplete)하다고 한다.

그러니까 완전성의 개념은 체계에 속하고, 결정가능성 개념은 개별적인 문제에 속하는 것이다. 제1계 술어논리의 정리들은 '결정불가능'[21)]한데, 임의의 논리식의 진리치를 평가하기 위한 일반적인 알고리듬이 존재하지 않기 때문이다. 그렇다고 제1계 술어논리가 완전하다는 사실을 방해하지는 않는데, 모든 참인 논리식 즉 정리에 대해서 증명이 항상 존재하기 때문이다. 다만 일반적 방법 즉 알고리듬으로 이 증명을 언제나 찾을 수는 없다는 것이다.

또 다른 예를 산수에서 들어보자. 임의의 디오판테스 방정식[22)]을 풀 수 있는 알고리듬이 존재하는가?

$$f(x,y,z) = 6x^3yz^2 + 3xy^2 - x^3 - 10$$

$$f(5,3,0) = 0$$

- 방정식 $P(x_1,\cdots,x_k) = 0$은 정수 $r_1,\cdots,r_k$가 있을 때 해결할 수 있다.

: $P(r_1,\cdots,r_k) = 0$

이 문제는 힐버트의 23개 문제 중 10번째 문제에 해당한다. 1970년 마띠야세비치(Matijasevitch)는 그러한 알고리듬이 존재하지 않는다는 사실을 증명하였다.

---

20) 완전성정리는 제 1계 술어논리의 체계에 관한 것이고, 불완전성정리는 산수(Arithmetics) 체계에 대한 정리여서 양자는 근본적으로 다른 분야임을 유념하자. 이에 대해 한 심사위원의 반론이 있었음을 밝혀둔다.

21) 보다 정확하게 '반(半)결정 가능한' 이라고 말해야 할 것이다. 예컨대 어떤 논리식이 참이면 튜링머쉰이 "예"라고 답하면서 중단되고, 반대의 경우에는 무한정 돌아가기 때문이다.

22) 이 방정식은 다항식의 형태로 나타나며 각 계수는 정수이고 정수근을 찾는다.

4 괴델정리와 힐버트 프로그램

4.1 제1정리

제1정리[23)]에 의하면, 기초 산술의 모든 증명을 망라할 수 있는 형식체계는 존재하지 않는다. 그러니까 수학의 완전한 형식화는 가능하지 않다는 것이다.

당시에는 '참' 과 '증명가능성' 의 혼동이 지속되던 시대로서 사람들은 모든 참인 명제는 증명가능하다고 생각했다. 아마도 괴델은 의도적으로 "이 문장은 증명 가능하지 않다."와 같은 부조리한 문장을 만들려고 했던 모양이다. 이 문장은 참이면서 증명가능하지 않다!

괴델이 궁극적으로 보이고자 했던 것은, 참의 개념과는 달리 증명가능성의 개념은 부정에 대해서 변환 되지 않는다는 사실이다. 즉, 만일 A가 증명 가능하지 않다면, ～A가 증명가능하다는 것을 의미하지 않는다. 따라서 결정 불가능한 명제가 존재하는 것이다. 보다 형식적으로, T를 PA(Peano Arithmetic)를 포함하는 형식체계라 할 때 다음과 같은 참인 명제 Φ가 존재한다.

제 1 정리 : 만일 T가 무모순이면, $T \nvdash \Phi$

이 정리는 수학적 활동은 인간 지성의 작용 내지 정신의 창조적 행위라서 형식화가 가능한 학문이 아니라는 직관주의자들의 손을 들어주는 셈이다. 제1정리의 교훈은 진리개념은 형식적으로 즉 통사적으로 정의할 수 없다는 것이다. 기계적 기법의 영역을 벗어나는 것들이 있다!

여기에서 다시 앞서 나온 완전성정리를 떠올리면서, 불완전성정리는 수학, 구체적으로 산수에 적용되는 것이지 논리학에 적용되는 것은 아니지 않는가 자문하게 된다.

산수는 정수에 근거한 체계로서 수학적 귀납법이 적용되는 특수한 체계인데 반해 논리학은 어떤 임의의 구조에 대해서도 성립하는 체계이다. 그래서 우리는 "힐버트 계획의 종말" 운운하는 표현에 동의할 수 없는 것이다. 나아가서 괴델 문장은 '대각화' (diagonalization)라는 아주 특수한 과정을 통해 산출된 문장이어서, 우리가 관심을 가지고 보는 대부분의 수학적 명제는 제1불완전성 정리를 비껴간다고 우리는 생각한다.[24)]

---

23) 보다 자세한 내용에 대해서는 필자의 다음 논문을 참조할 것. "수학적 참과 증명가능성", 논리연구 제8집 제2호, 한국논리학회, 2005, pp.3～32.

