한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제3호 (2011년 8월), 23–35

# 리만기하학에서 구면정리의 발전과 역사

# History and Development of Sphere Theorems in Riemannian Geometry

조민식 Minshik Cho

본 논문에서는 어떤 기하학적 양이 핀치되어 있으면 위상적 또는 미분위상적인 구면이 된다는 구면정리의 발전과 역사를 다루었다. 단면곡률의 핀칭과 관련하여, 고전적 핀칭 구면 정리에서 최근에 증명된 기념비적인 미분 핀칭 구면정리로 발전하는 과정의 역사를 기술하였다. 또 직경, 반경, 부피 등과 관련하여 계량불변량 구면정리와 미분 계량불변량 구면정리의 발전의 과정을 소개하였고, 구면정리와 관련된 미해결문제에 대한 역사를 기술하였다.

The sphere theorem is one of the main streams in modern Riemannian geometry. In this article, we survey developments of pinching theorems from the classical one to the recent differentiable pinching theorem. Also we include sphere theorems of metric invariants such as diameter and radius with historical view point.

*Keywords:* 구면정리(Sphere Theorem), 핀칭정리(Pinching Theorem), 계량불변량(Metric Invariant).

## 1 서론

원과 구는 모든 기하학적 도형 중에서 가장 아름답고 완벽한 것으로 간주되어 왔다. 고대 중국인들은 완벽한 미를 일컬어 천의무봉(天衣無縫)이라 칭했는데 구는 기하학에서의 유일무이한 천의무봉이라 할 수 있다. 구의 기하학의 역사는 매우 오래되어서 이미 기원전 2세기의 히파르쿠스(Hipparchus)까지 거슬러 올라가며 천문학의 발달과 더불어 구면삼각법이 발견되었고 항해, 지도제작 등에 활용되는 매우 실용적인 기하학이다.

현대에 이르러 기하학자들의 관심은 추상적인 공간에 대한 새로운 이론과 기법에 주로 몰려있고 유클리드기하학과 더불어 구의 기하학(또는 구면기하학)은 일종의 '죽은 분야' 취급을 받고 있다. 그러나 최근에야 구면기하학의 오래된 미해결문제였던 케플러

이 연구는 2009년도 한국교원대학교 학술연구비 지원을 받아 수행하였음.
MSC: 01A60, 01A65, 53-03 ZDM: A30
제출일: 6월 27일 수정일: 8월 17일 게재확정일: 8월 22일

의 추측이 풀리는 등[1) ] 구면기하학에는 아직도 많은 기본적이고 중요한 문제들이 미해결인체로 남아있다.

수학적으로 $n+1$ 차원의 유클리드 공간인 $\mathbf{R}^{n+1}$ 에 매립되어 있는 $S^n$ 을 통칭하는 구는 리만기하학의 관점에서 볼 때, 곡률이 양의 상수인 리만다양체로서 이른바 비교기하학 (comparison geometry) 에서 핵심적인 존재이다. 즉 미지의 리만 다양체의 곡률이 특정한 상수와 부등식으로 비교 관계에 있을 때, 상수 곡률을 가진 리만 다양체의 기하학적인 성질들이 비교되는 리만 다양체로 어느 정도 전이될 수 있다. 또한, 미지의 리만 다양체의 계량불변량 (metric invariant) 과 위상적 성질과의 상관관계를 찾아 리만 다양체의 정체를 찾아내는 인식화문제 (recognition problem) 에서도 구와 구의 기하학적 특징은 매우 중요한 역할을 한다. 이러한 관점에서 어떤 조건하에서 리만 다양체가 구와 거리동형인지, 또는 위상동형이거나 미분위상동형인지를 밝히는 정리들을 통칭 구면정리 (sphere theorems) 라고 한다.

구는 단순연결 되어있고 양의 상수곡률을 가지고 있는데 역으로 이러한 성질을 가진 리만 다양체는 구인가하는 문제를 자연스럽게 생각할 수 있다. 이러한 측면에서 이른바 핀칭문제 (pinching problem) 가 파생되었다. 리만다양체 $M$ 의 단면곡률을 $K_M$ 이라 할 때, $K_M$ 의 최대값과 최소값의 비인 $\delta = \frac{\min K_M}{\max K_M}$ 를 핀칭이라 하면 $\delta$ 는 상수 곡률에 얼마나 근접한지를 알려주는 양이라 할 수 있다.

호프 (H. Hopf) 에 의하여 제기된 핀칭문제는 라우치 (Rauch), 클링겐베르그 (Klingenberg), 베르제 (Berger) 등에 의하여 확립되고 발전되었으며 이후에도 그 내용이 일반화되고 개선되어 왔다. 최근에는 구와 위상동형이 되는 고전적 결과를 확장하여 동일한 조건하에서 구와 미분위상동형이 된다는 결론이 브렌들 (Brendle) 과 쉐엔 (Schoen) 에 의해 얻어졌다.

핀칭 구면정리에서는 단면곡률의 상한과 하한으로 조건이 주어지는데 여기에서 단면곡률 또는 일반화하여 리치곡률의 하한만 생각하고 다른 계량불변량에 관한 조건을 사용하는 일반화된 구면정리 또한 리만기하학에서 지금까지 활발하게 연구되는 분야이다. 이 분야에서 기념비적인 결과 중의 하나인 직경 구면정리 (diameter sphere theorem) 가 그로브 (Grove) 와 시오하마 (Shiohama) 에 의하여 증명된 이래로 주요 연구분야로 자리잡았고 그로모프 (Gromov) 에 의하여 도입된 그로모프-하우스도르프 거리 (Gromov-Hausdorff distance) 와 이에 근거한 수렴성을 이용한 방법 및 알렉산드로프 공간 (Alexandrov space) 등의 활용 등을 통하여 1980년대와 1990년대에 많은 연구결과들이 쏟아져 나왔다.

