한국학교수학회논문집 제 14 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 14, Number 1, 043-064, March 2011

겉넓이 학습을 위한 수학적 모델링에서 나타난 추상화 과정 및 겉넓이 이해에 관한 연구[1)]

홍지연[2)] · 김민경[3)]

본 연구의 목적은 초등학교 6학년 아동을 대상으로 하여 수학적 모델링을 적용한 입체도형의 겉넓이 수업에서 학습이 이루어지는 동안 나타나는 학생들의 추상화 과정을 분석하고 학습에 대한 사전·사후의 겉넓이 이해 검사 결과를 비교함으로써 겉넓이에 대한 이해 정도를 알아보고자 함이다. 학생들의 추상화 과정을 분석한 결과 학생들은 주어진 수학적 모델링 과제를 해결하는 동안 수학적 원리를 포함한 모델을 개발하면서 모둠별로 각기 다른 수준의 추상화 과정을 나타냈으며, 겉넓이 이해 검사 결과 사후 검사에서 학생들의 겉넓이에 대한 이해가 향상되었다.

주요용어 : 모델링, 수학적 모델링, 초등 수학, 겉넓이 학습, 추상화, 문제해결

I. 서 론

21세기 현대 사회는 일상생활에서 일어나는 여러 가지 문제들을 합리적으로 판단하고 해결하는 능력을 필요로 하고 있다. 이러한 시대적 요구에 따라 수학교육에서는 학습자의 자기 주도적 학습 능력과 창의적인 사고력 증진을 위하여 생활 주변 현상이나 구체적 사실을 학습 소재로 하여 수학의 기초 개념 및 원리를 지도하여(교육인적자원부, 1997) 현실 세계의 다양한 문제에 대한 수학적 문제해결능력을 향상시킬 것을 수학과의 목표로 제시하고(교육인적자원부, 2007), 학생들로 하여금 생활 주변 현상에서 파악된 문제 상황을 수학적 지식과 사고를 바탕으로 해결하고 이러한 과정에서 수학적 개념과 원리를 탐구하도록 강조하고 있다(교육과학기술부, 2008).

이와 같은 학생들의 실생활 문제해결능력 향상과 관련하여 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM](1991)은 현실 세계의 문제를 수학화하는 능력을 강조하고 이를 위한 하나의 방안으로 수학적 모델링을 제시하고 있다. 수학적 모델링은 구조화되지 않은 현실 세계의 현상에 수학을 응용·적용하고 해석, 분석, 종합함으로써 문제를 해결하는 하나의

---

1) 이 논문은 2008년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2008-327-B00627)
2) 이화여자대학교 대학원(cutty-hjy@hanmail.net)
3) 이화여자대학교(mkkim@ewha.ac.kr) 교신저자

방법(Galbraith & Clatworthy, 1990; Swetz & Hartzler, 1991; Zbiek, 1998)으로서, Edwards와 Hamson(1989)은 현실 세계에서 얻어진 문제를 이해하는 것에서 시작하여 문제를 구조화하여 변수를 정하고, 그 변수들 사이의 관계를 가설로 설정하여 이를 수학적 표상으로 표현한 후, 실세계 자료를 통해 그 타당성을 검증하고 특정한 해를 구하는 과정을 수학적 모델링으로 보았다. 또 English(2006)는 수학적 모델링이 아동들로 하여금 스스로 자신만의 수학적 아이디어와 절차를 개발하고 일반화시키도록 하고, 일반화가 가능하고 재사용이 가능한 관계들의 구조를 형성하도록 요구한다고 주장하였다. 이러한 수학적 모델링의 지도는 우리나라의 학교수학교육에서도 강조되고 있는데, 최근 고시되어 실시되고 있는 2007년 개정 수학과 교육과정은 이러한 수학적 모델링의 지도를 통해 학생들로 하여금 주변 현상에 나타난 본질적인 개념과 원리를 발견하고 이해하도록 해야 함을 제시・강조하고 있다(교육과학기술부, 2008).

수학적 모델링에 대한 최근의 연구에서 모델링 문제는 문제해결자들이 전통적인 학교 경험을 넘어 수학적으로 사고하기 시작하도록 하고, 일반화 되는 결과물이 복잡한 인공물이나 개념적 도구를 포함하며, 어떤 목적을 실제적으로 수행하도록 하는 복잡한 상황으로서, 모델링 문제를 해결하는 과정에 대한 분석은 아동들이 문제해결을 통해 얼마나 독립적으로 구조와 절차를 발달시키고 있는가를 알 수 있게 해준다(English, 2006). 이렇게 수학적 모델링을 통하여 문제를 해결하는 활동은 아동으로 하여금 추상화된 개념과 원리, 법칙을 다루는 수학을 실세계의 맥락과 연결 시켜 학습하도록 하고, 나아가 학습자 스스로 현실의 상황을 추상화하고 형식화함으로써 수학적으로 문제를 해결하는 능력을 향상시키는 하나의 방안으로 학교수학교육에 적용될 수 있다. 하지만 우리나라의 경우 학교 현장에서 학생들이 실생활 맥락의 복잡한 문제 상황을 경험할 기회가 부족할 뿐만 아니라, 특히 아동들의 문제해결 과정 분석과 관련된 선행연구가 많이 부족한 실정이다.

이에 본 연구에서는 수학적 모델링을 활용한 초등학교 6학년 1학기 입체도형의 겉넓이 학습을 설계하여 초등학교 현장에 적용하여 학습 과정 중에 학생들에게 나타나는 추상화 과정을 분석하여 보고, 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습의 효과에 대하여 알아보고자 하며, 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

1. 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타난 학생들의 추상화 과정은 어떠한가?
2. 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타난 학생들의 겉넓이 이해 정도는 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 수학적 모델링

수학적 모델링은 비구조화된 실세계 현상에 수학을 응용하여 실세계의 관계를 재해석하고 수학적 표상으로 표현함으로써 문제를 해결하는 하나의 방법으로(Edwards & Hamson, 1989; Galbraith & Clatworthy, 1990; Swetz & Hartzler, 1991; Zbiek, 1998), 아동 스스로가 자신만의 수학적 아이디어와 절차를 개발하고 일반화시켜 다른 문제 상황에 일반화가 가능하고 재사용이 가능한 관계의 구조를 형성하도록 요구한다(English, 2006).

이러한 수학적 모델링은 수학의 교수 학습에 대한 접근에 있어서 세 가지 중요한 변화를 포함하는데(Doerr & English, 2003), 첫 번째로 수학적 모델링은 아동으로 하여금 그들 스스로에게 의미 있는 방식으로 상황을 수학화하도록 요구함으로써 학생들로 하여금 문제의 정보를 해석하는 순환적인 절차, 관련된 양의 선택, 새로운 양을 유도하는 연산의 발견, 의미 있는 표상의 창조 등을 하도록 한다. 수학적 모델링은 두 번째로 유용한 구조나 모델을 창조하도록 이끄는 의미 있는 맥락을 사용하는데, 경험적이고 실제적인 맥락을 통해 학생들의 수학화 기능 성장의 기반을 제공하고 학생들로 하여금 교실을 넘어 일상생활에서 생성력 있는 자원으로서 수학을 사용하도록 한다(Freudenthal, 1973; Stevens, 2000; Streefland, 1993). 세 번째로 수학적 모델링은 학생들로 하여금 모델을 일반화 가능하도록 개발하고 다듬도록 하는데, 학생들은 자신들의 활동 결과물이 다른 사람들에 의해 공유되고 사용되도록 함으로써 팀과 다른 학급의 구성원들에 의해 모델에 대한 구성적인 피드백을 제공받게 된다.

모델링 활동은 전통적인 문제해결과 두 가지 측면에서 다른데(Mousoulides, Christou & Sriraman, 2008), 첫째 학생들은 모델링 문제를 해결하면서 수학적 개념과 연산을 연결시키고 사용하게 된다(Lesh & Zawojewski, 2007). 이것은 학생들로 하여금 문제를 풀면서 자기 스스로 수학을 유도하고 수학화가 필요한 현실적인 상황을 이해하도록 하는 기회를 제공한다. 둘째로 모델링 활동은 전통적 문제해결과 달리, 학생들로 하여금 유사한 구조를 가진 다른 문제에 적용할 수 있는 모델을 창조하도록 함으로써 학생들이 자신의 해결방법을 일반화하고 확장시킬 수 있도록 한다(Doerr & English, 2003; English, 2006).

Boaler(2001) 외의 여러 연구들(English & Watters, 2005a, 2005b; Llinares & Roig, 2008; Mousoulides, Christou & Sriraman, 2008; Zbiek & Conner, 2006 등)에 따르면, 이러한 수학적 모델링은 초・중등학교 현장에 적용됨으로써 학생들로 하여금 스스로 현실 상황을 단순화, 형식화, 추상화하여 수학적으로 문제를 해결하고, 이를 또 다른 실세계 맥락 문제에까지 일반화할 수 있도록 하는 긍정적인 효과를 나타내었다. 하지만 우리나라의 초등학교 현장의 경우 학생들 스스로가 수학적 모델링을 통해 현실 맥락의 복잡한 문제 상황을 스스로 추상화하여 해결할 수 있는 경험의 기회가 부족한 실정이며, 특히 실생활 맥락 문제를 바탕으로 한 겉넓이 학습에 관한 연구가 미흡한 실정이다.