24) 이밖에도 코드화와 번역의 차이를 지적한 비트겐쉬타인의 비판에도 주목할 필요가 있다. 번역되 문장은 원래의 문장과 동일한 현실을 가르키는데 반하여, 코드화된 그렇지 않다. 괴델 문장은 전형적으로 코드화된 문장이다.

4.2 제 2 정리

T 를 산수를 포함하는 무모순인 형식체계라 할 때,

$$T \nvdash CON_T \quad (T \text{ 의 무모순성을 진술하는 문장})$$

PA 내에서 PA 의 무모순성을 확립할 수 없다는 제 2 정리는 힐버트의 무모순성 계획을 좌절시키는 것으로 보인다.

나젤 (Nagel) 과 뉴맨 (Newman) 은 우리보다 더 저간의 사정을 잘 요약해주므로 좀 길지만 인용하겠다.

> 괴델의 인상적인 결과가 오해되어서는 안 된다. 그것은 산수의 무모순성 증명에서 초 (超) 수학적 증명을 배제하지는 않는다. 괴델 정리가 배제하는 것은 산수의 형식적 연역에 의해 반영될 수 있는 무모순성 증명이다. 무모순성에 대한 초수학적 증명은 1936 년 힐버트 학파의 멤버인 겐첸 (G. Gentzen) 에 의해 이루어졌고, 그 이후 다른 사람들에 의해서도 ···
>
> 그러나 이들 초수학적 증명들은 산수 체계 내에서 나타낼 수 없다. 그리고 이들은 유한 주의적 증명이 아니어서 힐버트 계획의 원래 목표를 달성하지 못한다. 괴델이 보여준 것은 산수 체계 내에서 표상될 수 있는 증명이 가능하지 않다는 사실이다. 그의 논변은 산수체계 내에서 표상될 수 없는 유한 주의적 증명 가능성을 제외하지 않는다. 그러나 그 누구도 산수체계 내에서 구성될 수 없는 유한주의적 증명이 무엇인지에 대해 명확한 아이디어를 갖고 있는 것으로 보이지 않는다.[25)]

실상 겐첸은 초수학 (metamathatics) 에 대한 힐버트 계획을 수행하면서 1936 년 산술의 무모순성에 대한 증명을 제공했는데, 문제는 이 증명이 산술 체계 내에서 이루어진 것이 아니라는 사실이다. 아무튼 이 작업을 하면서 그는 증명이론에 도구와 방법론을 제공했는데, 주지하는 바처럼 자연연역 (natural deduction), 순차적 계산 (sequent calculus) 그리고 특히 컷-제거 (cut elimination) 규칙이 그것이다.

다른 한편 완전한 일관성의 증명 대신에 상대적인 일관성의 증명이 이루어졌는데, 괴델은 1935 년 ZF(Zermelo-Frankel) 의 집합론이 무모순이면 선택공리도 무모순이라는 사실을 증명했다.

$$\text{Coh}(ZF) \rightarrow \text{Coh}(ZF + AC)$$

코헨 (P. Cohen, 1934 ∼) 은 1962 년에 연속체 가설 (continuum hypothesis, CH) 은 ‘결

25) Nagel E. and Newman J. R., Godel's Proof, New York University press, 1958

정불가능' 이라는 사실, 즉 ZF집합론의 공리군에 CH를 추가하거나 또는 그 부정을 추가해도 모순이 발생하지 않는다는 사실을 증명하였다.

$$\mathrm{Coh}(ZF) \to \mathrm{Coh}(ZF + CH)$$

물론 상대적 일관성의 인식론적 가치는 제한적이지만, 무모순성의 증명에 서광을 비추는 것 또한 사실이다.

5 힐버트 프로그램의 불변항

힐버트는 형식화된 수학을 이론 물리학에 비교하면서 무모순성을 확립하려는 그의 시도에 보존원리(conservation principle)를 포함시켰다

> 하나의 이론은 그 성격상 직관이나 의미에 의존할 필요가 없는 그런 것이다. 물리학자가 이론에 대해 요구하는 것은 특수 명제들이 외부적 고려 없이 자연법칙이나 가정으로부터 오직 추론에 의해 유도되어야 한다는 것이다. 물리법칙의 어떤 귀결들은 실험에 의해 검증 될 수 있는데, 이는 나의 증명이론에서 오직 실제(real) 명제들만이 직접 검증될 수 있는 것과 마찬가지이다.[26)]