현재까지 다양한 형태의 구면정리들이 얻어졌는데 본고에서는 그 개략적인 흐름과 주요 결과들을 정리하고 향후의 흐름에 관하여 조명하고 고찰하려 한다. 이를 위해 2절에서는 기본 개념 및 기법들을 간단히 요약하고 3절에서는 핀칭 구면정리의 발전사와 최근까지의

1) 케플러의 추측은 1998년 헤일즈 (T. Hales) 에 의하여 해결되었다.

연구 결과들을 소개한다. 이어서 4절에서는 핀칭 구면정리의 일반화라 할 수 있는 직경 구면정리와 그로부터 파생되는 여러 문제들 및 거리불변량을 사용한 구면정리들과 기묘한 구와 미분 구면정리에 관한 내용들을 소개한다.

## 2 비교기하학의 기본 개념

이 절에서는 리만기하학에서 중요한 분야인 이른바 비교기하학의 기본적인 개념과 유용한 결과들을 간략하게 알아본다. 구면정리는 리만다양체의 곡률과 위상적 성질사이의 상관관계를 규명하는 문제의 특수한 경우에 해당한다. 리만기하학에서 등장하는 많은 비교정리들 중에서 리치곡률의 비교에서 절대적으로 중요한 비숍-그로모프의 부피 비교정리 (Bishop-Gromov volume comparison theorem) 등은 주로 단면곡률에 관한 문제들을 다루는 본 논문의 내용상 생략하였는데 자세한 사항은 참고문헌 [23]을 참조하면 좋다.

단면곡률에 관한 가장 강력한 비교정리중의 하나는 토포노고프 정리 (Toponogov theorem) 이다. 정리를 기술하기에 앞서 필요한 용어를 먼저 소개한다. 완비 리만다양체 $M$ 위의 점 $p$를 공유하는 두 측지선분 (geodesic segment) $\alpha_1, \alpha_2$는 힌지 (hinge) 를 결정한다. 측지선들이 호장에 의하여 매개화되어 있고 $\alpha_1(|\alpha_1|) = p = \alpha_2(0)$ 이라 할 때, 힌지의 각 $\theta$는 $\theta = \pi - \angle(\alpha_1'(|\alpha_1|),\ \alpha_2'(0))$ 이고 이 각은 내각이다. 여기에서 $|\alpha|$는 측지선분 $\alpha$의 길이를 나타낸다.

**정리 2.1 (토포노고프 정리):** 완비 리만다양체 $M^n$이 상수 $\kappa$에 대하여 단면곡률조건 $K \geq \kappa$를 만족하고, $S^n_\kappa$은 단면곡률이 $\kappa$인 단순연결된 리만다양체라고 하자.

(A) 꼭짓점이 $p, q, r \in M$이고 점 $q$에서의 힌지각이 $\theta$인 $M$ 위의 힌지와 대응꼭짓점이 $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in S^n_\kappa$ 이고 대응측지선분의 길이가 각각 같고 점 $\bar{q}$에서의 힌지각이 $\theta$인 $S^n_\kappa$ 위의 대응힌지에 대하여

$$d(p,r) \leq d(\bar{p},\bar{r})$$

가 성립한다.

(B) 꼭짓점이 $p, q, r$인 $M$ 위의 측지삼각형과 대응꼭짓점이 $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in S^n_\kappa$ 이고 대응측지선분의 길이가 각각 같은 대응측지삼각형에 대하여 $M$ 위의 삼각형의 내각 $\theta_i$에 대한 $S^n_\kappa$ 위의 대응삼각형의 내각을 $\bar{\theta}_i$라 할 때,

$$\bar{\theta}_i \leq \theta_i$$

가 성립한다.

1980년경 그로모프는 두 긴밀한 거리공간사이에 정의된 고전적인 하우스도르프 거리의 개념을 모공간 (ambient space) 이 없는 경우로 확장하였다. 먼저 $X, Y$가 거리공간 $Z$ 의

긴밀한 부분집합일 때, $X$ 와 $Y$ 사이의 하우스도르프 거리는

$$d_H^Z(X,Y) = \inf\{\,\epsilon > 0 \mid X \subset \bar{B}_\epsilon(Y),\ Y \subset \bar{B}_\epsilon(X)\}$$

인데, 이 때 $\bar{B}_\epsilon(X) = \{z \in Z \mid d(z,X) \leq \epsilon\}$ 이다.

긴밀한 거리공간 $X, Y$ 에 대하여 그로모프-하우스도르프거리 (G-H 거리) 는

$$d_{G-H}(X,Y) = \inf\{\, d_H^Z(f(X), g(Y))\}$$

로 정의된다. 이 때, 하한은 모든 거리공간 $Z$ 와 거리동형 매립사상 (isometric embedding) $f : X \to Z,\ g : Y \to Z$ 에 대하여 취한다. $d_{G-H}(X,Y) = 0$ 이면 $X$ 와 $Y$ 는 거리동형이 된다.

일반적으로 두 공간사이의 G-H 거리를 직접 계산하는 것은 용이하지 않으며 대체로 거리의 상한을 계산하여 사용하는 경우가 많다.

예를 들어, 긴밀한 거리공간 $X$ 의 직경 (diameter) 을 $\mathrm{diam}(X) = \max_{p,q} d(p,q)$ 라고 할 때, 두 긴밀한 거리공간 $X, Y$ 가 $\mathrm{diam}(X) \leq \frac{D}{2}$, $\mathrm{diam}(Y) \leq \frac{D}{2}$ 를 만족한다고 하자. $X \sqcup Y$ 에 대하여 $x \in X,\ y \in Y$ 일 때 $d(x,y) = \frac{D}{2}$ 라고 정의 하면 $d$ 는 거리가 되며 $X \subset \bar{B}_{\frac{D}{2}}(Y),\ Y \subset \bar{B}_{\frac{D}{2}}(X)$ 가 성립한다. 따라서 $d_{G-H}(X,Y) \leq \frac{D}{2}$ 임을 알 수 있다.