2. 수학적 추상화

추상화(abstraction)는 이전에 구성된 수학을 수직적으로 재조직 하여 새로운 수학적 구조로 재구성하는 것으로(Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001), 정신이 정신적 아이템, 혹은 행동의 모음을 선택하고, 조화시키고, 기억에 등록하는 절차를 말한다(Battista, 1999).

Piaget(1972, 2001)는 추상화를 경험적 추상화(empirical abstraction), 의사-경험적 추상화(pseudo-empirical abstraction), 반영적 추상화(reflective abstraction)의 세 가지 형태로 구분하였는데, 경험적 추상화는 돌의 무게나 색깔과 같이 감각적으로 지각할 수 있는 대상의 특징과 관련된 것으로, 대상 및 대상의 속성에 초점을 둔다. 의사-경험적 추상화는 돌의 개수를 세는 것과 같이 대상에 대한 행동과 관련된 것으로, 대상에 대한 행위 및 행위의 속성에 초점을 두며, 반영적 추상화는 개수 세는 행동을 통해서 교환 가능성을 발견하는 것과 같이 대상에 대한 행동들의 상호관계성과 관련된 것으로, 이것은 정신적인 개념에 대한 정

신적인 행위를 통해 일어나게 된다(Gray & Tall, 2007; Ozmantar & Mnaghan, 2007).

추상화와 관련하여 Battista(1999)는 추상화를 지각적 수준(perceptual level), 내재화 수준(internalized level), 내면화 수준(interiorized level)의 세 수준으로 보았는데, 우선 지각적 수준(internalized level)은 경험적 흐름에서 항목을 분리시키는 것으로 감각적인 특성을 분리하는 것이며, 지각적 추상화에서 추상화된 항목은 표현되거나 조작되지 않는다. 내재화 수준(internalized level)은 지각적인 입력이 없이도 자료가 재표현될 수 있도록 충분히 추상화되는 수준으로, 감각기관에 의한 직접적인 자극 없이 감각적인 항목을 표현하거나 재현하게 되며, 내면화된 대상은 단지 표현될 뿐 그것의 구조가 분석되지는 않는다. 내면화 수준(interiorized level)은 다른 지각적 자료로 투사되고 새로운 상황에 활용되는 것을 포함하여, 본래의 지각적 맥락에서부터 자료가 꺼내져서 상상 속에서 자유롭게 조작될 수 있는 수준을 말하는데, 이러한 내면화(interiorization)와 관련하여 Steffe와 Cobb(1988, p.337)은 "내면화는 추상화의 가장 일반적인 형태이며, 그것은 경험적인 사물과 활동으로부터 구조, 패턴, 조작을 분리시킨다"고 언급하였다. 내면화 수준에서도 특히 내면화의 두 번째 수준(second level of interiorization)에서는 대상이 재표현되지 않아도 조작될 수 있으며, 이것을 상징으로 대체되어 사용될 수 있다.

이와 같은 추상화는 구체물을 통하여 구체적이고 실제적인 관찰과 사고를 통해 학습을 하게 되는 아동들에게는 어려운 것으로 여겨지는 것이 일반적이었으나, 어린 아이들도 추상적으로 사고하는 것이 가능하다고 믿었던 Kohnstamm(1948)의 연구 및 20년 후에 이루어진 또 다른 Kohnstamm(1967)과 Sheppard(1973)의 연구에서 Piaget가 제안했던 나이보다 더 어린 나이의 아동들에게 추상화를 가르칠 수 있음이 나타나고(van Oers & Poland, 2007), Davydov(1990)와 Egan(2002)의 연구에 의하여 아동들이 추상적으로 사고하는 것이 가능하다는 것이 경험적으로 증명됨에 따라 수학교육에서의 아동의 추상화 과정에 대한 연구들이 이루어지고 있다. 아동의 추상화와 관련된 최근 연구의 하나로 van Oers와 Poland(2007)의 연구에 따르면, 어린 아동들도 추상적 사고가 가능하며, 아동들의 활동에서 의미 있는 역할을 수행하는 도식화 활동이 제공된다면 추상적으로 사고하는 기능이 발달될 수 있다.

3. 입체도형의 겉넓이 관련 교육과정 분석

입체도형의 겉넓이 학습과 관련하여 NCTM(2000)은 초등학교 3~5학년 학생들은 직육면체의 겉넓이 및 부피를 구하는 전략을 개발할 수 있어야 한다는 규준을 제시하고, 학생들이 타일이나 정육면체 등을 활용한 측정 활동과 정보의 조직, 패턴 관찰, 일반화를 통해 겉넓이 및 부피를 구하는 전략을 개발하도록 함으로써 구체적인 경험을 바탕으로 사물에 대한 측정 결과와 측정값을 구하는 공식 사이의 관계를 이해하도록 하고 있다.

우리나라의 경우, 2007년 개정 수학과 교육과정에 따르면 입체도형의 겉넓이는 초등학교 6학년의 학습과정으로서 6학년 1학기에는 직육면체와 정육면체의 겉넓이를, 6학년 2학기에는 원기둥의 겉넓이를 학습하도록 되어있으며, 특히 직육면체와 정육면체의 겉넓이 학습과 관련하여 직육면체의 겉넓이는 각 면의 넓이를 각각 구해서 더하는 방법과 넓이가 같은 면을 찾아 더하는 방법, 전개도의 넓이를 구하는 방법 등 학생들로 하여금 다양한 방법으로 겉넓이를 구할 수 있도록 하고, 여러 방법으로 겉넓이를 구하는 방법을 이해한 후에 일반적인 방법으로 겉넓이를 구할 수 있도록 하고 있지만(교육과학기술부, 2008), 학생들이 실제적

이고 실생활 맥락적인 문제를 경험하기는 어려운 상황이다.

III. 연구 방법

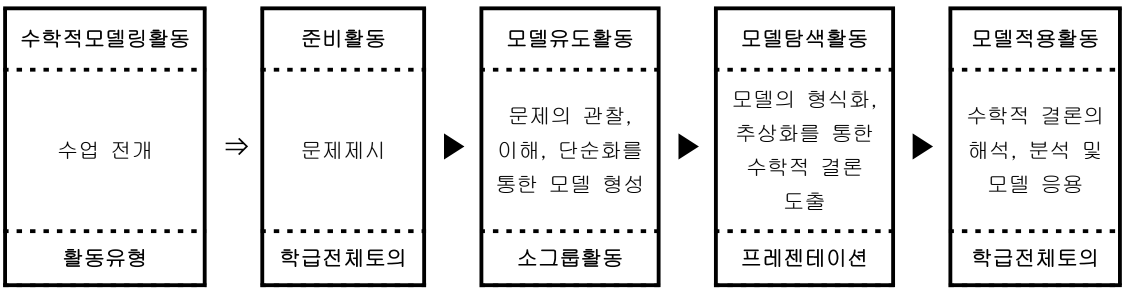
1. 연구 대상

본 연구는 초등학교 6학년 학생들이 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타내는 추상화 과정을 분석하기 위하여 서울특별시 초등학교 한 학급을 선정하여 연구를 진행하였다. 본 연구의 학습 활동을 위하여 선정된 연구 대상 학생들은 23명(남학생 13명, 여학생 10명)으로 모두 7개의 소그룹으로 구성되었는데, 각 모둠은 3명 혹은 4명의 모둠원으로 구성되었으며, 각 모둠의 구성원들은 무선 표집으로 선정되었다.

2. 연구 설계

1) 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습 설계

수학적 모델링은 학생들이 현실 맥락의 문제를 해결하기 위해 모델을 스스로 개발하고, 개발된 모델에 담긴 수학적 지식과 원리를 발견해내며, 이를 관련된 다른 문제 해결에 활용할 수 있도록 하는 것으로서, 학생들로 하여금 모델링 과정을 통하여 현실 맥락의 과제를 수학적 맥락으로 바꾸어 해결하도록 하는 것이라 볼 수 있으며, 이는 학생들의 실세계 문제 해결 능력을 신장시키기 위해 초등 수학 교육 현장에 적용될 수 있다. 본 연구에서는 Maki와 Thompson(1973)과 NCTM(1991), Lesh, Cramer, Doerr, Post와 Zawojewski(2003)가 제시한 수학적 모델링 활동 과정을 수정・보완하여 초등학교 6학년 1학기의 입체도형의 겉넓이 학습을 설계하였으며, 본 연구에 적용된 수학적 모델링의 수업 적용 절차는 [그림 III-1]과 같다.



[그림 III-1] 본 연구에 적용된 수학적 모델링의 수업 적용 절차

본 연구에서는 이와 같은 수학적 모델링의 수업 적용 절차를 입체도형의 겉넓이 학습에 적용함으로써 학습자들이 입체도형의 겉넓이 모델링 과제 활동에서 나타내는 추상화 과정 분석에 중점을 두었다.

