한국초등수학교육학회지 15(2) 417-435.
2011. 08. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(2) 417-435.
August 31. 2011.

초등학생과 중학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 단계에 관한 실태 연구

김정하1)

본 연구는 우리나라 초등학교 5, 6학년 학생들의 수학적 정당화의 단계와 수학적 증명을 배우기 전의 중학교 1학년 학생과 2학년 학생, 수학적 증명을 배운 후인 중학교 3학년 학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 수학적 정당화의 단계를 알아보기 위한 것이다. 먼저 수학적 정당화에 대한 인식을 조사한 결과, 설문에 참여한 학생들의 73.4%의 학생들이 수학적 정당화의 필요성을 느끼고 있었다. 그리고 수학적 정당화의 단계를 조사한 결과, 중학교 3학년뿐만 아니라 초등학교 5학년에서부터 중학교 2학년을 포함한 모든 학년에서 단순 연역적 정당화 단계의 비율이 가장 높게 나타났다. 특히 수학적 정당화의 단계는 성취수준과 밀접한 관계가 있는 것으로 나타났다. 4단계의 수학적 정당화를 하는 학생의 비율이 상위의 성취 수준 학생 비율이 가장 높게 그리고 중위의 성취수준의 학생 그 다음으로 하위 성취수준의 학생으로 나타났다. 설문조사에서 서술형 문항을 통하여 친구에게와 교사에게 나누어 수학적 정당화를 시도한 결과, 교사에게 수학적 정당화를 시도하는 경우에 보다 높은 수학적 정당화를 하였다. 본 연구의 결과는 귀납적 추론에 중점을 두고 있는 초등학교 교육에서 연역적 정당화를 보다 적극적으로 지도하여 상급 학년에서의 겪게 되는 수학적 정당화의 어려움을 줄여 주어야 한다는 것을 시사해 준다.

[주제어] 수학적 정당화, 수학적 정당화에 대한 인식, 수학적 정당화의 단계

Ⅰ. 서 론

우리나라에서는 전통적으로 중학교 2학년 2학기에서 평면도형의 성질을 정당화하는 수단으로 연역적 추론에 바탕을 둔 수학적 증명을 도입하여 지도하여 왔으며, 초등학교에서 지도되는 여러 원리에 대한 정당화는 주로 귀납적 추론에 의하여 지도되어 왔다(서동엽, 2003). 그러나 최근 많은 연구에서 어린 학생들도 연역적 추론이 가능함을 밝히고 있다(김정하, 2010; King, 1973; NCTM, 1989; NCTM, 2000; Reid, 1995; Reid, 2000; Stylianides, 2007; 권성룡, 2003; 염지숙, 1986). 증명이 수학을 알고 행하는 것의 기초가 되며 수학적 이해와 수학적 지식을 의사소통하고 확립하고 발전시키기 위해 필수적이기 때문에 모든 학년과 모든 영역에서 학생들의 학교수학 경험에서 중심이 되도록 해야 한다고 주장한다(Stylianides, 2007; NCTM, 2000;김정하 2010; King, 1973; Reid, 2000). 증명을 유치원에서부터 12학년에 이르기까지 지속적으로 가르쳐야 함을 강조하고 있으나 유치원에서부터 고등학교 3학년에 이르기까지 같은 수준의 수학적 증명을 가르치거나 같은 수준의 증명을 해낼 것을 기대하는 것은 아닐 것이다. 어떤 이들은 처음부터 엄밀한 연역적 추론을 할 수

1) 인천일신초등학교

없을 것이고 시행착오를 거쳐 문제를 이해하게 되고 그 후에야 정돈된 형식의 해결을 할 수 있을 것이며 마지막에 이르러서야 연역적인 논증을 할 수 있게 된다(van Dormolen, 1977). 서동엽(2010)은 고대 그리스의 수학자들이 기하학적 정당화를 위해 주로 도식에 의존하였으며 그 외에도 정당화를 위해 다양한 출발점이 허용되었음을 통해 학생들에게도 다양한 정당화의 과정이 허용되어야할 필요가 있다고 주장한다.