두 긴밀한 리만다양체사이의 G-H 거리가 충분히 가까우면 두 리만다양체는 위상적으로 비슷할까하는 의문은 일반적으로는 참이 아니다.

예를 들어, 단위구 $S^2$ 에 점점 작은 핸들을 붙여서 얻은 2차원 리만다양체열을 $M_i$ 라 하면 $\lim\limits_{i\to\infty} d_{G-H}(M_i, S^2) = 0$ 이지만 베티수 $b_1(M_i)$ 은 무한대로 발산한다. 이러한 현상은 단면곡률의 하한조건을 부여함으로서 막을 수 있지만 리만다양체의 G-H 극한은 일반적으로 리만다양체가 아닌 알렉산드로프 공간이 된다.

**정의 2.1 (긴밀한 거리공간의 곡률):** 단면곡률이 $\kappa$ 인 단순연결된 $n$-리만다양체를 $S_\kappa^n$ 이라 하자. 거리공간 $X$ 위의 임의의 점 $p$ 에 대하여 이웃 $U$ 가 존재하여 $U$ 에 속하는 네 점 $a, b, c, d$ 에 대하여 $a$ 에서의 비교각들이 $S_\kappa^2$ 에서 $\angle \bar{b}\bar{a}\bar{c} + \angle \bar{b}\bar{a}\bar{d} + \angle \bar{c}\bar{a}\bar{d}\ \leq 2\pi$ 를 만족할 때, $X$ 는 곡률조건 $\mathrm{curv}X \geq \kappa$ 를 만족한다고 한다.

내적 거리공간 (inner metric space) 은 두 점사이의 거리가 두 점을 연결하는 모든 곡선의 길이에 대한 하한으로 정의되는 거리공간이다.

**정의 2.2 (알렉산드로프 공간):** 유한차원의 완비된 내적 거리공간 $X$ 가 곡률조건 $\mathrm{curv}X \geq k$ 를 만족할 때, $X$ 를 알렉산드로프 공간이라고 한다.

G-H 위상 및 알렉산드로프 공간의 도입은 강력한 도구의 역할을 하며 1980년대 이후 리만기하학을 비약적으로 발전시켰다. 공간의 모임에서 G-H 극한을 취하거나 상공간 (quotient space) 인 구면현수(spherical suspension)를 만들거나 하는 작용들은 리만기하학에서는 닫혀있지 않지만 알렉산드로프기하학에서는 닫혀있으며 알렉산드로프기하학에서의 결과들은 곧잘 부산물로서 리만기하학의 결과들을 산출한다.

## 3 핀칭 구면정리와 미분 핀칭 구면정리

학부수준의 미분기하학에서 가장 핵심적인 가우스-보네 정리(Gauss-Bonnet theorem)를 이용하면 향을 줄 수 있는 긴밀한 곡면의 가우스 곡률이 양수이면 이 곡면은 구와 미분동형임을 알 수 있다. 또, 양의 가우스 곡률을 가진 긴밀한 곡면이 향을 줄 수 없는 경우는 사영평면과 미분동형임이 잘 알려져 있다.

19세기 리만의 등장 이후 현대의 기하학에서는 2차원 리만다양체인 곡면을 높은 차원으로 확장하여 문제를 일반화하는데 $n+1$ 차원의 유클리드 공간인 $\mathbf{R}^{n+1}$ 에 매립되어 있는 $n$ 차원 구 $S^n$ 은 곡률(단면 곡률)이 양의 상수이고 단위구인 경우는 그 값이 1 이다.

1926년 호프는 역으로 단순연결된 긴밀한 리만다양체 $M^n$ 의 단면곡률이 1이면 구와 거리동형임을 밝혔다.([14]) 일반적으로 단면곡률이 1인 긴밀한 리만다양체는 상다양체(quotient manifold) $S^n/\Gamma$ 와 거리동형인데, 이 때 $\Gamma$ 는 자유롭게 작용하는 유한 거리동형군이다. 이 상다양체는 흔히 구면 표준공간(spherical space form)이라고 표현한다. 구면표준공간은 $n$ 이 짝수이면 구 $S^n$ 과 실사영공간 $RP^n$ 뿐이지만 $n$ 이 홀수이면 무한히 많이 존재한다.

호프는 단순연결된 긴밀한 리만다양체 $M^n$ 의 단면곡률이 1에 충분히 가까우면 구와 위상동형일 것이라고 추측했다.

$M^n$ 이 단순연결된 긴밀한 리만다양체라 하고, 단면 곡률이 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$0 < \delta K_{\max} < K \le K_{\max}$$

필요하다면 리만계량에 상수를 곱하여 $K_{\max} = 1$ 이라 놓을 수 있다. 따라서 위의 조건은

$$0 < \delta < K \le 1$$

로 간단하게 쓸 수 있는데, 이 때 $M$ 은 $\delta$-핀치되어있다고 한다. '$M$ 이 $\delta$-핀치되어있다면 $M$ 은 구와 위상동형(또는 미분동형)이다.' 라는 것이 전형적인 핀칭 구면정리의 형태이다.