그러니까 무한에 관한 수학이 내부적으로 무모순이면, 우리는 거기에서 직접적이고 직관적인 의미를 요구하지 않는다는 말이다. 이는 전자(electron)에 대한 이론을 만들기 위해 전자를 직접 관찰할 필요가 없는 것과 같은 이치이다. 무한 수학이 취급하는 '이상적인' (ideal) 문장들의 정당성은 '실제적' (real) 인 문장들을 취급하는 유한주의 수학에 의해 정당화 되면, 무한 수학은 유한 수학의 보존적 확장이 되는 것이다. 예를 들어 덧셈의 교환성(commtativity of addition)을 생각해보자.

$$a + b = b + a \quad \text{(CA)}$$

힐버트는 CA가 이상적 진술이지만 우리가 어떤 특정의 "a"나 "b"를 선정하든 간에 대응하는 진술은 유한한 결정 가능한 진술이 되어 정당화된다고 본다.

반면에 $(a + b \neq b + a)$는 유한적 의미를 갖지 못하는데, 모든 수를 테스트할 수는 없기 때문이다. 힐버트는 이런 문장을 "초한 명제"로 보고 유한주의 관점에서 비합법적인 명제로 간주한다.

사실 정리(theorem)는 유한한 공리군과 정해진 추론 규칙을 통해 얻어지므로 공리화 작업 자체가 외연적으로 무한인 집합을 취급하는 유한한 방법으로 볼 수도 있겠다. 그러

26) 힐버트, 수학의 기초, 1928

나 공리들과 추론 규칙이 유한하다고 해서 유한에 의한 무한의 통제가 이루어졌다고 볼 수 있는가? 이 질문에 대한 답은 잠시 보류하기로 하고 우선은 유한적인 방법에 의해 무한을 취급하는 수단에 대해 검토하기로 하겠다.

그 첫째는 수학적 귀납법이다. 임의의 명제 $A(n)$ 에 대해,

i. $A(0)$ 를 취해 이 경우가 참이라 가정하고
ii. 만일 $A(k)$ 가 참일 때, $A(k+1)$ 도 참이면 모든 n 에 대해 $A(n)$ 은 참이다.

일찍이 뿌엥까레는 수학적 귀납원리가 수학의 토대를 확립해주는 가장 중요한 근간이라고 언급하였다.

두 번째로, W. Tait[27)] 가 제안한 '유한주의=원시회귀 산수[28)] (Primitive Recursive Arithmetic)' 라는 등식으로서 일반적으로 학계의 긍정적 평가를 받고 있다.

$$f(o,m) = g(m)$$

$$f(n+1,m) = h(n,m,f(n,m))$$

이른바 회귀적 (recursive) 절차란, 무한집합의 원소를 생성내지 인식하게 해주는 기제 (mechanism) 에 다름 아니다.

이상의 두 가지 방법은 수학에서 아주 친근한 것이다. 힐버트에게서 새로운 것은 일종의 선택 원리인 ε-연산자를 도입한 점에 있다. 하나의 ε-용어는 $\varepsilon x A(x)$ 를 나타내는데, "$A(x)$ 를 만족시키는 증인 x"(만일 그런 것이 존재한다면, 그렇지 않으면 임의의 대상)를 의미한다. 이런 해석은' 초한공리 '(transfinite axiom) 에 의해 형식화 된다 : $A(y) = A(\varepsilon x A x)$.[29)]

ε-연산자의 이점은 첫째 양화사 (quantifiers) 를 정의할 수 있다는 점이다. 이를 ε-대체방법 (epsilon substitution method) 이라고도 한다.

$$(\exists x)A(x) = A(\varepsilon x A(x))$$

$$(\forall x)A(x) = A(\varepsilon x \neg A(x))$$[30)]

27) W. Tait, Remarks on finitism

28) 간단한 예를 들자면,

$$\text{add}(0,x) = P_1^1(x)$$
$$\text{add}(n+1,x) = S(P_1^3(\text{add}(n,x),n,x))$$

29) y는 비한정 기술구 (indefinite description) 로서, 우리가 대수학의 문제를 풀 때 미지수를 x로 놓고 나아가는 방식과 동일하다.

30) 존재양화사 정의식에서 A를 $\neg A$로 대체하고, 양변에 부정 (negation) 을 가해서 전개하면 이 식을 얻을 수 있다.

이렇게 해서 모든 속박변항을 제거하면 무한집합의 연접(conjunction)이나 이접(disjunction)을 피할 수 있다. 즉 술어논리의 일반 진술은 개별자에 대한 진술로 대체해서 무한에 관한 시비를 잠재운다는 전략이다.