김정하(2010)는 수학적 정당화란 '적당한 논리에 의해 추측이 참임을 자신 또는 다른 사람에게 확신시키기 위한 방법'으로 정의하고 이를 논리적, 개인적, 사회적 측면에서 살펴보았다. 논리적 측면에서 수학적 정당화는 '논리적'의 넓은 의미와 좁은 의미 그리고 중간 단계인 교육상의 의미를 포함하는 포괄적인 의미이다. 즉 추측이 참임을 보이기 위해, 다양한 표현 방법을 이용하여 근거를 개인적인 논거 형식으로 제시하는 과정이다. 수학적 정당화의 개인적 측면은 어떤 명제의 진위나 자신의 해결 방법에 대해 자신을 확신시키는 과정이다. 수학적 정당화의 사회적 측면은 교실 공동체를 설득시키고 확신시키기 위한 의사소통의 과정이라고 할 수 있다. 수학적 정당화는 정당화를 하는 주체 자신의 수학적 발달에 따라 다양한 표현 방법으로 나타날 수 있다. 이러한 정의에 따라 수학적 정당화를 0단계 정당화 없음, 1단계 외적 확신에 의한 정당화, 2단계 경험적 · 귀납적 정당화, 3단계 포괄적 예에 의한 연역적 정당화, 4단계 단순 연역적 정당화, 5단계 형식적 이론적 정당화로 분류하였다.

초등학생을 대상으로 한 선행 연구에는 Stylianides(2007), King(1970), Lester(1975), Machtinger(1965), 권성룡(2003), 라병소 외(2002), 송상헌 · 허지연 · 임재훈(2006)과 송상헌 · 장혜원 · 정영옥(2006), 이경화 · 최남광 · 송상헌(2007) 등의 연구가 있고, 중학생을 대상으로 한 선행 연구에는 Harel & Sowder(2007), Marrades & Gutiérrez(2000), 이종희(2003), 류성림(1998) 등이 있으나 대부분의 연구가 수학 영재 학생에 국한 되는 경우가 많으며 특정 학년을 대상으로 함으로써 학년 간의 차이 또는 수학적 정당화의 발전을 파악하기가 쉽지 않다.

따라서 본 연구에서는 증명을 배우기 전인 초등학교 5, 6, 중학교 1, 2학년과 증명을 배우고 난 후 중학교 3학년 학생들의 수학적 정당화 단계의 차이를 비교하고, 수학 성취수준이 수학적 정당화에 미치는 영향을 살펴본다. 그리고 수학적 정당화를 '교사에게 정당화하기와 친구에게 정당화하기'로 나누어 서술형의 설문을 조사한 결과 학생들이 자신보다 지적으로 높은 수준에 있다고 느끼는 교사와 동등하거나 아래에 있다고 생각하는 학생에게 정당화를 행할 때의 차이를 분석함으로써 그 시사점을 찾고자 한다.

Ⅱ. 선행연구 분석

1. 수학적 정당화의 단계

김정하(2010)는 논리를 '사고 작용이 밟는 과정'이라고 볼 때 '밟는'이라는 의미와 학생들의 발달 단계를 고려하여 수준이나 유형이라는 용어 대신에 '단계'라는 용어를 쓰고 단계 안에 여러 가지 유형이나 수준을 포함시켰다. 수학적 정당화의 단계를 살펴보면 다음과 같다.

0단계는 정당화가 나타나지 않은 단계로, 문제를 해결했지만 그에 따른 정당화의 의지는 나타나지 않는 상태이다. '참인지 거짓인지 말하고 그 이유를 쓰시오.'라는 질문에 대해

무응답을 한 경우 또는 무엇인가 쓰기는 했으나 의미 없는 것을 그리거나 쓴 경우이다. 이는 정당화의 의미를 잘 알지 못하거나 문제를 해결하기 위한 사전 지식이 없음으로 정당화를 시도하지 않는 경우와 정당화 문제에 대해 거부감을 가지고 있는 경우가 이에 포함된다.

2단계와 3단계의 정당화는 중간적 단계인 교육적 의미의 수학적 정당화의 정의의 논리적 측면에 그 근거를 두고 있다. 이는 관찰과 암시 그리고 검증이라는 자발적인 조정에 의한 사고 과정으로 4단계의 발달된 사고단계에 이르기 위한 중간 과도기적인 단계라고 할 수 있다. 중간 단계를 경험과 귀납에 의한 정당화(2단계)와 형식적·연역적 정당화에 보다 더 가까이 간 포괄적 예에 의한 연역적 정당화(3단계)로 나눌 수 있다.