호프에 의해 제기된 이 문제는 1948–1949년 동안 스위스를 방문했던 라우치의 관심을 사로잡았고 라우치는 1951년 라우치 비교정리(Rauch Comparision theorem)을 개발하며 이 문제를 최초로 해결했다.([25])

라우치의 증명에서 $\delta \approx 0.75$ 였는데, 그는 $\delta$ 의 최적값은 무엇인가하는 문제를 제기했다. 클링겐베르그는 1959년 단사반경(injectivity radius)의 개념을 도입하여 다양체의 차원 $n$

이 짝수인 경우 $\delta \approx 0.55$로 낮추어 정리를 증명했고, 1960년 베르제는 토포노고프 정리를 사용하여 역시 짝수차원인 경우에 $\delta = \frac{1}{4}$로 더욱 개선된 결과를 얻었다. 클링겐베르그는 1961년에 곧 바로 베르제의 결과를 홀수차원까지로 일반화했다. 이로부터 구면 핀칭 정리에서 기념비적인 다음 결과가 확립되었다.([3],[16])

**정리 3.1 ($\frac{1}{4}$-핀칭 구면정리):** $M^n$이 단순연결된 긴밀한 리만다양체라 하자. 단면 곡률이 다음 조건을 만족하면

$$\frac{1}{4} < K \leq 1$$

$M$은 구와 위상동형이다.

증명의 기본 착상은 $M$이 두 개의 공에 의하여 덮일 수 있음을 밝히는 것이다. 그렇게 되면 위상수학에서의 일반화된 쉐엔플라이스 정리(Generalized Schoenflies theorem)에 의하여 $M$은 구와 위상동형이 된다.

간단히 요약하자면 먼저 $M$이 긴밀하므로 $\delta \leq K \leq 1$를 만족하는 $\delta > \frac{1}{4}$가 존재한다. $M$의 직경을 $\operatorname{diam}(M) = \max_{p,q} d(p,q)$이라 할 때, $d(p,q) = \operatorname{diam}(M)$이 되도록 두 점 $p, q$를 잡자. $d(p,q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ 인 경우 $M$은 $S^n(\delta)$와 거리동형이 되며, $d(p,q) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ 인 경우 $M$은 두 공 $B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}})$, $B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}})$에 의하여 덮인다. 이 두 공은 $M$에 매립되고 등거리 집합인 $E = \{x \in M \mid d(p,x) = d(q,x)\}$는 $S^{n-1}$과 미분동형이다. 두 매립 원판을 적도 $E$를 따라 붙임으로서 $M$과 $S^n$이 위상동형임을 보일 수 있는데 이 때 위상동형사상은 $S^{n-1}$에서 미분동형사상이 되는 붙임사상(attaching map) $f$에 의하여 얻을 수 있다.

$\frac{1}{4}$-핀칭 구면정리에서 $\frac{1}{4}$은 최적의 값이다. 만약 조건을 $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$로 바꾸게 되면 복소사영공간 $CP^n$이 이 조건을 만족하게 되므로 구면정리를 얻을 수 없다.

베르제는 곡률조건을 $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$로 바꾸면 $\operatorname{diam}(M) > \pi$ 인 경우는 $M$은 $S^n$과 위상동형이고 $\operatorname{diam}(M) = \pi$ 인 경우는 CROSS(compact rank one symmetric space)와 거리동형임을 밝혔다.([3]) CROSS에는 복소사영공간(complex projective space) $CP^n = S^{2n+1}/S^1$, 4원수사영공간(quaternionic projective space) $HP^n = S^{4n+3}/S^3$, 케일리면(Cayley plane) $CaP^2$이 있다.

1960년대 초에 확립된 $\frac{1}{4}$-핀칭 구면정리를 $\frac{1}{4}$보다 작은 핀칭으로 확대하기 위한 많은 후속 연구가 있었다. 1983년 베르제는 G-H 극한을 사용하여 짝수차원에서 $\frac{1}{4}$보다 작은 핀칭 구면정리를 얻었고([4]) 이것은 1987년 듀루메릭(Durumeric)에 의하여 일반화되었다.([8]) 짝수차원에서는 1996년 애브레쉬(Abresch)와 메이어(Meyer)에 의해 $\frac{1}{4}$ 핀칭조건이 완화되었는데 그 내용은 다음과 같다.([1])

**정리 3.2 ( $\delta < \frac{1}{4}$-핀칭 구면정리):** (1) $n$이 짝수일 때 단순연결된 긴밀한 리만다양체 $M^n$에 대하여 양의 상수 $\delta = \delta(n)$가 존재하여 $\frac{1}{4} - \delta \leq K \leq 1$을 만족하면, $M$은 $S^n$과 위상동형이

거나 CROSS와 미분동형이다.

(2) $n$이 홀수일 때 단순연결된 긴밀한 리만다양체에 대하여 $M^n$의 차원과 무관한 양의 상수 $\epsilon$이 존재하여 $\frac{1}{4(1+\epsilon)^2} \le K \le 1$ 을 만족하면, $M$은 $S^n$과 위상동형이다.

구면정리에서 중요한 문제 중의 하나는 구와 위상동형인 성질을 구와 미분동형인 성질로 더욱 구체화하는 것이 가능한가하는 점이다. 구와 위상동형이지만 구와 미분동형이 아닌 기묘한 구(exotic sphere)의 존재가 밀노어(Milnor)에 의하여 밝혀진 후 미분 구면정리는 새로운 주요 연구대상이 되었다. 특히 $\frac{1}{4}$-핀칭 구면정리에서 미분 구면정리가 가능한가는 다음과 같은 추측을 낳았다.