연구 대상에 적용될 수학적 모델링 활용 입체도형의 겉넓이 학습의 설계를 위해서 먼저 측정 영역 중 입체도형의 겉넓이와 관련된 교육목표 설정을 통해 학습자가 성취해야 할 학습목표의 확인이 이루어졌고, 설정된 교육목표에 학습자의 실세계 맥락이 반영된 학습 경험이 선정되었다. 이렇게 선정된 학습 경험들은 수학적 모델링을 활용한 수업의 절차에 맞게 조직됨으로써 수학적 모델링을 활용한 초등학교 6학년 입체도형의 겉넓이 학습의 교수-학습 과정안이 설계되었다.

본 연구에 적용된 문제 상황은 수학적 모델링 참고문헌과 우리나라의 제7차 및 2007년 개정 수학과 교육과정, NCTM, 국내・외 교과서 분석을 바탕으로 하여 우리나라 초등학교 6학년에 적용 가능하며 학생들이 실세계 맥락 상황과 관련지어 입체도형의 겉넓이 문제를 해결하고 학습내용을 활용할 수 있는지를 알아볼 수 있는 수학적 모델링 문제 상황이 개발되었으며, 전문가의 자문회의 및 검토를 통해 내용타당도를 검증받고, 초등학교 현장 6학년 1개 학급에서 예비 연구로 적용된 후 최종적으로 수정・보완됨으로써 완성되었다.

2) 수학적 모델링의 추상화 과정 분석을 위한 설계

본 연구는 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습이 이루어지는 동안 연구 대상이 나타내는 추상화 과정을 분석하고자 하였으며, 이 연구 문제의 해결을 위해서 연구 대상의 학습 활동 내용과 연구자 및 연구보조자의 관찰 내용을 분석하였다. 연구 대상의 학습 활동 내용의 분석은 연구가 이루어지는 동안 산출된 학습자의 활동 결과물을 분석하였고, 관찰은 학습이 진행되는 동안 나타나는 연구 대상의 학습 활동 과정의 파악을 위하여 연구자 및 연구보조자가 학습자의 활동을 관찰하여 기록한 후 이를 분석하였으며, 학습자의 활동 결과물과 관찰내용은 초등수학교육전공 석・박사 과정의 초등교사 2인에 의해 검토되었다.

3) 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 이해 정도 분석을 위한 실험 설계

본 연구에서는 학습이 이루어지는 동안 학생들이 나타내는 수학적 모델링의 추상화 과정에 대한 분석 외에도 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습의 효과를 분석하고자 하였으며, 이를 위해서 연구 대상에게 먼저 사전 겉넓이 이해 검사를 실시한 후, 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습을 실시하였고, 학습이 끝난 날 사후 겉넓이 이해 검사를 실시하였다. 서술형 문항으로 이루어진 사전과 사후의 겉넓이 이해 검사를 통해서는 연구대상에 나타난 입체도형의 겉넓이 이해 정도를 살펴보았다.

3. 연구 도구

1) 추상화 과정 사례 분석 기준 및 내용

본 연구에서는 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 수업이 이루어지는 동안 나타나는 학습자의 추상화 과정을 분석하기 위하여 추상화 과정의 사례 분석 기준과 내용을 마련하고, 연구 대상의 학습 활동 결과물과 연구자 및 연구보조자의 관찰 내용을 분석하였으

며, 학생들의 활동 결과물과 관찰내용은 초등수학교육전공 석·박사 과정의 초등교사 2인에 의해 검토되었다.

본 연구에 사용된 분석기준은 앞서 언급된 Piaget(1972, 2001) 및 Battista(2007)의 연구를 포함한 관련 연구(Gray & Tall, 2007; Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001; Ozmantar & Mnaghan, 2007; Steffe & Cobb, 1988)에서 제시한 추상화 수준 및 추상화 관련 내용을 바탕으로 수학적 모델링을 활용한 학습에 맞게 수정·보완하여 <표 III-1>과 같이 재구성 되었다.

<표 III-1> 본 연구에 사용된 추상화 과정의 분석 기준 및 내용

추상화 과정	분석내용
지각적 추상화 (perceptual abstraction)	· 문제 상황을 파악하여 현실 상황을 수학에 접목시켜 인식하는가? · 이전에 학습했던 수학적 지식, 개념, 원리를 인식하고, 그것을 문제 상황에 관련시키는가? · 문제에 나타난 현상과 이전에 학습된 수학 학습 내용의 공통적 속성을 인식하는가? · 자신의 경험과 직관을 바탕으로 물리적 대상을 활용함으로써 문제 상황의 수학적 속성을 인식하는가?
내재화 (internalization)	· 문제 상황에 제시된 비형식적 개념들을 형식적으로 표현할 수 있는가? · 현실 세계의 상황을 단순화하여 간결한 형태로 만들고, 이를 수학적 관계나 구조의 형태로 나타내는가? · 현실 맥락의 문제 상황을 여러 가지 수학 공식이나 이론과 관련지어 설명하고, 이에 따라 문제를 해결하는가? · 문제 해결을 위해 이전에 학습했던 수학적 지식, 개념, 원리를 도입하여 활용하고 적용하는가?
내면화 (interiorization)	· 문제를 해결하면서 새로운 수학적 지식을 구성하고, 이를 관련된 다른 현실 맥락의 문제 상황에 일반화하는가? · 이전에 학습된 수학적 개념, 원리를 바탕으로 새로운 구조를 수직적으로 재조직하여 문제를 해결하는가?

지각적 추상화(perceptual abstraction)는 학습자가 자신의 경험과 직관 및 물리적 대상을 활용하여 문제 상황의 수학적 속성을 인식하고 현실 상황을 수학에 접목하여 인식하는 수준을 말한다. 내재화(internalization)는 현실 맥락의 문제 상황을 단순화하고, 문제에 나타난 비형식적 개념들을 형식적으로 표현하며, 문제 해결을 위해 수학적 지식, 개념, 원리를 도입하여 적용하는 수준을 말한다. 내면화(interiorization)는 이전에 학습된 수학적 개념, 원리를 바탕으로 새로운 구조를 수직적으로 구성함으로써 문제를 해결하고, 이를 관련된 또 다른 현실 맥락의 문제 상황에 일반화 하는 수준을 말한다. 본 연구에서는 이 기준을 바탕으로 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타나는 학생들의 추상화 과정 사례를 분석하였다.

2) 겉넓이 이해 검사

본 연구에서는 실험 처치 후에 나타나는 수학적 모델링 활용 입체도형의 겉넓이 이해 정도를 알아보기 위하여 제7차 및 2007 개정 초등학교 수학과 교육과정의 목표에 근거하여 제작된 사전·사후 겉넓이 이해 검사지가 사용되었다. 검사 도구의 내용은 초등수학교육 전공의 석·박사 및 초등학교 현장 교사 등 전문가의 검토를 통하여 내용타당도를 검증받았다. 본 연구에 사용된 사전·사후 검사 도구의 문항 내적 일관성 신뢰도(Cronbach α)는 사전검사의 경우 .953, 사후 검사의 경우 .956으로 높은 신뢰도를 나타내었다.

사전·사후의 겉넓이 이해 검사 결과는 초등수학교육 전공의 초등학교 현장교사 3인이 채점하였는데, 사전·사후 검사지를 채점한 3인의 채점자간 신뢰도는 다음의 <표 III-2>와 같으며, 세 채점자 모두가 유의확률 .000(p<.01)으로 높은 상관을 보임으로써 높은 신뢰도를 나타내었다.

<표 III-2> 사전·사후 검사의 채점자간 신뢰도

		사전 검사			사후 검사		
		채점자A	채점자B	채점자C	채점자A	채점자B	채점자C
채점자A	Pearson 상관계수	1	.997 **	.961 **	1	.994 **	.994 **
	유의확률(양쪽)		.000	.000		.000	.000
	N	92	92	92	92	92	92
채점자B	Pearson 상관계수	.997 **	1	.967 **	.994 **	1	.995 **
	유의확률(양쪽)	.000		.000	.000		.000
	N	92	92	92	92	92	92
채점자C	Pearson 상관계수	.961 **	.967 **	1	.994 **	.995 **	1
	유의확률(양쪽)	.000	.000		.000	.000	
	N	92	92	92	92	92	92

** p<.01

IV. 연구 결과

본 연구의 목적은 수학적 모델링을 적용한 초등학교 6학년 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타나는 학습자들의 추상화 과정 및 효과를 분석하는데 있으며, 이에 따라 연구 대상에 적용된 수학적 모델링 활용 입체도형의 겉넓이 학습과 학습이 이루어지는 과정에서 나타난 학생들의 추상화 과정 사례 및 입체도형의 겉넓이에 대한 이해 정도를 살펴보면 다음과 같다.