2단계는 예를 이용하여 그들 사이의 일반적인 속성을 찾아내거나 감각적 활동적으로 직접 해 봄으로써 정당화를 시도하는 경험적·귀납적 확신에 의한 정당화이다. 예를 들면 '실제의 사과 2개와 사과 4개를 합하여 6개가 되므로 짝수이다.'라는 것을 보여주거나 그림을 이용하거나 또는 다이어그램을 이용하여 정당화하는 것은 지각적·활동적 정당화(2A)이다. '2+2=4, 2+4=6, 4+6=10, 12+14=26 …과 같이 짝수와 짝수를 더하면 그 결과가 짝수이므로 주어진 명제는 참이다'라고 수학적 정당화를 한 것은 평범한 예에 의한 정당화(2B)이다. '2+4=8, 1000046+1000024=1000070으로 아주 작은 짝수의 덧셈에서도 그 결과가 짝수이고, 굉장히 큰 두 짝수의 덧셈에서도 짝수이므로 주어진 명제는 참이다'라고 하는 것은 결정적 예에 의한 정당화(2C)이다.

3단계는 포괄적 예에 의한 연역적 정당화로서, 포괄적 예(3A)와 시각적 예(3B)로 구분할 수 있다. 넓은 의미로 보면 시각적 예가 포괄적 예에 포함된다고도 할 수 있다. 3단계는 포괄적 예나 시각적 예를 사용한다는 점에서 예를 사용하는 2단계와 비슷하지만, 귀납적 사고 방법에 의한 정당화하지 않고 대표적인 예를 사용하여 연역적인 사고 방법으로 설명해 간다는 점에서 4단계의 형식적·연역적 정당화의 과도기적인 단계로 이해될 수 있다.

4단계는 학교 수학에서 인정된 형식에 따라 연역적으로 논증하는 것, 즉 비교적 엄밀한 수학적 증명으로 3단계 및 5단계와 구분하기 위해 단순 연역적 정당화하고 한다. 예를 들어, '짝수+ 홀수=홀수이다'라는 명제에 대해 '2n+(2n+1)=(2n+2n)+1= 2(2n)+1, 따라서 참이다'와 같이 과정에 대한 논리적인 설명이 추가되어 있지 않지만 기호를 조작함으로써 짝수+홀수=홀수라는 것이 참임을 정당화하는 것은 식의 조작에 의한 단순 연역적 정당화이다.

마지막 5단계는 어떤 인정된 형식에 따라 논증하는 것으로 엄밀한 수학적 증명을 시도하는 형식적·이론적 정당화의 단계이다. 형식적 이론적 정당화는 많은 지식과 형식을 요구하는 만큼 초등학생에게는 나타나지 않는 정당화라고 할 수 있다(김정하, 2010, pp. 27~29).

이를 표로 정리하여 나타내면 <표 1>과 같다.

<표 1> 수학적 정당화의 단계 (김정하, 2010, p. 29)

단계	유형	
0단계	정당화 없음	
1단계	외적 확신에 의한 정당화	1A. 권위적 정당화
		1B. 관습적 정당화
		1C. 기호적 정당화

2단계	경험적 · 귀납적 정당화	2A. 지각적 · 활동적 정당화
		2B. 평범한 예에 의한 정당화
		2C. 결정적 예에 의한 정당화
3단계	포괄적 예를 통한 연역적 정당화	3A. 포괄적 예에 의한 정당화
		3B. 시각적 예에 의한 정당화
4단계	연역적 정당화	4A. 식의 조작에 의한 정당화
		4B. 단순 연역적 정당화
5단계	형식적 · 이론적 정당화	5A. 가설 연역적 정당화

2. 초등학생의 수학적 정당화에 대한 선행 연구

Piaget에 의하면 11세 이후에 인지 구조의 발달이 최고에 이르게 되고 명제적 가설적 사고를 할 수 있다(전예화, 1983)고 하지만 많은 연구들(Stylianides, 2007; King, 1970, 1973; Lester, 1975; Machtinger, 1965 등)에 의해 11세 이전의 학생들도 연역적 사고가 가능하며 증명까지도 가능하다는 것이 입증되었다.