**추측 3.3 ($\frac{1}{4}$-핀칭 기묘한 구):** 기묘한 구에서 단면곡률이 $\frac{1}{4}$-핀치되는 리만계량은 허용되지 않는다.

일반적인 미분 핀칭 구면정리는 일찍이 1960년대부터 많이 연구되었는데 1966년 그로몰(Gromoll)과 칼라비(Calabi)(미출간)는 독립적으로 다음 사실을 보였다.([9])

**정리 3.4 (미분 핀칭 구면정리):** 단순연결된 긴밀한 리만다양체 $M^n$에 대하여 $\frac{1}{4} \le \delta < 1$ 인 양의 상수 $\delta = \delta(n)$가 존재하여 $\delta < K \le 1$ 이면 $M^n$은 $S^n$과 미분동형이다. 이 때, $n \to \infty$ 이면 $\delta(n) \to 1$이다.

1971년 스지모토(Sugimoto), 시오하마(Shiohama), 칼처(Karcher)는 $M$의 차원 $n$과 무관한 $\delta$에 대하여 같은 결과를 얻었는데 이들의 연구결과에서 $\delta = 0.87$이었다.([27]) 이러한 연구는 계속되어 $\delta$의 값은 계속 낮아졌으며 1975년 임 호프(Im Hof)와 루(Ruh)는 $\lim_{n\to\infty} \delta(n) = 0.68$이 되는 감소수열 $\delta(n)$이 존재하여 단순연결된 긴밀한 리만다양체 $M^n$이 $\delta(n)$-핀치되어있다면 $M$은 구면 표준공간과 미분동형임을 증명하였으며([[15]) 지금까지 알려진 가장 작은 $\delta$의 값은 1995년 수야마(Suyama)에 의하여 밝혀진 $\delta = 0.654$이다.([28])

핀칭은 리만 다양체 전체에서 단면곡률의 최솟값과 최댓값의 비를 재는 대역적 개념인데 이 보다 약한 조건인 점 핀칭(pointwise pinching)의 개념이 1982년 루에 의하여 도입되었다. 점 핀칭의 경우 곡면위의 점 $p$에서의 접공간에 속하는 2차원면에 대한 단면곡률들만을 비교해야된다는 제약이 따르며 다음과 같이 정의할 수 있다.

**정의 3.1 (점 핀칭):** 리만다양체 $M$위의 임의의 점 $p$와 임의의 2차원면 $\pi_1, \pi_2 \in T_pM$에 대하여 $0 < \delta K(\pi_1) < K(\pi_2)$이 성립하면 $M$은 점마다 $\delta$-핀치되어있다고 한다.

점 핀칭의 경우 토포노고프 정리 등을 쓸 수는 없지만 단순연결된 긴밀한 다양체 $M$이 점마다 $\frac{1}{4}$-핀치되어있을 때에도 $M$은 구와 위상동형임이 알려져 있다.([17]) 또 점 핀칭인 경우에도 미분 핀칭 구면정리가 증명되었지만 핀칭 상수가 $n \to \infty$이면 $\delta(n) \to 1$인 경우

였다. 그러다가 2009년에 추측 3.3을 해결하는 획기적인 결과가 브렌들과 쉐엔에 의하여 증명되었다.([5])

**정리 3.5 (미분 $\frac{1}{4}$-핀칭 구면정리):** 긴밀한 리만다양체 $M$이 점마다 $\frac{1}{4}$-핀치되어있다면 $M$은 구면 표준공간과 미분동형이다. 특히, 단면곡률이 $\frac{1}{4}$-핀치되는 리만계량이 허용되는 기묘한 구는 존재하지 않는다.

이 정리를 증명하는데 사용된 핵심적인 방법은 $\frac{1}{4}$-핀치되어있는 주어진 리만계량을 해밀튼(Hamilton)의 리치 흐름(Ricci flow)을 이용하여 상수곡률 1로 변형하는 것이다. 리치 흐름은 리만 계량에 대한 비선형 열방정식으로 파악되는 포물형 기하학적 진화 방정식이다. 문제는 초기 리만계량이 $\frac{1}{4}$-핀치되어 있더라도 진화과정에서 이 조건이 지속되지 못한다는 것인데 증명에서는 리치 흐름에 의해 보존되고 $\frac{1}{4}$-핀칭에 의하여 얻어지는 적절한 곡률 조건을 사용하였다.

## 4 계량불변량 구면정리와 미분 계량불변량 구면정리

직경, 반경, 부피 등의 계량불변량은 리만다양체의 '크기'를 가늠하는 양이다. 핀칭 구면정리에서는 곡률의 상한과 하한을 모두 제한하여 구와 기하학적, 위상수학적, 미분위상수학적으로 같기 위한 조건을 따지지만 이를 일반화하여 곡률의 하한만 사용하고 크기 조건을 추가하는 계량불변량 구면정리들이 1970년대 이후 활발하게 연구되었다.

완비된 리만다양체 $M^n$이 단면곡률 조건 $K \geq 1$을 만족하면 $M$은 긴밀하며 $\mathrm{diam}(M) \leq \pi$ 임은 곡면인 경우에 1855년 보네(Bonnet)에 의하여 밝혀졌다. 임의의 차원에서 1925년에 싱(Synge)은 공액점(conjugate point)에 관한 부등식을 얻었는데 당시에 호프-리노브 정리(Hopf-Rinow theorem)가 알려지기 전이었기 때문에 직경의 상한에 관한 결과에까지는 이르지 못했고 1935년에 마이어스(Myers)에 의하여 직경에 관한 현재의 결과가 확립되었다.([18]) 마이어스는 곧이어 1941년에 위의 결과를 리치곡률 조건으로 일반화하였다. 즉, 완비된 리만다양체 $M^n$이 리치 곡률조건 $\mathrm{Ric} \geq n-1$을 만족하면 $M$은 긴밀하며 $\mathrm{diam}(M) \leq \pi$ 임을 보였다.([19])

직경에 관한 이 결과에서 상한인 $\pi$는 바로 곡률이 1인 구의 직경이다. 리만다양체의 직경이 최대인 경우, 즉 $\mathrm{diam}(M) = \pi$인 경우에는 어떤가에 대한 문제는 단면곡률 조건과 리치곡률 조건하에서 각각 1959년 토포노고프와 1975년 쳉(Cheng)에 의하여 밝혀졌다.([29], [6])

**정리 4.1 (최대 직경정리):** $M^n$ 을 완비된 리만다양체라 하자.

(1) (Toponogov) $K \geq 1$이고 $\mathrm{diam}(M) = \pi$이면 $M$은 $S^n$과 거리동형이다.