1. 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습

본 연구에서는 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타나는 학생들의 수학적 모델링 추상화 과정을 분석하기 위해 수학적 모델링을 활용한 초등학교 6학년 입체도형의 겉넓이 학습을 설계하고, 선정된 연구대상에 적용하였다. 학습 설계는 준비활동, 모델유도활동, 모델탐색활동, 모델적용활동의 수학적 모델링의 수업 적용 절차를 기반으로 하였으며, 학습자가 달성해야 할 입체도형의 겉넓이 관련 교육목표의 설정과 확인 및 학습자

의 실세계 맥락을 반영한 학습 경험 선정, 수학적 모델링 활용 수업의 절차에 따른 학습 경험의 조직의 과정을 거쳐 다음의 <표 IV-1>과 같은 수학적 모델링을 활용한 초등학교 6학년 입체도형의 겉넓이 교수-학습 과정안을 설계하였다.

본 연구에서는 수학적 모델링 과제로 마네킹 퍼포먼스(Mannequin Performance)를 제시함으로써 초등학교 6-가의 5. 겉넓이와 부피 단원의 입체도형의 겉넓이 학습을 실시하였다. 준비활동에서는 학습자들은 학급전체토의를 통해 제시된 실세계 맥락의 과제에서 문제 상황을 확인하였다. 모델유도활동에서는 소그룹별로 문제 상황을 단순화하고 문제해결전략 수립, 정보 수집 등을 통하여 마네킹의 겉넓이를 구하기 위한 모델을 형성하였다. 모델탐색활동에서는 과제 수행에 적용된 수학적 개념・원리・법칙을 정리하고, 프레젠테이션을 통해 모둠별로 과제 수행의 과정 및 결과를 발표함으로써 개발한 모델을 다른 모둠과 공유하고, 발표된 여러 모델에 포함된 수학적 개념・원리・법칙을 찾아내었다. 마지막 모델적용활동에서는 학급전체토의를 거쳐 문제해결에 가장 적합한 모델을 선정하고, 발표된 여러 모델들이 적용될 수 있는 또 다른 현실 상황들을 찾아봄으로써 전체 활동을 마무리하였다.

2. 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타난 수학적 모델링의 추상화 과정

본 연구의 입체도형의 겉넓이 학습에 적용된 수학적 모델링 과제는 미술과 체육시간에 이루어질 마네킹 퍼포먼스를 위하여 마네킹을 정하고 선정된 마네킹 전체에 붙여야 하는 살색 색지의 넓이를 구하는 것으로서 학생들은 주어진 과제를 해결하는 동안 마네킹이라고 하는 실세계 맥락의 입체도형에 대한 겉넓이를 구하는 활동을 수행하였다. 측정 학습이 진행되는 동안 학생들은 모둠별로 다른 모습으로 수학적 모델링의 추상화 과정을 나타내며 문제를 해결하였는데, 학생들의 활동 결과물과 관찰내용은 초등수학교육전공 석・박사 과정의 초등교사 2인에 의해 검토되었으며, 이에 대한 구체적인 분석 결과는 다음과 같다.

1) 지각적 추상화(perceptual abstraction)

수학적 모델링에서의 지각적 추상화는 현실 경험으로부터 감각적인 특성을 분리하는 것으로서 자신의 경험과 직관을 바탕으로 물리적 대상을 활용함으로써 문제 상황에 포함된 수학적 속성을 파악하고, 문제 상황을 수학과 관련지음으로써 이전에 학습된 수학적 지식이나 개념, 원리와 주어진 현실 맥락의 문제 사이의 공통적 속성을 인식하는 것이다.

본 연구의 연구 대상 학생들 중 <사례 1>의 학생들은 [그림 IV-1-(a)]와 같이 의견을 나눔으로써 주어진 과제의 상황에 대하여 정리하였다. 마네킹 전체에 붙여야 하는 살색 색지의 넓이를 구해야 하는 본 과제에서 <사례 1>의 학생들은 살색 색지의 개수에 많은 관심을 보였는데, 준비활동에서의 이러한 관심은 이후의 모델링 활동에도 반영되어 문제 해결에 영향을 주었다.

<표 IV-1> 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습의 교수-학습 과정안

수업 개요
◈ 모델링 제목: 마네킹 퍼포먼스(Mannequin Performance) ◈ 단원: 6-가 5. 겉넓이와 부피(측정 영역) ◈ 학습목표: 입체도형의 겉넓이와 관련된 실생활 문제를 해결할 수 있다.

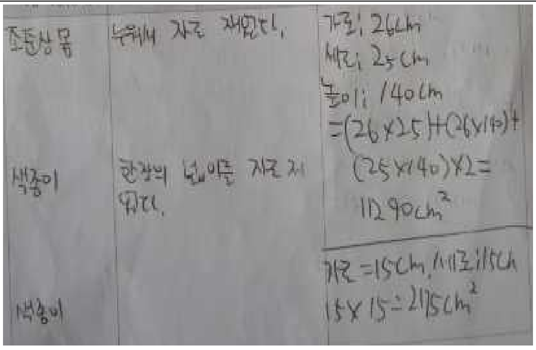
교수-학습 활동		
수학적 모델링 활동	수업전개	활동유형
준비활동	· 동기유발 및 과제 제시 ◇◇◇초등학교 6학년 3반 학생들은 미술과 체육시간에 모둠별 공연으로 마네킹 퍼포먼스를 하려고 합니다. 모둠원들 중에서 한 사람을 정하여 그 사람을 마네킹으로 꾸며 공연을 하려고 합니다. 마네킹에 여러 가지 장식을 하기에 앞서 마네킹으로 선정된 모둠원의 몸 전체에 살색 색지를 붙이려고 합니다. 얼마만큼의 살색 색지가 필요한지 필요한 살색 색지의 넓이를 알아봅시다. · 문제 상황 확인-주어진 문제 상황에 대하여 친구들과 이야기 나누기	학급 전체 토의
	▼	
모델유도활동	· 문제 상황의 관찰, 이해 및 단순화[모델유도활동 1] -문제해결을 위해 활용해야 할 정보를 선택하기 -문제 상황을 단순화하여 문제 해결을 위해 해야 할 일 생각해보기 · 모델 형성 -문제를 해결하기 위해서는 어떤 전략을 사용하여야 하며, 어떤 과정을 거쳐야 할지 계획하고 기록하기[모델유도활동 2] ☞마네킹에 필요한 살색 색지의 넓이를 구하기 위해 어떠한 것들을 어떤 방법으로 측정하면 좋을지 활동지에 기록하기 -정보수집하기[모델유도활동 3] ☞실제로 측정한 항목들과 측정에 사용한 방법, 측정 과정 및 결과들을 활동지에 기록하기 -정보수집 결과를 바탕으로 필요한 살색 색지의 넓이를 구하고, 넓이를 구하는 과정에서 수행한 여러 가지 활동들의 순서 및 내용을 기록하기[모델유도활동 4] ☞측정 결과를 바탕으로 마네킹 전체에 필요한 살색 색지의 넓이를 구체적으로 구하기	소그룹 활동
	▼	
모델탐색활동	· 활동 정리[모델탐색활동 1] ☞문제를 실제로 어떤 순서로, 어떻게 해결하였는지 문제해결과정을 되돌아보고, 과제 수행에 활용된 수학적 개념, 원리, 법칙에 대해 기록하기 · 발표 준비[모델탐색활동 2] ☞모둠별로 과제 수행 과정 및 결과에 대하여 발표할 내용 기록하기 · 모델 발표 ☞모둠별로 구한 마네킹에 전체에 필요한 색지의 넓이 및 구하는 방법에 대하여 발표하기 · 다른 모둠들이 발표한 방법에 포함된 수학적 개념, 원리, 법칙 찾기[모델탐색활동 3]	프레젠테이션
	▼	
모델적용활동	· 여러 가지 문제해결방법 중에서 가장 적절한 방법에 대하여 의견을 공유하고, 더 좋은 방법이 있을지에 대하여 이야기 나누기[모델적용활동 1] · 변화된 상황(마네킹으로 선정된 모둠원이 바뀌거나, 마네킹의 대상이 사람이 아닌 동상 혹은 인형 등으로 변화된 상황)이 주어질 경우, 개발된 모델을 어떻게 활용할 것인지에 대하여 의견을 나누고, 과제수행에 사용했던 방법을 활용할 수 있는 다른 사례 찾아보기[모델적용활동 2]	학급 전체 토의

<사례 1>의 학생들은 치수를 재기에 편리할 것이라는 이유로 키가 가장 작은 모둠원을 마네킹으로 선정하고, 전지 2장을 테이프로 붙인 후 그 위에 선정된 모둠원의 신체를 본떠 그렸다. 이들은 본뜬 그림과 선정된 모둠원의 몸통에서 가로, 세로, 높이의 길이를 자로 재고, 측정된 치수로 직육면체의 겉넓이를 계산하고, 색종이 1장의 가로, 세로 길이를 자로 내어 색종이 1장의 넓이를 계산하였다([그림 Ⅳ-1-(b)] 참조).