다음으로 ε-연산은 귀납원리를 형성하게 해준다. 수학적 귀납법은 무한을 유한한 방법으로 탁월하게 처리하므로, 이를 형성할 수 있는 다른 방법이 있다면 매우 바람직할 것이다. 그러나 이는 세부적인 사항에 속하므로 별첨으로 처리하고자 한다.

6 연구 프로그램으로서의 힐버트 계획

6.1 힐버트 이후의 연구

힐버트의 가장 중요한 협조자인 베르나이스(P.Bernays, 1888∼1977)는 이렇게 말한다.

> 원래의 계획처럼 완벽하지는 않더라도 증명이론이 풍성하게 발전될 수 있다는 사실이 곧 명백해졌다. 수론을 형식화한 체계에서 브루우어의 직관주의가 용인할 수 있는 증명방법에 의해 무모순성 증명이 가능해졌다. 괴델과 겐첸이 각각 관찰한 바와 같이, 고전적 수론을 형식화한 체계에서 파생되는 모순은 하이팅 형식체계[직관주의 산수]에서도 모순을 수반한다는 사실을 보여주는 상대적으로 단순한 방법이 있다. 그러므로 하이팅 형식체계의 무모순성으로부터 고전체계의 무모순성이 따라 나온다.[31)]

그의 관점을 이어받은 페페만(S. Feferman, 1928∼)[32)]과 지그(W. Sieg)[33)]는 그들의 노선을 '상대화된 힐버트 프로그램' 이라 명명하고 무모순성의 확립에 전념하고 있다. 심슨(S. Simpson, ∼)[34)]은 힐버트 프로그램의 부분적인 실현에 대해서 말한다.

> Z_2 에서 증명가능한 모든 Π^0_1 문장은 PRA에서도 증명가능하다. Z_2 는 Π^0_1 문장들에 관한 PRA에 대해서 보존적이다. 이것은 힐버트 프로그램의 정확한 실현을 구성한다.[35)]

31) Bernays P., Hilbert, David, 1967.(Bernays Project : Text No.32, p.23, 각주 14 참고)
32) Hilbert's program relativised,1988
33) Hilbert's program : 1887-1922, 1999.
34) Partial realization of Hilbert's program, 1988
35) Z_2 는 제2계산수 (second order arithmatics)를 의미하고, Π^0_1 는 $\forall\exists nA(n)$ 을 의미한다. Σ^0_1 논리식은 $\exists nA(n)$ 이다. 전자가 불완전성에 노출 될 수 있는 반면, 후자는 완전하다. 즉, 참일 때 항상 증명 가능하다.

자(R. Zach)[36]는 프리드만(Friedman)[37]과 심슨(Simpson)[38]에 의해 개발된 '역수학 계획'(program of reverse mathematics)[39]이 힐버트 프로그램의 연장선상에 있다고 평가한다. 역수학 계획이란, 어떤 정리가 주어졌을 때 이 정리를 증명하기 위해 필요한 공리군은 무엇인가를 탐구하는 분야이다.

우리나라에서도 이종권[40], 최병일[41] 등에 의해 힐버트 프로그램에 대한 본격적인 연구가 이루어졌으며, 특히 힐버트 프로그램을 천착한 박정일[42]의 논문은 무척 고무적인 작업으로 평가하고 싶다.

6.2 구성주의 수학

'구성적' (constructive)은 '고전적' (classical)과 대조적으로 쓰인다. 고전적 관점에 의하면, 수학에서 의미 있는 모든 명제는 우리가 어느 경우인지 설령 모르더라도 참이거나 거짓이다.

예를 들어, 2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합이라는 골드바흐(Goldbach)의 추측은 증명도 반증도 되지 않았지만 고전적 관점에서는 참 아니면 거짓이다.

'구성적' 은 한편 '직관주의적' 과 동의어로 쓰이는데, 양자 모두 관심의 축이 진리(truth)에서 검증의 수단으로 바뀐다. 하나의 진술은 참이라는 사실을 증명할 수 있을 때 비로소 참이라고 말할 수 있고, '$0 = 1$' 즉, 모순을 함축할 때 거짓이라고 말할 수 있다. 그리고 A를 증명하거나 또는 B를 증명할 수 있을 때 "A 또는 B"라고 말할 수 있다. 이런 방식으로 직관주의 수학을 형식화한 수학자가 하이팅 [43]이다.