(2) (Cheng) $\mathrm{Ric} \geq n-1$이고 $\mathrm{diam}(M) = \pi$이면 $M$은 $S^n$과 거리동형이다.

거리함수는 일반적으로 미분가능하지 않지만 모스이론(Morse theory)과 비슷하게 임계점에 관한 기하학적 이론이 그로브와 시오하마에 의하여 개발되었다.

이 이론에 따르면 리만다양체 $M$ 위의 점 $p$가 있을 때, 거리함수 $f(x) = d(x,p)$의 임계점 $q$는 기하학적으로 정의된다. 즉 임의의 벡터 $v \in T_qM$ 에 대하여 $\langle v, \alpha'(0)\rangle \geq 0$ 을 만족하는 $p$로부터 $q$까지 최소측지선 $\alpha$가 존재할 때, $q \in M$ 을 임계점이라 한다. 이 정의에 따르면 $p$는 자동적으로 $f(x) = d(x,p)$의 임계점이며 $q \neq p$일 때, 위의 내적조건은 $\angle(v, \alpha'(0)) \geq \frac{\pi}{2}$와 같다.

거리함수에 관한 임계점이론은 매우 유용한 이론이어서 많이 사용되고 있으며 1977년 그로브와 시오하마는 최대 직경 조건을 약화시켜 직경이 충분히 큰 경우에 다음의 유명한 결과를 얻었다.([11])

**정리 4.2 (직경 구면정리):** $M$이 긴밀한 리만다양체라 하자. $K \geq 1$ 이고 $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ 이면 $M$은 구와 위상동형이다.

증명의 기본 착상은 직경의 양 끝점 $p, q$ 즉, $d(p,q) = \text{diam}(M) = d$일 때 $f(x) = d(x,p)$의 임계점은 오직 $\{p,q\}$ 뿐임을 확인하는 것이다. 이로부터 $M$은 $p, q$ 를 중심으로 하는 한 점으로 줄일 수 있는 두 $\frac{\text{diam}(M)}{2}$-공에 의하여 덮일 수 있다.

간단히 요약하자면 $x \in M - \{p,q\}$ 이고 $x$로부터 $p$와 $q$까지의 두 측지선의 사잇각을 $\theta$라 놓고 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$라 가정하자. $a = d(p,x),\ b = d(x,q)$라고 하면 토포노고프 정리와 구면코사인 법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$0 \geq \cos d \geq \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\theta \geq \cos a \cos b$$

따라서 $\cos a$와 $\cos b$ 값의 부호는 서로 반대이다. 그러므로 가령 $0 < \cos a < 1$ 이면 $\cos d > \cos b$ 인데 이는 $b > d = \text{diam}(M)$ 임을 뜻하므로 모순이다. 따라서 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 이다.

직경 구면정리에서 직경조건 $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$은 더 낮출 수 없는 최적의 조건이다. 왜냐하면 실사영공간 $RP^n$은 $K = 1$ 이고 $\text{diam}(M) = \frac{\pi}{2}$을 만족하기 때문이다.

한편 직경 구면정리는 단면곡률 조건을 리치곡률 조건으로 약화하면 참이 아님이 1990년 앤더슨(Anderson)과 1991년 오츠(Otsu)에 의하여 독립적으로 밝혀졌다.([2], [20]) 따라서 리치곡률 조건으로 문제를 일반화하려면 추가조건이 필요하며 다양한 조건하에서 여러 종류의 구면정리가 얻어졌다. 그중에서 1995년과 1996년 각각 페렐만(Perelman)과 콜딩(Colding)에 의하여 독립적으로 증명된 다음 결과가 대표적이라 할 수 있다.([21], [7])

**정리 4.3 (리치곡률 직경 구면정리):** 자연수 $n \geq 2$와 실수 $k$에 대하여 양수 $\epsilon = \epsilon(n,k)$가 존재하여 긴밀한 리만다양체 $M^n$이 $\text{Ric} \geq n-1,\ K \geq k$ 그리고 $\text{diam}(M) \geq \pi - \epsilon$을 만족하면 $M$은 구와 위상동형이다.

계량불변량 구면정리에서도 미분 구면정리가 가능하다. 특히 직경 구면정리에서 미분 구면정리가 가능한가는 다음과 같은 추측을 낳았다.

**추측 4.4 (직경 미분 구면정리-1):** 양수 $\epsilon = \epsilon(n)$ 이 존재하여 긴밀한 리만다양체 $M^n$ 이 $K \geq 1$ 그리고 $\mathrm{diam}(M) \geq \pi - \epsilon$ 을 만족하면 $M$ 은 구와 미분동형이다.

위의 추측에서 직경조건을 반경조건으로 바꾸면 참임이 1989년 시오하마와 야마구찌 (Yamaguchi) 에 의하여 증명되었는데 ([26]) 그들은 논문에서 제한된 직경이라는 용어를 썼으나 나중에 반경이라는 용어로 통일되었다. 여기에서 긴밀한 $M$ 의 반경 (radius) 은 $\mathrm{rad}(M) = \min_p \max_q d(p,q)$ 으로 정의되며 $\mathrm{rad}(M) \leq \mathrm{diam}(M) < 2\mathrm{rad}(M)$ 이고 단위구의 경우 $\mathrm{rad}(S^n) = \pi = \mathrm{diam}(S^n)$ 이다.