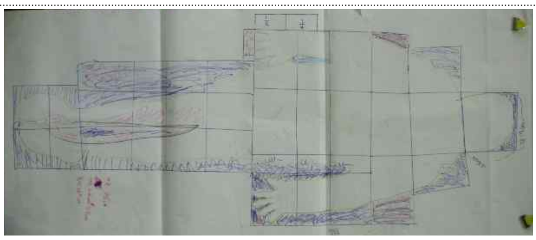
또 모둠원들은 이렇게 본뜬 그림을 [그림 Ⅳ-1-(c)]와 같이 여러 개의 사각형으로 나타내었는데, 이들 사각형을 어떤 의미로 그렸는지에 대한 연구자의 질문에 학생들은 그림에 나타난 사각형 하나하나는 색종이(15cm×15cm) 한 장을 의미하는 것이라고 답하였으며, 신체의 외곽선과 사각형들의 가장 바깥쪽 선 사이의 공간에 대해서는 [그림 Ⅳ-1-(d)]와 같이 '뒤로 넘겨서 뒤쪽 면에 겹쳐져서 붙여지는 부분'이라고 활동지에 기록하였다.

· JS: 마네킹의 넓이를 구한 뒤, 살색 색지가 몇 개 들어갈 지를 결정한다.
· AR: 일단 사람을 정하여 그 사람 몸의 넓이를 구한 후, 색종이 넓이를 구하고, 색종이의 넓이가 사람 몸에 들어가는 개수를 구한다.
· JM: 줄자, 자 등으로 선정된 모둠의 키, 둘레 등등을 구한 뒤 살색 색지의 넓이와 비교한다.

(a) 준비활동



(b) 모델유도활동



(c) 과제 활동 결과물

· 그리고 마네킹은 직육면체가 아니기 때문에 우리는 뒤로 넘겨서 겹치게 했다.
· 결국 정답은 11550cm^2가 된다.

(d) 모델탐색활동

[그림 Ⅳ-1] <사례 1>의 활동 내용

이와 같은 <사례 1>의 활동은 마네킹의 겉넓이라고 하는 현실 맥락의 문제 상황을 수학과 연결시킴으로써 과제에 나타난 현상, 즉 마네킹의 겉넓이와 학생들이 이전에 학습했던 직육면체의 겉넓이 사이의 공통적인 속성을 인식하는 모습을 나타내고 있다. 또한 이들은 색종이(15cm×15cm)라고 하는 물리적 대상을 활용하여 기준이 되는 색종이가 몇 장이 들어가는지를 생각함으로써 마네킹으로 선정된 모둠원의 겉넓이 구하고자 하였다. 이와 같은 <사례 1>의 활동 모습은 수학적 모델링의 추상화 과정 중 지각적 추상화의 과정을 보여주고 있는데, 이 모둠의 학생들은 기준이 되는 물리적 대상만 선정하였을 뿐, 본뜬 그림을 색종이와 같은 규격의 정사각형으로 구분하지 못하고 본뜬 그림을 단순히 여러 개의 직선으로 나누어 여러 개의 사각형으로 구분하는데 그침으로써 문제 상황의 비형식적 개념을 형식적

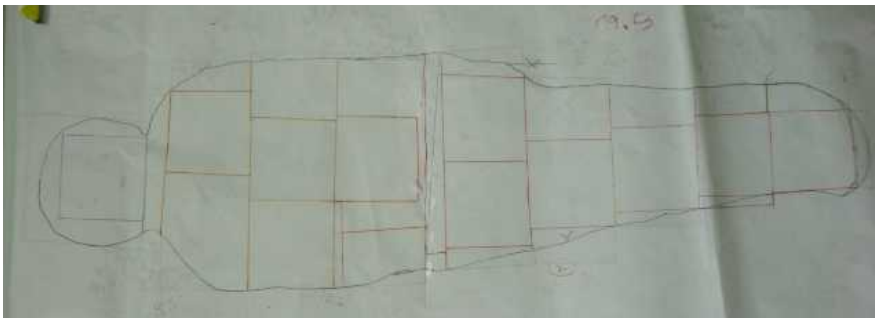
으로 추상화하여 표현하는 내재화 과정에는 이르지 못하였다.

2) 내재화(internalization)

수학적 모델링에서의 내재화는 현실 세계의 상황을 단순화하여 수학적 관계나 구조의 형태로 나타내고, 문제 상황에 제시된 비형식적 개념들을 형식적으로 표현하며, 현실 맥락의 문제 상황을 여러 가지 수학 공식이나 이론과 관련지어 설명하고, 수학적 지식, 개념, 원리에 따라 문제를 해결하는 것을 말한다.

연구 대상의 <사례 2>는 실세계 사물을 직접 그려보고, 각각의 부분의 길이를 실제로 측정해본 후, 사물의 면적을 일정한 규격을 가지는 실세계 사물(색종이: 15cm×15cm)을 기준으로 정하여 기준의 몇 배 만큼에 해당하는지를 찾아봄으로써 문제를 해결하고 있음을 볼 수 있다([그림 IV-2] 참조). 이 사례의 모둠원들은 앞서 제시된 <사례 1>과 유사하게 마네킹으로 선정된 모둠원을 바닥의 종이에 그린 후, 그려진 윤곽선 안쪽의 넓이를 구하는 방법으로 15cm×15cm 규격의 색종이가 몇 장 들어갈 수 있는지를 세어 봄으로써 마네킹으로 선정된 모둠원의 겉넓이를 구하기 시작하였다. 하지만 <사례 2>의 경우, 앞의 <사례 1>과는 달리 실제 색종이를 본뜬 그림에 직접 대고 그려 넣음으로써 기준이 되는 규격의 정사각형을 그리고, 본뜬 그림에 포함되는 색종이의 개수를 센 후, 곡선이 포함된 나머지 부분은 직선화하여 직사각형으로 만든 후 넓이를 구하였다.

· 일단 마네킹이 될 사람을 정하고, 그림을 그린다. · 곡선이 있는 그림에 그냥 겉넓이를 구하기는 힘드니까 기준이 되는 것을 만들어 구한다. · 기준이 되는 것을 색종이로 해서 몇 개인지 세어 본다. · 그리고 색종이의 넓이를 구한 다음에 색종이의 개수를 곱한다.	색종이의 넓이: 15×15=225㎠ 색종이의 개수: 22개 225×22=6050 남은 부분의 넓이: 5271㎠ 6050+5271=11321㎠
(모델유도활동)	(모델탐색활동)



(과제 활동 결과물)

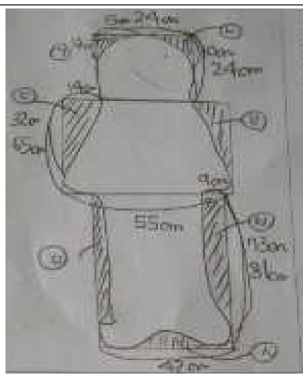
[그림 IV-2] <사례 2>의 활동 내용

이와 같은 <사례 2>의 활동은 마네킹의 겉넓이라고 하는 실세계 사물에 대한 문제 상황을 단순화하여 정사각형 및 직사각형의 수학적인 형태로 나타내고, 기준이 되는 정사각형

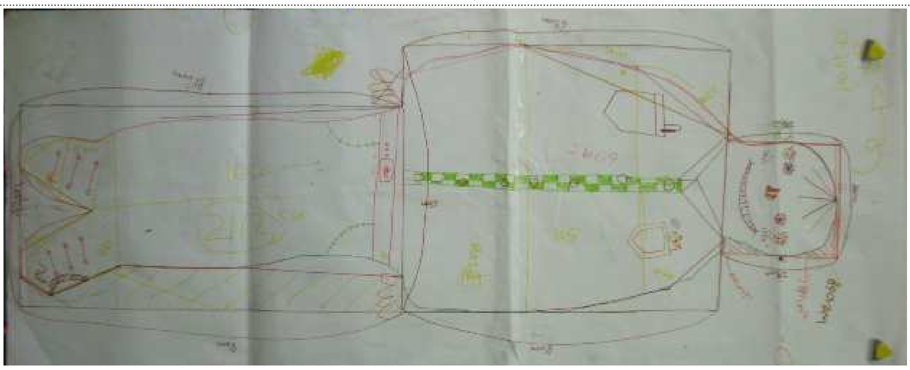
넓이와 나머지 직사각형 넓이 등의 수학적 지식, 개념, 원리와 관련지어 설명함으로써 문제를 해결하는 모습으로 볼 수 있으며, 이는 수학적 모델링의 추상화 과정 중 내재화의 과정으로 해석할 수 있다. 다만 이 사례의 학생들은 뒷면이나 옆면에 대한 부가적인 설명이나 표현 없이 마네킹으로 선정된 모둠원의 겉넓이로 앞면의 넓이만 구함으로써 마네킹의 겉넓이에 대한 수학적 구조를 온전히 재구성하지 못하였으며, 이로 인해 내면화의 과정에는 이르지 못하였다.