'$p \to q$' 의 증명은 직관주의 관점에서 어떻게 해석되는가? 그것은 p의 증명에 q의 증명을 연결하는 체계적 방법이다. 다른 말로 하자면 '$p \to q$' 자신은 p의 증명을 q에 사상(map)하는 함수에 다름 아니다!

36) R. Zach, Hilbert's Program Then and now (http://philsci-archive.pitt.edu/2547/1/hptn.pdf)

37) 프리드만의 출력할 수 있는 자료를 보려면: www.math.ohio-state.edu/ friedman/manuscripts.html

38) Simpson, S. G., "Partial Realization of Hilbert's Program", The journal of Symbolic Logic, vol.53(2), pp.349–363, 1988.

39) 공리계에서 출발하여 정리를 유도하는 고전적 방식을 심슨(1988, p.356)은 '순(順)수학' (forward mathematics)이라고 부른다.

40) 이종권, 수학적 형식주의의 전개과정, 『철학탐구』제11집, 중앙대 중앙철학 연구소, 1999

41) 최병일, 역수학 계획에서 힐버트의 계획으로: 힐버트의 실증주의적 수리 철학, 『논리연구』제1집, 한국논리학회, 1997

42) 박정일, 힐버트 프로그램과 구성주의적 해석, 철학박사 학위논문, 서울대 대학원, 2000 유한주의와 철학적 해석, 『논리연구』제4집, 한국논리학회, 2000 힐버트 프로그램에 관하여, 『철학』, 한국철학회, 1999

43) 네덜란드의 수학자. 부루우어의 제자로서 직관주의 수학을 형식화함 B-H-K해석의 멤버(A. Heyting, 1898 ~1980)

그래서 $t : p$ 이고 f가 ‘$p \to q$’ 일 때 함수 적용 $f(t)$는 q를 산출한다.

$$\frac{t : p \quad f :\ p \to q}{f(t) = q}$$

여기에서 $t : p$가 의미하는 바를 바로 보아야 한다. t는 λ-용어이고, p는 유형이자 논리식(furmula-as-type)을 의미한다. t는 p의 증명구조를 지닌다. 즉 논리식 p의 실질적 증명 코드이다.

다른 한편, 비숍[44]은『구성적 해석학의 기초』(1967)에서 해석학의 기초를 구성주의적 방식으로 다루고 있다. 여기에서 해석학의 모든 정리는 구체적인 대상으로부터 출발하여 구체적인 대상을 계산하는 알고리즘의 의미를 지닌다. 주지하는 바와 같이 알고리즘이란 유한한 단계 내에 원하는 결과에 도달하는 절차로서, 바로 힐버트의 ‘유한주의적 추론’과 접점을 이룬다.

더 나아가서, 논리학이 컴퓨터과학과 만나면서 형식적 증명이 λ-연산[45] 과 동형이라는 ‘커리-하워드 대응’ (Curry-Howard correspondence)[46]은 힐버트 계획에 결정적으로 서광을 비추는 발견으로 우리는 생각한다. 증명이 곧 프로그램 즉, 알고리즘이라는 사실이 밝혀지면서 구성성(constructivity)을 확보 할 수 있기 때문이다. 간단한 사례를 통해 이 점을 살펴보겠다.

증명	λ-연산
$\overline{A, B \vdash A}$ 공리	$\overline{x : A,\ y : B\ \vdash x : A}$ 변항
$\overline{A \vdash B \to A}\quad \to$ 도입	$\overline{x : A\ \vdash \lambda yx : B \to A}$ 추상
$\overline{\vdash A \to B \to A}\quad \to$ 도입	$\overline{\lambda x \lambda yx : A \to (B \to A)}$ 추상

마지막 식의 좌변을 M, 우변을 σ라 할 때, 이 식이 의미하는 바는 “λ-용어 M은 논리식 σ

44) Bishop, Foundations of constructive Analysis, MacGraw Hill, 1967

45) λ-연산의 토대는 3개의 λ-용어와 하나의 환원규칙이다.

① λ-용어
- λ-추상 : $\lambda x.t$
- 함수적용 : $t(u)$
- 변항 : x

② 환원규칙
$(\lambda x.t)u \to t[u/x]$

우주의 삼라만상이 몇 안되는 소립자로 구성되듯이, 컴퓨터의 세계는 이와 같은 토대로 이루어진 것이다. λ-연산은 완벽한 프로그래밍 언어로서, 모든 λ-용어는 컴퓨터 프로그램으로 간주 될 수 있다. 보다 자세한 내용은 필자의 논문(λ-연산 소개, 한국 수학사학회지, 제 17권 제 4호, pp. 45~64, 2004)을 참고.