Stylianides(2007)는 '교수학적 브레이크'로 표현하면서 저학년을 위한 증명의 개념화가 필요하며 모든 학년에 적용시킬 수 있는 통합된 프로그램을 발전시킬 수 있는 기초가 마련되어야 한다는 것이다. 이러한 관점에서 초등학교 3학년을 대상으로 논증의 질을 판단할 때 중요한 요소들을 조사하였다. Reid(2002) 또한 학생들이 어떤 수학 세트를 가지고 분류하기를 할 때 왜 그것들이 하나의 집합이라고 할 수 있는지를 물었고 아동들은 특수한 경우를 적용하여 분류하기위해 사용한 일반적인 규칙을 설명하는 연역적 사고가 가능함을 초등학교 2학년을 대상으로 한 연구를 통해서 주장했다. King(1973)은 유능한 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 증명에 초점을 맞춘 교수 단원(the unit)을 통해 초등학교에서 증명이 가르쳐져야 한다는 CCSM의 가능성을 조사하였고, 그 결과 대부분의 6학년 학생들이 정리의 증명을 설명하고 재생산하도록 가르치는 것이 가능했다. King(1970, 1973)도 유능한 6학년 10명의 학생들이 교사의 도움으로 증명을 시작할 수 있었음을 발견했다. Shapiro & O' Brien(1970)은 1학년부터 8학년 학생들을 대상으로 한 연구에서 연역적 사고가 가능하며 논리적 필연적 결론을 이끌어내는 데 있어서 초등학교 학생들이 상당히 성공함을 주장하였다. Lester(1975)는 어린이들이 증명 또는 증명과 비슷한 과제를 극복할 수 있는지, 언제 가능한지를 측정하기 위해서, 공준과 규칙을 적용하여 정리를 구성하도록 하는 게임을 고안했다. 그는 4개의 그룹(1-3학년 그룹, 4-6학년 그룹, 7-9학년 그룹, 10-12학년 그룹)의 학생 19명에게 규칙이 있는 연습을 주고 목표 과제에서 그들의 수행을 연구했다. 7-9학년 학생들은 10-12학년 학생들만큼 수행을 잘 했으며, 4-6학년 학생들은 오랜 시간이 걸렸지만 더 나이가 많은 학생들만큼 많은 과제를 성공적으로 해결했다. Machtinger는 유치원 아동의 지도에서 아동이 짝수와 홀수와 관련된 여러 이론을 추측하고 증명하는 것을 보고하고 있다. Machinger는 "짝수"를 한 그룹의 학생들이 모두 짝을 이루어 복도를 따라 걸을 수 있는 그 그룹의 학생의 수로 정의하였다. 홀수는 한 그룹의 학생들이 짝을 이루지 못하는 한 학생이 남을 때, 그 그룹의 학생 수이다. 모든 아동은 그룹들이 합해지기 전에 짝을 이루고 있었기 때문에 두 그룹이 함께 복도를 따라 걸으면 짝을 이루는 것이 참이어야 한다. 따라서 짝수+짝수=짝수이다. 다른 정리도 유사하게 증명되는데, "홀수+홀수"의 경우는 두 그룹이 합해지기 전에 짝이 없었던 두 아동은 합해진 그룹에서 짝이 되어야하

고 그 후에 짝 없이 남는 아동은 한 명도 남지 않게 된다는 것을 스스로 증명할 수 있다는 것이다(English, 1999 재인용).

우리나라 초등학생을 대상으로 하여 수학적 정당화에 대해 연구한 사례들도 있다. 권성룡(2003)은 초등학교 5학년을 대상으로 한 교수실험에서 정당화 과제에 대한 5학년 아동들의 반응은 진술문의 참과 거짓에 대한 판단을 교사에게 의존하는 외적 증명으로부터 연역적 추론에 이르기까지 다양했으며 같은 학년의 아동일지라도 정당화 활동의 능력은 큰 차이를 보였다고 밝히고 있다. 라병소 외(2002)는 초등학교 5학년을 대상으로 한 연구에서 초등학교 5학년 학생들에게 경험적 정당화와 연역 추론의 중간 단계의 방법을 도입하는 것이 가능하다고 주장한다. 송상헌 · 허지연 · 임재훈(2006)과 송상헌 · 장혜원 · 정영옥(2006), 이경화 · 최남광 · 송상헌(2007) 등은 초등학교 수학영재들이 형식적이고 수학적인 정당화를 할 수 있다는 점을 밝히고 있다. 염지숙(1986)은 5-7세도 연역적 추론을 할 수 있으며 추론 능력은 연령이 많아질수록 증가한다고 결론 내렸다.