반경조건하에서는 리만다양체의 경우보다 더 일반적으로 알렉산드로프공간으로 구면정리를 확장할 수 있는데 다음은 1993년 그로브와 피터슨 (Petersen) 에 의하여 증명된 사실이다. ([12])

**정리 4.5 (알렉산드로프 공간에서 반경 구면정리):** 알렉산드로프 공간 $X^n$ 이 $\mathrm{curv}X \geq 1$ 과 $\mathrm{rad}(X) > \frac{\pi}{2}$ 를 만족하면 $X$ 는 구와 위상동형이다.

추측 4.4와 같은 문제를 생각할 때, 주어진 조건을 만족하는 리만다양체들의 모임을 생각하는데 (단면) 곡률의 하한이 정해진 $n$ 차원 리만다양체들의 G-H 극한은 알렉산드로프 공간이 된다. 이 때 이 알렉산드로프 공간의 차원은 $n$ 이하이고 차원이 $n$ 보다 작아지는 경우 붕괴 (collapse) 되었다고 하며 붕괴를 피하려면 부피의 하한조건이 필요하다. 붕괴가 일어나지 않는 경우 위상 안정성 (topological stability) 이 있음이 페렐만에 의하여 밝혀졌다. 즉 곡률조건 $\mathrm{curv}X \geq k$, $\mathrm{curv}Y \geq k$ 를 만족하는 두 알렉산드로프공간 $X^n$, $Y^n$ 에 대하여 양수 $\epsilon$ 이 존재하여 $d_{GH}(X,Y) < \epsilon$ 이면 $X$ 와 $Y$ 는 위상동형이다. ([22])

추측 4.4에서 부피에 관한 제한이 없기 때문에 붕괴가 발생할 수 있다. 추측 4.4의 조건을 만족하는 리만다양체들의 G-H 극한은 알렉산드로프 공간인데 $\mathrm{curv}X \geq 1$ 이고 $\mathrm{diam}(X) = \pi (= \mathrm{diam}(S^n))$ 인 알렉산드로프공간 $X$ 는 거리동형 측면에서 구가 아닌 구면현수 (spherical suspension) $\Sigma E$ 임이 알려져 있다. 여기에서 $E$ 는 $\mathrm{curv}E \geq 1$ 이고 $\mathrm{dim}E = \mathrm{dim}X - 1$ 을 만족하는 알렉산드로프공간이다.

그로브와 빌헬름 (Wilhelm) 은 1997년 직경문제에 관하여 붕괴가 일어나지 않는 경우에 다음과 같은 결과를 얻었다. ([13])

**정리 4.6 (기묘한 구의 계량 제한):** 임의의 긴밀한 리만다양체 $M^n$ 이 $\mathrm{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ 을 만족하면 구뿐 아니라 $M$ 이 양의 곡률을 갖게 하는 계량의 G-H 극한인 알렉산드로프 공간 $X^n$ 이 존재한다.

따라서 페렐만의 위상안정성과 같은 종류의 미분안정성이 보장된다면 긴밀한 리만다양체

$M^n$ 이 $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ 을 만족할 때, $M$ 은 구와 미분동형이 될 것이다. 또한 윌킹(Wilking)은 긴밀한 리만다양체 $M^n$ 이 $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ 을 만족하는 기묘한 구 $M$ 이 존재하면 $M$ 은 최대직경 즉, $\text{diam}(M) \approx \pi$ 을 갖는 계량을 가짐을 보였다.([31]) 다시 말해서 추측 4.4는 다음과 같이 일반적인 형태로 바꿀 수 있다.

**추측 4.7 (직경 미분 구면정리-2):** 긴밀한 리만다양체 $M^n$ 이 $K \geq 1$ 그리고 $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ 을 만족하면 $M$ 은 구와 미분동형이다. 즉 $K \geq 1$ 그리고 $\text{diam}(M) > \frac{\pi}{2}$ 을 만족하는 기묘한 구는 존재하지 않는다.

그러나 아직까지 추측 4.7은 밝혀지지 않았다. 실제로는 곡률이 양인 기묘한 구가 존재하는지의 여부도 최근까지 밝혀지지 않았었다. 1974년 그로몰과 메이어는 한 점에서 양의 단면곡률을 갖고 전체적으로 음이 아닌 단면곡률을 갖는 7차원의 기묘한 구가 존재함을 보였다.([10]) 이러한 구를 흔히 그로몰-메이어 구(Gromoll-Meyer sphere)라고 부르는데 2001년 빌헬름은 그로몰-메이어 구의 단면곡률은 거의 양임을 보였다.([30]) 즉, 곡률이 양이 아닌 부분은 측도가 0임을 보였다. 그리고 최근에 피터슨과 빌헬름은 그로몰-메이어 구에 양의 단면곡률이 허용됨을 밝혀냈다.([24])

## 5 결론

구면정리는 현대 리만기하학의 중요한 연구분야 중의 하나이며 끊임없이 발전하는 활동적인 연구대상이다. 본 논문에서는 고전적인 핀칭 구면정리의 발전과정의 최근에 증명된 기념비적인 미분 핀칭 구면정리로의 귀결까지를 소개하고 직경, 반경 등에 관한 계량불변량 구면정리의 핵심적인 결과 및 발전과정과 아직까지 해결되지 않은 내용들의 역사를 소개하였다.