46) 자연연역과 단순 유형화된 λ-연산 사이에 통사적 유사성을 의미한다.

자연 연역	단순 유형화된 λ-연역
$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \to$ 도입	$\dfrac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \alpha \to \beta}$
$\dfrac{\Gamma\alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta} \to$ 제거	$\dfrac{\Gamma \vdash t : \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash u : \alpha}{\Gamma \vdash tu : \beta}$

를 증명한다.”이다. λ-용어는 곧 증명이고, 증명은 곧 프로그램이며, 논리식은 유형(type)이다. 커리-하워드 대응은 정리와 프로그램의 대응을 말해준다. 이런 대응은 처음부터 자명한 사실은 아니었다. 겐첸의 자연연역은 증명에 대한 형식체계인데 반해 처치의 λ-연산은 프로그램에 대한 형식체계이기 때문이다.

증명이 의존하고 있는 공리체계는 프로그램을 돌아가게 하는 운영체제에 해당한다. 예컨대 Windows, UNIX 등이 그것들이다. 증명의 행들은 λ-용어 즉 , 프로그램의 각 단계에 해당한다. 놀랍지 아니한가!

괴델의 제 1정리에 의해 수학적 추론을 완전히 형식화 할 수는 없다 하더라도 힐버트의 형식주의는 적어도 계산(computation)에서는 실현되었다고 보아도 큰 무리가 없을 것이다. 물론 이 문제는 보다 심화된 연구를 필요로 한다는 점을 추가해야겠다.

커리-하워드의 두 번째 양상은 어떤 연산자가 도입되고 이어서 제거되는 과정, 이른바 컷(cut)과 컷-제거(cut elimination)에서 볼 수 있는데, 전자는 연역에 관련되고 후자는 다름 아닌 β-연산에 해당한다.

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[x:A]^i \\ \vdots\, D_1 \\ M:B\end{array}}{\lambda x, M : A \to B}\;\to I, j \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ N:A\end{array}}{(\lambda x, M)N : B}
& \overset{\beta}{\rightsquigarrow} &
\begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ A \\ \vdots\, D_1 \\ M[x := N] : B \end{array}
\end{array}
$$

하나의 연역에서 컷-제거는 파생명제로서 관련된 λ-용어의 환원(reduction)과 정확하게 일치한다. 이것이 의미하는 바는 실로 심대하다.[47)]

7 나오면서

수학에서 토대의 위기를 해소하고 고전수학을 지키기 위해 힐버트는 프레게와 럿셀 등에 의해 이룩된 수리논리학의 성과를 십분 활용하여 수학적 추론을 엄밀하게 형식화하는 작업을 수행한다. 그는 유한주의적 접근법을 취하는데 이를 구성주의적 관점으로 볼 수 있으므로, 힐버트 계획은 크로네커, 뿌엥카레, 부루우어와 바일 등의 탐구와 맥을 같이 한다.

형식주의의 요체는 의미에 얽매이지 않고, 논리법칙과 통사론의 규칙에 따라 기호를 조작 하는 데에 있다. 우리는 여기에서 기호 내지 언어가 사고의 구성적인 부분이라는 점을 강조하였다.

47) 우리는 커리-하워드 대응을 구성주의 수학의 연장선상에서 본다. 이것이 힐버트계획의 실현과 무관하다는 반박은 아마도 관점의 차이에 기인하지 않겠는가?

우리가 가장 중요하고 중심적인 정리라고 생각하는 완전성정리에 의하면 수학적 연역이 몇 개의 규칙들로 환원될 수 있기 때문에, 수학에서 모든 증명이 기계화 될 수 있다. 이 정리에 의해 통사론과 의미론의 통합이 이루어진다.

괴델정리는 힐버트 계획의 발전을 멈추게 하지 못했다고 우리는 믿는다. 수학의 완전성을 방어해야 할 필요성은 괴델 정리를 통해 오히려 더욱 절실하게 된 것이다. 힐버트 계획은 힐버트 학파의 학자들, 즉 Bernays, Ackermann, Gentzen 등에 의해 풍요로운 열매를 맺었으며, 1930년대의 새로운 시대의 논리학자들, 처치(Church, 1903～1995), 튜링(Turing, 1912～1954), 클리네(Kleene, 1909～1994), 커리(Curry, 1900～1982) 등에 의한 증명이론과 계산가능성(calculability) 이론은 힐버트 계획에 의해 고취된 성과들이다

힐버트 계획은 라이프니츠의 꿈인 '보편언어'(caracteristica universalis)와 '추론계산'(calculus ratiocinator)의 연장선상에 있다고 생각한다.