이와 같이 여러 연구에서 초등학교 및 그 이하의 연령에서도 연역적 추론이 가능함을 밝히고 있다. 그러나 우리나라 초등학교 교육과정에서 초등학교 1학년에서부터 규칙 찾기를 통해 여러 가지 문제를 해결하는 활동은 지도되고 있으나(서동엽, 2003), 다양한 방법을 통한 수학적 정당화에 대한 지도가 대체로 이루어지지 않고 있다. 특히 우리나라의 초등학생의 수학적 정당화에 대한 연구는 주로 5학년과 초등영재 등에 국한 되어 있는 경향이 있다. 수학 영재라는 특수한 학생이나 어느 한 학년의 수학적 정당화에 대한 연구로는 수학적 정당화의 경향을 일반화시키기 어려울 것으로 생각되는바, 본 연구에서는 초등학교 5학년부터 중학교 3학년 일반 학생들을 대상으로 하여 일반학생들의 수학적 정당화의 인식과 단계를 살펴보고 학년에 따른 차이를 비교함으로써 수학적 정당화의 지도에 대한 시사점을 찾고자 한다.

3. 중학생들의 수학적 정당화에 관한 선행 연구

Harel & Sowder(2007)은 National Assessment of Educational Progress in United States[NAEP]는 9세, 13세, 17세(4학년, 8학년 12학년)의 수천 명을 대상으로 조사를 실시하였다. 6차에 걸친 NAEP로 부터의 얻은 증명 이해에 대한 기껏해야 아주 작은 퍼센트의 고등학교 학생만이 연역적 증명 스킴을 효과적으로 다룰 수 있었다는 것이고 대부분은 경험적 증명에 의존해 있었다는 것이다. Marrades & Gutiérrez(2000)는 15-16세 학생 16명을 대상으로 두 명씩 그룹을 지어서 한 연구 중 2그룹의 사례를 분석하였다. Cabri-Geometre라는 소프트웨어를 사용하여 증명문제를 해결하도록 하였다.

우리나라의 수학적 정당화에 대한 연구로는 이종희(2003)의 논문에서 중학교 3학년(39명)을 대상으로 한 정당화 유형에 대한 분석에서 학생들은 수학적 사실이 참이라고 인정하는 데 있어서 연역적 정당화가 가장 좋은 방법이라고 생각했다고 한다. 그리고 그들의 정당화 유형을 분석한 결과, 45.7%의 학생들이 연역적 정당화, 21.7%는 예에 의한 경험적 정당화, 10.9%는 시각적 경험에 의한 경험적 정당화, 그리고 6.5%는 권위에 의한 정당화의 유형으로 나타났다. 류성림(1998)은 중학교 2학년 213명, 중학교 3학년 209명을 대상으로 하여 수학교육에서의 증명의 의의에 관한 조사연구를 실시하였다. 류희찬 · 조완용(1999)은 중학교 수학 경시반 학생 중 증명에 대해 학습하지 않은 학생 10명을 대상으로 그 중 1명만이 지필환경에서 시각적 정당화가 가능했을 뿐 나머지 9명은 지필환경에서 경험적으로 정당화하는 것조차도 어려워했으므로 Geometric Supposer, Cabri Geometry II, Geometer's Sketchpad와 같은 탐구형 소프트웨어가 경험적 정당화를 제공할 수 있으며 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상보적 관계에도 도움이 될 것이라고 주장했다. 그러나 그에 대한 구체적인 실험은 이루어지지 않았다.

증명지도에 관한 문제점은 많이 지적되고 있으나 상대적으로 우리나라에서 학생들의 수학적 정당화나 증명에 대한 연구는 그리 많지 않으며, 연구에 있어서도 특정 학년 또는 영재나 수학 경시 반 학생들이라는 특수한 상황에 적용되고 있는 것을 볼 수 있다. 학생들의 정당화의 유형에 관한 실태는 이종희(2003)의 연구에서만 볼 수 있으나 이는 중학교 3학년 39명을 대상으로 하고 있어서 그 경향을 파악하는 데에 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 중학교 1, 2, 3학년 일반 학생을 대상으로 하여 설문조사를 실시하고 교사들로부터 받은 성취 수준과 비교를 통하여 학생들의 수학적 정당화의 인식과 수학적 정당화의 단계를 알아보고자 한다.

Ⅲ. 연구의 설계와 결과 분석

1. 연구 참여자

본 연구를 위한 표본의 표집 방법인 군집 표집(cluster sampling)은 전집을 구성하고 있는 요소를 하나하나 뽑는 것이 아니라 이러한 개별 요소가 한 데 묶인 집단을 단위로 하여 표집하는 방법(김달효, 2007)으로 인천과 경기도의 초등학교 3개교(5학년 3학급의 86명, 6학년 3학급의 83명), 서울의 중학교 3개교(1학년 3학급의 92명, 2학년 3학급의 102명, 3학년 3학급의 111명)의 학생 474명을 표집하여 설문 조사하였다. 어느 한 지역의 학교에서 비롯되는 오차를 줄이기 위해 환경적 특징이 다른 3개교를 선택하였다. 설문조사는 초등학교의 경우 담임교사가 실시하였으며 중학교의 경우 수학을 담당하는 교사에 의해 이루어졌다.