<사례 3>의 경우를 보면, 마네킹으로 선정된 모둠원의 윤곽선의 외부와 내부를 머리, 몸통, 다리의 부분으로 나누고, 각 부분에 외접하는 직사각형을 그린 후 윤곽선의 곡선을 직선화하여 전체 사각형의 넓이에서 [그림 IV-3]의 ㉠~㉦ 부분의 넓이를 빼어 줌으로써 마네킹의 겉넓이를 구하고 있다. 이 사례는 모둠원의 윤곽선을 여러 개의 부분으로 나누어 현실 맥락의 비형식적인 개념들을 평면도형이라고 하는 형식화된 모습으로 전환하여 표현한 후, 학습자들이 이전에 학습 했던 수학적 지식이나 개념, 원리에 따라 문제를 해결한다는 점에서 내재화의 과정을 나타낸다고 볼 수 있다. 단 이 사례 역시 앞의 <사례 2>의 경우와 마찬가지로 모둠원의 앞면의 넓이만 구하고 그것을 마네킹 전체의 겉넓이로 보았는데, 이 또한 마네킹의 겉넓이에 대한 수학적 구조를 올바르게 재구성하지 못하고 내면화 과정에 미치지 못한 것이라 해석할 수 있다.

1) JY이 전지에 누워서 몸을 그렸다.
2) 직사각형으로 머리, 몸통, 다리로 나누어서 길이를 쟀다.
3) 각 가로×세로를 해서 겉넓이를 구했다.
4) 살색 색종이 1장의 넓이를 구했다.
5) 몸통에 색종이가 몇 장 들어가는지 알아본 후 곱한다.
6) 색종이 전체의 넓이를 구한다.



(모델탐색활동)



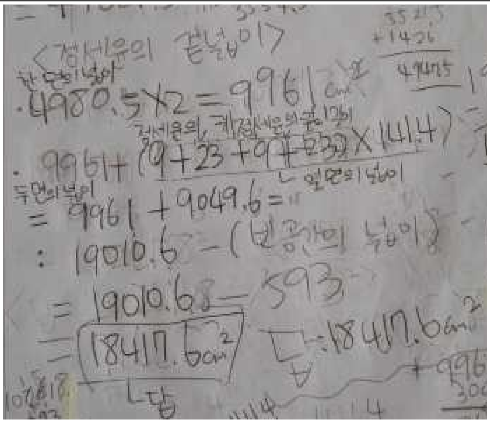
(과제 활동 결과물)

[그림 IV-3] <사례 3>의 활동 내용

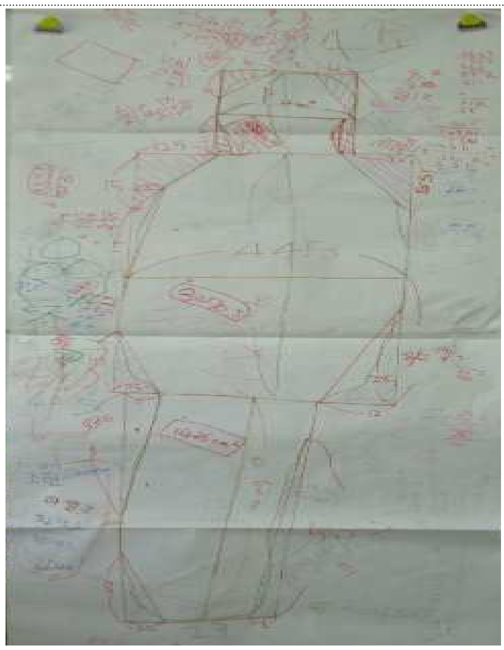
<사례 4>의 학생들은 앞의 <사례 3>의 사례와 유사한 방법으로 과제를 해결하고 있었는데, 이들 또한 앞선 모둠처럼 마네킹으로 정해진 한 사람의 신체를 전지 2장에 본떠 그린 후 머리, 몸통, 다리 부분의 곡선을 직선화하여 평면도형으로 만들고, 직선으로 그려진 전체 사각형의 넓이에서 [그림 IV-4]에 나타난 빗금친 부분의 넓이를 빼어줌으로써 마네킹 앞면의 넓이를 구했다. 이들은 뒷면의 넓이를 앞면의 넓이와 같다고 보고 앞면의 넓이에 ×2를 해주었으며, 옆면의 넓이는 마네킹으로 선정된 JSY의 키와 몸통의 두께를 자로 재어 곱함으로써 구하였다.

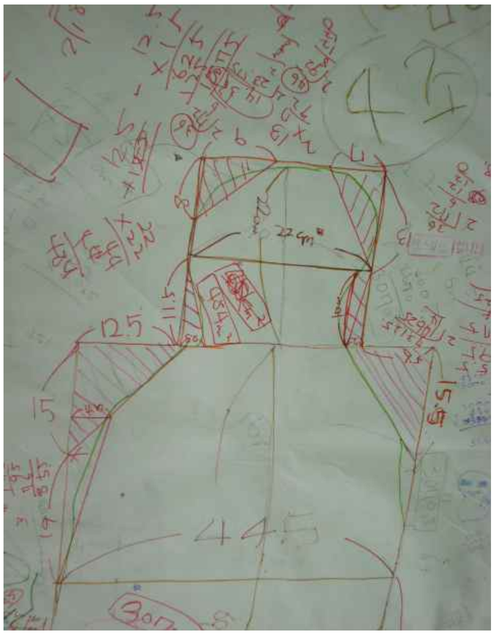
1. 모둠원의 대표인 JSY를 큰 종이로 본뜬다.
2. 그린 것을 머리, 몸통, 다리로 나누어 넓이를 구한 다음 모두 더한다.
3. 앞면의 넓이 말고 뒷면의 넓이가 있으니까 앞면 넓이×2에다가 옆면 넓이를 더한다. (옆면의 넓이는 JSY를 세운다음 자로 길이를 쟀다.)
4. 다 구하고 굴곡을 무시했던 빈 공간의 넓이를 모두 더해서 3번에서 구했던 답에서 빈 공간의 넓이를 빼준다.

(모델유도활동)



(모델탐색활동)





(과제 활동 결과물)

[그림 IV-4] <사례 4>의 활동 내용

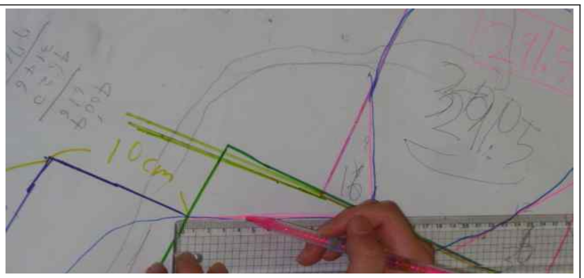
이러한 <사례 4>의 사례는 <사례 3>처럼 현실 세계의 비형식적인 상황들을 단순화하여 형식적으로 표현하고, 실세계 문제에 수학적 지식과 개념, 원리를 도입하여 해결함으로써 내재화의 과정을 나타내고 있다. 다만, 이 모둠의 학생들은 옆면의 넓이를 구함에 있어 앞면/뒷면의 넓이를 구할 때 활용했던 자신들의 방법을 일반화하지 못하고, 자신들의 직관과 경험 및 물리적 대상을 활용하여 마네킹을 대상으로 키와 몸통의 두께를 직접 재어 두 측정치를 곱하였는데(타당한 이유 없이 옆면의 모양을 직사각형이라 가정), 이러한 모습은 현실 맥락에서의 입체도형의 겉넓이에 대한 수학적 지식을 올바르게 재조직하지 못하고 일반화하지 못함으로써 내면화 과정에 미치지 못한 것으로 해석될 수 있다.

3) 내면화(interiorization)

수학적 모델링에서의 내면화는 이전에 학습된 수학적 개념과 원리를 바탕으로 새로운 구조를 수직적으로 재조직하여 문제를 해결함으로써 새로운 수학적 지식을 구성하고, 이를 또 다른 실세계 맥락의 문제 상황에 일반화하여 적용하는 것이라 할 수 있다. <사례 5>는 주어진 과제의 해결을 위해 마네킹으로 선정된 모둠원 신체의 겉넓이를 구하기 위하여 실제 신체를 앞면/뒷면(앞면과 뒷면의 넓이는 같다고 보았음), 옆면 등으로 나누어 그리고, 앞/뒤, 옆면의 신체 각 부분을 직선으로 재구성하여 각 길이를 측정한 후, 여러 개의 삼각형과 사각형 등의 평면도형의 넓이의 합과 차로 구하는 모습을 나타내고 있다([그림 IV-5] 참조).

· 마네킹 퍼포먼스에서 한 사람에게 붙여질 살색 종이는 넓이가 어떻게 되는지 구하기
· 한 사람의 겉넓이 구하기
-YJ가 제일 키가 작으므로 YJ의 앞면, 옆면, 밑면을 구한다.
-YJ의 앞면을 구하려면 전지에다가 YJ의 앞면을 그린 후, 넓이를 구한다.
-옆면, 밑면도 마찬가지이다.