긴밀한 리만다양체 $M$ 에 대하여 단순연결된 $\frac{1}{4}$-핀칭조건, 반경조건, 직경조건은 집합으로

$$\begin{aligned}\{M \mid 4 \geq K \geq 1, \pi_1(M) = 0\} &\subset \{M \mid K \geq 1, \text{rad}(M) \geq \frac{\pi}{2}\} \\ &\subset \{M \mid K \geq 1, \text{diam}(M) \geq \frac{\pi}{2}\}\end{aligned}$$

을 만족하므로 구면정리의 역사적 과정은 일반화되어가는 과정이면서 직경문제를 해결하기위한 전초 단계로 반경이 도입되는 등 때로는 연구문제와 대상을 확장해 가는 과정이기도 하였다.

호프와 라우치에 의하여 시작된 리만다양체의 기하학적 성질과 위상적 성질의 상관관계에 대한 규명은 1960년대와 1970년대에 본격적으로 시작되어 1980년대에 G-H 위상과 수렴성을 활용하며 비약적으로 발전했고 1990년대에는 리치 곡률에 관한 많은 문제들이

해결되었으며 2000년대에 들어서는 리치 흐름을 이용하여 기념비적인 연구 성과가 있었다.

본 논문에서는 그중에서도 구면정리로 내용을 제한하고 유한정리 (finiteness theorem), 양의 곡률을 가진 리만다양체 분류문제, 리치곡률에 관한 문제 등 많은 내용을 생략하였다. 또한 전문적인 내용은 피하고 역사적인 발전과정을 위주로 소개했는데 엄밀한 수학적 내용은 참고문헌들을 참조하길 바란다.

## 참고 문헌


1. U. Abresch & W. Meyer, A sphere theorem with a pinching constant below $\frac{1}{4}$, *J. Diff. Geom.* 44(1996), 214–261.
2. M. Anderson, Metrics of positive Ricci curvature with large diameter, *Manu. Math.* 68(1990), 405–415.
3. M. Berger, Les variétés Riemanniennes 1/4-pincées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 14(1960), 161–170.
4. M. Berger, Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de 1/4, *Ann. Inst. Fourier(Grenoble)* 33(1983), 135–150.
5. S. Brendle & R. Schoen, Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms, *J. of Amer. Math. Soc.* 22(2009), 287–307.
6. S. Y. Cheng, Eigenvalue comparision theorems and its geometric applications, *Math. Z.* 143(1975), 289–297.
7. T. Colding, Large manifolds with positive Ricci curvature, *Invent. Math.* 124(1996), 193–214.
8. O. Durumeric, A generalization of Berger's theorem on almost 1/4-pinched manifolds II, *J. Diff. Geom.* 26(1987), 101–139.
9. D. Gromoll, Differenzierbare Strukturen und Metriken positive Krümmung auf Sphären, *Math. Ann.* 164(1966), 353–371.
10. D. Gromoll & W. Meyer, An exotic sphere with nonnegatively sectional curvature, *Ann. of Math.* 100(1974), 401–406.
11. K. Grove & K. Shiohama, A generalized sphere theorem, *Ann. of Math.* 106(1977) 201–211.
12. K. Grove & P. Petersen, A radius sphere theorem, *Invent. Math.* 112(1993), 577–583.
13. K. Grove & F. Wilhelm, Metric constraints on exotic spheres via Alexandrov geometry, *J. Reine. Angew. Math.* 487(1997), 201–217.
14. H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *Math. Ann.* 95(1926), 313–339.
15. H. Im Hof & E. Ruh, An equivariant pinching theorem, *Comment. Math. Helv.* 50(1975), 389–401.
16. W. Klingenberg, Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, *Comment. Math. Helv.* 35(1961), 47–54.
17. M. J. Micallef & J. D. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, *Ann. of Math.* 127(1988), 199–227.
18. S. B. Myers, Riemannian manifolds in the large, *Duke. Math. J.* 1(1935), 39–49.

19. S. B. Myers, Riemannian manifolds with positive mean curvature, *Duke. Math. J.* 8(1941), 401–404.
20. Y. Otsu, On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter, *Math. Z.* 206(1991), 255–264.
21. G. Perelman, A diameter sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature, *Math. Z.* 218(1995), 595–596.
22. G. Perelman, Alexandrov's spaces with curvature bounded from below II, preprint.
23. P. Petersen, *Riemannian Geometry*(2nd ed.), Graduate Texts in Mathematics 171, Springer-Verlarg, New York, 2006.
24. P. Petersen & F. Wilhelm, An exotic sphere with positive sectional curvature, arXiv:Math/DG/0805.0812v3.
25. H. Rauch, A contribution to differential geometry in the large, *Ann. of Math.* 54(1951), 38–55.
26. K. Shiohama & T. Yamaguch, Positively curved manifolds with restricted diameters, *Perspectives in Math.*, Vol. 8: Geometry of Manifolds, ed. Shiohama K., Academic Press, Boston(1989), 345–350.
27. M. Sugimoto, K. Shiohama, & H. Karcher, On the differentiable pinching problem, *Math. Ann.* 195(1971), 1–16.
28. Y. Suyama, A differentiable sphere theorem by curvature pinching, *II, Tohoku Math. J.* 47(1995), 15–29.
29. V. A. Toponogov, Riemannian spaces with curvature bounded below, *Uspekhi. Mat. Nauk* 14(1959), 87–130.
30. F. Wilhelm, An exotic sphere with positive curvature almost everywhere, *J. Geom. Anal.* 11(2001), 519–560.
31. B. Wilking, Nonnegatively and Positively Curved Manifolds, *Surveys in differential geometry*, Vol. XI: Metric and Comparison Geometry, ed. Grove K. and Cheeger, J. 7, Internat. Press(2007), 25–62.

조민식 한국교원대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education
E-mail: mscho@knue.ac.kr