커리-하워드 대응은 논리학에서 증명이 구성적 즉, 알고리듬적 내용을 가린다는 사실을 극명하게 보여준다.

논리학은 수학과의 만남으로 첫 번째 충격 이후 컴퓨터과학과의 조우로 두 번째 충격을 겪는데, 이 충격은 '프로그램으로서의 증명'(proofs as programs)이라는 표현이 적시하는 것처럼 논리학의 역동적 양상을 잘 보여준다.

참고 문헌

1. Avigad J. and Reck E., Clarifing the nature of the infinite: *the development of metamathematics and proof theory*, (www.andrew.cmu.edu/user/avigad), 2001.
2. Benacerraf P. and Putnam H., (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University press, 1983.
3. Bernays P., On Hilbert's Thoughts Concerning the Grounding of Arithmetics, 1923. English translation in [Mancosu, pp.223–226].
4. Bernays P., Hilbert, David, *Encyclopedia of philosophy*, vol.III, Macmillan Publishing Co., 1967.
5. Bernays P., The Philosophy of Mathematics and Hilbert's Proof Theory, 1930. in [Mancosu, pp.234–265].
6. Cassou-Noguès Pierre, Hilbert, Les Belles Lettres, 2001.
7. Detlefsen M., *Hilbert's Program*, Dordrecht, 1986.
8. Ewald W. B. (ed), *From Kant to Hilbert*. A Source book in the foundations of Mathematics, vol. 2, Oxford University press, 1996.
9. Feferman S., Hilbert's Program relativized: Proof-Theoretical and foundational reductions, *Journal of Symbolic Logic*, 53(2), pp.284–304, 1988.
10. Gray J.J., *Le Défi de Hilbert*, Dunod, 2004.
11. Herbrand J., English translation: 'On the consistency of arithmetic', in: Heijenoort, J. van (Ed.) *From Frege to Gödel*. A source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard

University Press, Cambridge, Mass, pp.620–628, (1931)1967.
12. Hilbert D., The New Grounding of Mathematics, 1922, English translation in [Mancosu, pp.198–214]
13. Hilbert D., On the infinite, 1926, English translation in [Van Heijenoort, pp.367-392].
14. Hilbert D., The foundation of mathematics, 1927, English translation in [Van Heijenoort, pp.464–479].
15. Kreisel G., Hilbert's Program, 1983, *in philosophy of mathematices*, In Benacerraf and Putnam, pp.207–238.
16. Mancosu P., (ed.), *From Brouwer to Hilbert*. The Debate of the Foundations of Mathematics in the 1920s, Oxford University press, 1998.
17. Mancosu P., Hilbert and Berneys on metamathemetics, in [Mancosu(Ed.), pp.149–188]
18. Murawsk: R., On proofs of the consistency of arithmetic, *Studies in logic*, grammar and rhetoric 5(18), pp.41–50, 2002.
19. Sieg W., Hilbert's Program: 1887-1922. *Bulletin of symbolic Logic*, 5(1), pp.1–44, 1999.
20. Simpson S. G., Partial realizations of Hilbert's Program, *Journal of Symbolic Logic* 53(2), pp.349–363, 1988.
21. Slater B. H., Epsilon Calculi, *Logic Journal of IGPL* vol. 14, number 4, pp.535–590, 2006.
22. Tait W. W., Finitism, *Journal of Philosophy*. 78, pp.524–546, 1981.
23. Van Heijenoort J., (ed.), *From Frege to Gödel*. A source Book in mathematical Logic, 1897–1931, Harvard University press, 1967.
24. Zach R., Hilbert's Program, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2003.
25. Zach R., The practice of finitism. Epsilon calculus and consistency proofs in Hilbert's Program, *Synthese*, 137, pp.211–259, 2003.

별첨 1

힐버트가 「수학의 기초」(1927) 에서 제안한 공리군에서 처음 13개는 논리학의 공리이다. 여기에서 함의(implication) 에 관한 것이 4개, ' 그리고' 와 ' 또는' 에 관한 것이 6개, 부정에 관한 것이 2개 이며, ' 존재' 에 관한 ε-공리가 한 개 있다.