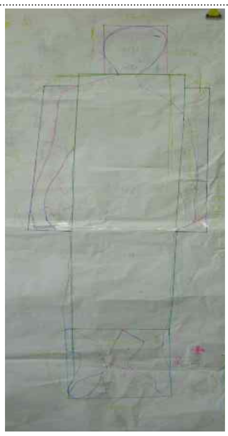
(준비활동)



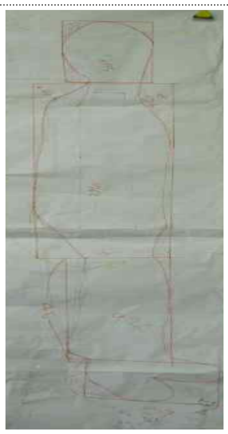
(모델유도활동)

문제이해→계획정하기
→YJ를 그리기
→얼굴, 몸통, 팔, 다리로 나누기
→모든 것을 정사각형, 직사각형, 사각형으로 나타내기
→그 사각형의 넓이를 구하기
→남은 삼각형, 사각형의 넓이 구하기
→전체 넓이에서 남은 넓이를 빼기
→전체 겉넓이 구하기

(모델탐색활동)



(앞/뒷면)



(옆면)

[그림 IV-5] <사례 5>의 활동 내용

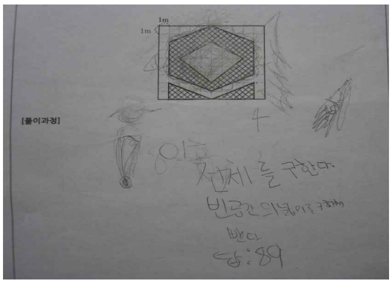
모둠원들은 곡선으로 그려진 윤곽선의 머리, 몸통, 팔, 다리 부분의 바깥쪽에 직선을 그어 커다란 사각형으로 만든 후 윤곽선을 직선으로 바꾸어 그렸다. 그 후, 가장 바깥쪽에 그려진 커다란 사각형의 넓이에서 직선으로 재구성하여 그린 신체의 윤곽선과 가장 바깥쪽 사각형 사이의 빈공간의 넓이를 빼 줌으로써 신체의 앞, 뒤, 옆면의 넓이를 구하였다. <사례 5>의 활동 사례는 학생들이 비형식적인 사물에 대한 측정 결과를 앞면/뒷면, 옆면으로 나누고 각각을 직선 및 평면도형으로 형식화하여 재구성함으로써 실세계 맥락의 문제를 해결하고 있음을 보여주고 있다. 이는 모둠원들이 이전에 학습했던 입체도형의 겉넓이 및 평면도형의 넓이에 대한 개념과 원리, 공식을 새롭게 재조직하여 마네킹의 겉넓이라고 하는 새로운 현실 맥락의 문제 상황에 일반화함으로써 내면화 과정을 나타내는 것이라 해석할 수 있다.

3. 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 이해 정도

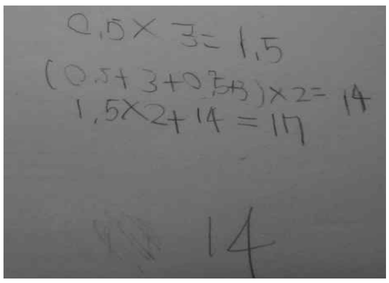
본 연구에서는 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습을 실시하기 전·후에 연구 대상에게 겉넓이 이해 검사를 실시하여 입체동형의 겉넓이에 대한 이해 정도를 분석하였다. 겉넓이 이해 검사는 서술형 문항으로 구성되었으며, 학생들이 사전·사후의 겉넓이 이해 검사 문항에 응답한 반응 사례를 살펴보면 다음과 같다.

본 연구의 학습 활동에서 지각적 추상화, 내재화, 내면화의 과정을 나타냈던 학생들은 색칠된 화단의 넓이를 구하는 사전 검사 문항과 담에 페인트칠을 할 때 바닥을 제외하고 페인트를 칠하게 되는 총 넓이를 구하는 사후 검사 문항에 대하여 각기 다른 모습으로 입체도형의 겉넓이에 대한 이해를 나타내었다.

먼저, [그림 IV-6]은 본 연구의 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습 활동에서 지각적 추상화의 과정을 나타냈던 <사례 1>의 학생 중 한 명에 대한 사전·사후 검사 문항에 대한 반응 사례이다. 이 학생은 가로, 세로 각 1m의 격자 속에 색칠된 화단의 넓이를 구해야 하는 사전 검사 문항에서는 구체적인 문제해결 전략을 찾지 못한 채, 논리적인 근거 없이 89라는 오답을 쓴 반면, 바닥을 제외한 담의 겉넓이를 구해야 하는 사후 검사 문항에 대하여서는 비록 정답을 도출하지는 못했을지라도 문제를 푸는 과정에서 담의 전체의 겉넓이를 구하는 과정을 직육면체의 겉넓이와 관련짓고 수식으로 표현하여 나타내고 있음을 볼 수 있다.



(사전 검사)

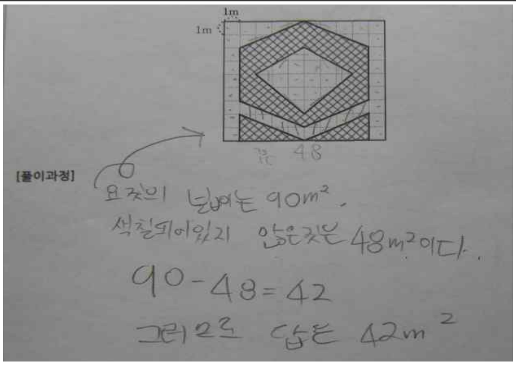


(사후 검사)

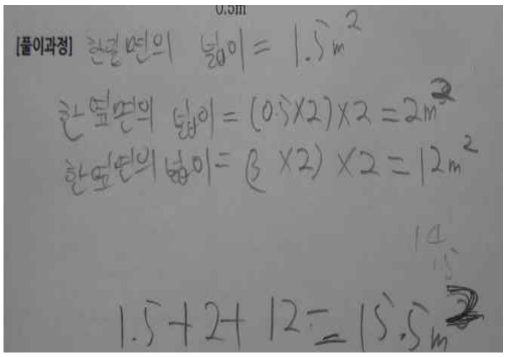
[그림 IV-6] 반응 사례 1

다음 [그림 IV-7]은 본 연구의 학습 활동에서 내재화의 추상화 과정을 보여준 <사례 3>

의 학생 중 한 명의 사전·사후 검사 점수 및 검사 문항에 대한 반응 사례로, 이 학생의 경우 사전 검사 문항에서는 문제에 제시된 1m×1m의 단위 정사각형의 개수를 하나하나 세어봄으로써 직접적인 경험 및 감각의 방법으로 색칠된 화단의 넓이를 구하였으나, 사후 검사 문항에서는 비록 문제해결전략 및 풀이과정에 대한 구체적인 설명은 부족하지만, 바닥을 제외한 담의 겉넓이를 직육면체의 겉넓이와 관련짓고, 문제에 제시된 조건(바닥 제외)을 고려하여 수식으로 표현함으로써 올바른 답을 도출해내었다.



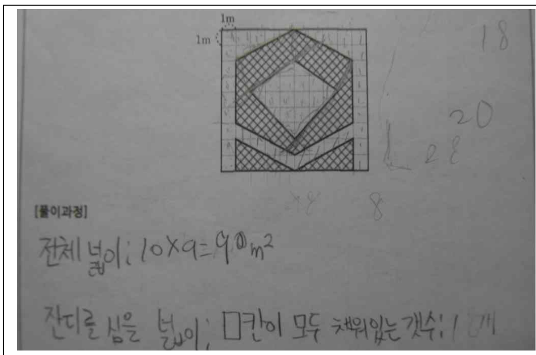
(사전 검사)



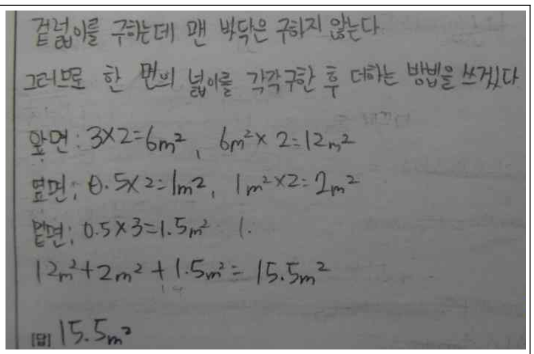
(사후 검사)

[그림 IV-7] 반응 사례 2

마지막으로 [그림 IV-8]은 본 연구의 학습 활동에서 내면화의 추상화 과정을 나타냈던 <사례 5>의 학생 중 한 명에 대한 사전·사후 검사 점수 및 검사 문항에 반응한 사례로, 이 학생은 사전 검사 문항의 색칠한 부분의 넓이를 구하기 위해 1m×1m의 단위 정사각형의 개수를 하나하나 직접 세어보기는 했으나 문제해결 전략 및 풀이과정에 대한 구체적인 설명 없이 제시된 그림의 전체 넓이만 구한 채, 문제해결을 끝마쳤다. 하지만 사후 검사에서는 바닥을 제외한 담의 겉넓이와 직육면체의 겉넓이의 공통적인 수학적 특성을 찾아내어 관련짓고 이를 수식으로 표현하고 올바른 답을 도출하였을 뿐만 아니라, 문제를 해결하기 위한 전략과 풀이과정을 자세하게 기술함으로써 채점자를 비롯한 모든 사람들에게 자신의 문제해결 과정을 논리적으로 설명하였다.



(사전 검사)



(사후 검사)

[그림 IV-8] 반응 사례 3

이와 같은 겉넓이 이해 검사에 대한 학생들의 반응 사례들은 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습과정에서 지각적 추상화, 내재화, 내면화의 과정을 나타냈던 학생들은 정도의 차이는 있지만 각기 다른 모습으로 모두 겉넓이 이해에 대한 향상된 모습을 나타내었는데, 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습 전에 학생들은 화단의 넓이를 구하는데 있어 단위 정사각형의 개수를 하나하나 세어봄으로써 직접적인 경험 및 감각의 방법을 활용하는 전략을 사용했던 데 반해, 학습 후에는 바닥을 제외한 담의 겉넓이와 직육면체의 겉넓이의 공통적인 수학적 특성을 찾아내어 관련짓는 전략을 사용하고, 문제에 제시된 조건(바닥 제외)을 고려하여 수식으로 표현함으로써 올바른 답을 도출해내고 문제를 해결하였다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습에서 나타나는 학생들의 추상화 과정을 분석하고, 사전・사후의 겉넓이 이해 검사를 통해 나타나는 학생들의 반응 사례를 분석하여 입체도형의 겉넓이에 대한 이해 정도를 알아보는 것을 목적으로 하였다.

수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습을 관찰하여 학생들의 추상화 과정을 분석한 결과 학생들은 주어진 수학적 모델링 과제를 해결하는 동안 수학적 원리를 포함한 모델을 개발하면서 모둠별로 각기 다른 수준의 추상화 과정을 나타내었는데, 이러한 아동들의 추상화의 모습은 어린 아동들도 추상적 사고가 가능하며, 추상적으로 사고하는 기능이 발달될 수 있음을 언급한 Davydov(1990), Egan(2002) 그리고 van Oers와 Poland(2007)의 연구결과와 맥을 같이 한다고 볼 수 있다. 본 연구에서 <사례 1>의 학생들은 문제에 대한 올바른 답을 도출해내지는 못했지만, 현실 맥락의 문제 상황으로부터 감각적인 특성을 분리하여 마네킹으로 선정된 모둠원의 외곽선을 그리고, 색종이라는 특정한 물리적 대상을 기준으로 색종이가 몇 장 들어갈 수 있을지를 생각하여 문제에 포함된 수학적 속성을 파악함으로써 지각적 추상화(perceptual abstraction)를 나타냈다고 보여 진다. <사례 2, 3, 4>에서는 학생들이 마네킹의 외곽선을 그리고 외곽선에 접하는 사각형을 그림으로써 현실 세계의 상황을 단순화하여 비형식적인 개념들을 평면도형이라고 하는 수학적 구조의 형태로 형식적으로 표현하고, 평면도형 넓이의 합을 구함으로써 주어진 문제 상황을 수학적 지식, 개념, 원리에 따라 해결하는 과정에서 내재화(internalization)가 나타났으며, <사례 5>에서는 학생들이 마네킹의 앞/뒷면과 옆면의 윤곽선을 그리고 윤곽선의 곡선들을 직선으로 바꾸어 여러 개의 삼각형과 사각형으로 재구성한 후, 앞, 뒤, 옆면에 표현된 평면도형의 넓이의 합으로 마네킹의 겉넓이를 구함으로써, 마네킹이라는 상황을 여러 가지 평면도형의 상황으로 새롭게 재조직하고 입체도형의 겉넓이 및 평면도형의 넓이에 대한 개념과 원리, 공식을 현실 맥락의 상황에 일반화함으로써 내면화(interiorization)의 추상화 과정이 나타났다고 보여 진다.

한편 학생들의 겉넓이 이해 정도와 관련하여 사전・사후의 겉넓이 이해 검사에 대한 학생들의 반응 사례들을 분석한 결과, 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습과정에서 지각적 추상화, 내재화, 내면화의 과정을 나타냈던 학생들은 각기 다른 모습으로 겉넓이 이해에 있어 향상 모습을 나타내었는데, 수학적 모델링을 활용한 입체도형의 겉넓이 학습 전에 학생들은 단위 정사각형의 개수를 하나하나 세어보는 직접적인 경험 및 감각의 전략을 사용했던 데 반해, 학습 후에는 문제 상황에 나타난 담의 겉넓이와 직육면체의 겉넓이의 공

통적인 수학적 특성을 찾아내어 관련짓고, 문제에 제시된 조건을 고려하여 수식으로 표현함으로써 문제를 해결하고 올바른 답을 도출해내는 모습을 나타내었다. 이는 수학적 모델링을 적용하고 분석하는데 서술형 평가의 활용이 매우 부합됨을 보여주는 것으로 학생의 문제해결력에 관한 심층적인 분석을 위해 서술형 평가의 활용을 제기하였던 Kim과 Noh(2010)의 연구와 같은 맥락으로 해석할 수 있다.

구체적인 사고과정을 바탕으로 점차 추상적이고 형식적인 사고과정으로 발달해가는 초등학교 시기의 아동들에게 있어 수학적 추상화의 경험은 의미 있고 중요한 일이다. 이러한 수학적 추상화 경험을 수학적 모델링을 활용한 학습을 통해 학생들에게 경험하도록 한 본 연구는 아동들의 추상화와 관련하여 시사하는 바가 있으며, 또한 수학적 모델링을 통해 아동들에게 수학적 추상화를 경험하도록 한 것은 수학적 모델링 학습에 있어서도 의미 있는 일이라 볼 수 있다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2008). 초등학교 교육과정 해설 IV-수학, 과학, 실과. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(1997). 제7차 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2007). 초등학교 교육과정. 교육인적자원부.

Battista, M. T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 417-448.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and Its Application, 20*(3), 121-127.

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula* (Soviet studies in mathematics education, Vol. 2; J. Kilpatrick, Ed., J. Teller, Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published 1972)

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

Edwards, D., & Hamson, M. (1989). *Guide to Mathematical Modelling*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Egan, K. (2002) *Getting It Wrong from the Beginning*. New Haven, CT: Yale University Press.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 303-323.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005a). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 58-79.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005b). Mathematical modelling with 9-year-olds. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 297-304). Melbourne: PME.

Freudenthal, H. (1973). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Kluwer, Boston.

Galbraith, P. L., & Clatworthy, N. J. (1990). Beyond standard models-Meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 137-163.

Gray, E., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 23-40.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222.

Kim, M. K., & Noh, S. (2010). Alternative mathematics assessment: A case study of the development of descriptive problems for elementary school in Korea. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 6*(3), 177-190.

Kohnstamm, G. A. (1967). *Piaget's Analysis of Class Inclusion: Right or Wrong?* The Hague, The Netherlands: Mounton.

Kohnstamm, P. (1948). *Keur uit het didactisch werk* [Selection from didactical works]. Groningen, The Netherlands: Wolters.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum, Mahwah, MJ.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Greenwich, CT: information Age Publishing.

Llinares, S., & Roig, A. I. (2008). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 505-532 (National Science Council, Taiwan(2006)).

Maki, D., & Thompson, M. (1973). *Mathematical Models and Applications, with Emphasis on the Social, Life, and Management Sciences* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Mousoulides, N. G., Christou, C., & Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 293-304.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Ozmantar, A. F., & Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 89-112.

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology* (W. Mays, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (2001). *Studies in Reflecting Abstraction* (R.L. Campbell, Ed. & Trans.). Philadelphia, PA: Psychology Press.

Polya. G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.

Sheppard, J. L. (1973). Conservation of part and whole in the acquisition of class inclusion. *Child Development, 44*, 380-383.

Steefe, L., & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag.

Stevens, R. (2000). Who counts what as mathematics: Emergent and assigned mathematics problems in a project-based classroom. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 105-144). Ablex Publishing, Westport, CT.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course: A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 109-135.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum: A Resource Guide of Classroom Exercises*. Reston, VA: NCTM.

van Oers, B., & Poland, M. (2007). Schematising activities as a means for encouraging young children to think abstractly. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 10-22.

Zbiek, R. M. (1998). Prospective teachers' use of computing tools to develop and validate functions as mathematical models. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 184-201.

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 89-112.

A Study on Abstraction and Understandings in Children's Learning of Surface Area with Mathematical Modeling Perspective

Hong, Jee Yun[4] · Kim, Min Kyeong[5]

Abstract

The purpose of this study was to analyze the progress of children's abstraction and to investigate how elementary students understand through mathematical modeling approach in the sixth grader's learning of surface area. Each small group showed their own level on abstraction in mathematical modeling progress. The participants showed improvements in understanding regarding to surface area context.

Key Words : Modeling, Mathematical modeling, Elementary Mathematics, Surface Area, Abstraction, Understanding

4) Ewha Womans University (cutty-hjy@hanmail.net)
5) Ewha Womans University (mkkim@ewha.ac.kr)