Ⅰ. 함축에 관한 공리

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
3. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
4. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Ⅱ. '∧'(and) 와 '∨'(or) 에 관한 공리

5. $A \wedge B \to A$
6. $A \wedge B \to B$
7. $A \to (B \to A \wedge B)$
8. $A \to A \vee B$

9. B →A ∨ B

10. ((A →C) ∧ (B →C))→((A ∨ B)→C)

Ⅲ. 부정(negation)에 관한 공리

11. (A →(B ∧ ∼B))→∼A (모순원리)

12. ∼(∼A) →A (이중부정)

Ⅳ. ε-공리

13. A(a) →A(εA)

Ⅴ. 통일성(equality) 공리

14. a=a

15. (a=b) →(A(a) →A(b))

Ⅵ. 수(number)에 관한 공리

16. a'≠0

17. (A(0) ∧ ∀a(A(a) →A(a'))) →A(b)

별첨2

힐버트식 술어논리체계는 명제논리에 두 개의 양화사 관련 공리와 일반화 (generalization)규칙을 추가해서 세워진 체계이다.

1) 공리계

(ε)∀xF(x) →F(t)

(I)∀ x(F→G) →(F→∀xG)(단 x∉FV(F))

2) 추론규칙

$$\frac{\vdash \Psi(x)}{\vdash \forall x \Psi(x)}$$

$\forall x P(x) \vdash \forall x(Q(x) \Rightarrow P(f(y)))$의 증명

1. $\forall x P(x) \Rightarrow P(f(y))(\varepsilon)$

2. $P(f(y)) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))(K)$

3. $(P(f(y)) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))) \Rightarrow \forall x P(x) \Rightarrow P(f(y)) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))(K)$

4. $\forall x P(x) \Rightarrow P(f(y)) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))(2, 3MP)$

5. $(\forall x P(x) \Rightarrow P(f(y)) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow P(f(y))) \Rightarrow \forall x P(x) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))(S)$

6. $(\forall xP(x) \Rightarrow P(f(y))) \Rightarrow \forall xP(x) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))(4, 5MP)$

7. $\forall xP(x) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))(1, 6MP)$

8. $\forall y(\forall xP(x) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y)))$(7, 일반화)

9. $\forall y(\forall xP(x) \Rightarrow Q(y) \Rightarrow P(f(y))) \Rightarrow \forall xP(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow P(f(y)))(I)$

10. $\forall xP(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow P(f(y)))(8, 9MP)$

11. $\forall xP(x)$ (가정)

12. $\forall y(Q(y) \Rightarrow P(f(y)))(10, 11MP)$,($\alpha$-재명명) QED

이 증명은 좀 복잡한데 가정을 마지막 단계에서 사용하기 때문이다. 자연연역과 순차식 계산에서는 일반화가 보다 수월하게 이루어진다. 2행에서 6행까지는 명제 논리식 $(a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow b$에서 a를 $\forall xP(x)$, b를 $P(f(y))$, c를 $Q(x)$로 대체한 것이다.

별첨3

ε-연산에서 양화사는 ε-용어로 대체하는 것 외에 ε-공리 도식(epsilon axiom schema)을 추가로 부여한다.

$$(\varepsilon xAx = st) \rightarrow \neg At$$

즉, t의 계승자가 A라는 속성을 지니면, t는 그 속성을 가질 수 없다는 것이다. 예컨대, 3이 소수라면, 2는 소수가 될 수 없다. - 이 단순한 공리가 수학적 귀납법을 증명하는데 쓰일 수 있다.

$$A(0) \wedge (x)(A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow (x)A(x)$$

이를 증명하기 위해서 귀류법을 사용하면,

$$A(0) \wedge (x)(A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow \neg(x)A(x)$$

수론에서 어떤 수는 0이거나 sn이다. 아래 '$\varepsilon x\neg Ax$' 를 여기에 대입해서 무슨 일이 생기는지 살펴 볼 차례이다.

- 만일 $\varepsilon x\neg Ax = 0$이면, $A(0)$가 주어졌으므로 $A\varepsilon x\neg Ax$가 되고, 이는 $(x)A(x)$이다. $\neg(x)A(x)$가 가정으로 주어졌으므로, $\neg A\varepsilon x\neg Ax$ 이는 $\varepsilon x\neg Ax$가 0이 될 수 없다는 사실을 나타낸다.

- 아래 $\varepsilon x \neg Ax = sn$ 이라고 하자. 위 ε-공리 도식에 의해

$$(\varepsilon x \neg Ax = sn) \rightarrow An$$

그런데 $(x)(Ax \rightarrow Asx)$ 이므로, $An \rightarrow Asn$ 이는 다시 $A\varepsilon x \neg Ax$ 를 요구하나 가정과 모순된다. 이렇게 ε-공리 도식은 수학적 귀납법을 증명한다.

정계섭 덕성여자대학교
Duksung Women's University
E-mail: kseopcheong@hanmail.net