2. 측정도구의 개발

연구자가 설문지를 작성한 후 박사 학위자 2명과 동료 교사 6명에 의해 검토 받아 내용 타당도 및 학생들의 문장 이해도 등을 수정 보완하였다. 연구자는 수학적 정당화의 실태에 대하여 초등학교 3학년부터 조사하고자 하였으나, 3, 4학년 학생들이 문항을 이해하는 데 문제가 있을 것 같다는 동료 교사들의 지적에 따라, 5학년 이상을 설문조사 대상으로 삼았다. 설문이 일관성 있게 운영되도록 하기 위하여 "친구에게 수학적 정당화하기"와 "선생님에게 수학적 정당화하기"의 차이점을 조사 대상 학생들에게 설명해 주도록 설문 담당 교사에게 부탁하였다. 측정도구로는 연구자에 의해 개발된 설문지가 사용되었다.

설문지는 선택형 여섯 문항과 서술형 두 문항으로 구성하였다. 선택형 문항 1은 학생들의 성취수준, 선택형 문항 2는 정당화에 대한 학생의 생각, 선택형 문항 3은 수학적 정당화의 역할에 대한 학생들의 인식을 물었다. Lakatos(1976), Reid(1995), de Villiers(1999)의 증명의 역할에 대한 연구를 바탕으로 하여 '자기 스스로의 확신(타당화), 다른 사람에게 설명하기, 새로운 발견, 의사소통, 적용의 적절성 확인'과 같이 선택문항을 작성하였다. 선택형 문항 4는 수학적 정당화에 대한 확신, 선택형 문항 5와 문항 6은 수학적 정당화의 유형과 단계를 물었으며, 문항 5는 대수 영역, 문항 6은 기하영역의 명제로 선정하였다.

김남준 · 배종수(2006)는 서술형 평가를 통해 수학적 개념이나 원리에 관심을 가지게 되고 풀이과정을 논리적으로 전개하는 경향이 나타났으며 자신이 푼 문제에 대해 반성하는 과정을 거칠 수 있었다고 주장한 바, 본 연구를 위한 설문조사에 서술형 문항을 추가하여 연구조사를 실시하였다. 서술형 문항 7은 도형 영역의 내용으로서 교과서에서 다루지는 않지만 선택형 문항 6을 조금 발전시킨 문항이다. 서술형 문항 8은 대수 영역의 내용으로서, 선택형 문항 5와 유사하다. 두 문항 모두 친구에게 설명할 때와 선생님께 설명할 때로 구분하여 정당화하도록 하였다.

3. 자료 분석

수학적 정당화의 설문지 분석은 전체 설문조사에 응한 학생들은 초등학교 5학년에서 중학교 3학년 학생으로 모두 474명이었으나 선택형 1번 문항의 I 초등학교 5, 6학년을 대상으로 설문조사를 실시한 결과 학생들의 자기 자신의 성취 수준에 대한 평가는 실제 성취 수준과 차이가 있는 것으로 나타남을 확인하고, 교사가 객관적 성적 및 학교의 사정을 고려하여 판단한 학생 388명에 대한 성취수준과 수학적 정당화와의 상관관계를 분석하였으나 본 연구의 목적인 초등학교 6학년의 수학적 정당화의 가능성과 수학적 정당화의 단계에 있어 다른 학년과의 비교 분석을 통하여 알아보기 위한 목적에 성취수준이 부합하지 않는다고 사료되어 성취수준에 관한 데이터는 분석에서 삭제하고 474명에 대한 빈도를 분석하였다. 선택형 문항 2번, 3번, 4번은 각 학생이 선택한 응답에 따른 빈도 분석하였다. 선택형 5번과 6번 문항과 서술형 7번과 8번은 수학적 정당화의 단계에 그 준거를 두고 빈도 분석을 하였다. 특히 선택형 5번 문항과 6번 문항의 경우 두 가지 이상의 항목을 선택하게 되어 있으므로 다중 응답 문항이라고 할 수 있으며 코딩 방법으로는 중복법(multiple response method)(성태제, 2009)을 사용하고, 학년별 정당화 단계의 평균을 구함으로써 수학적 정당화의 단계에 있어서 각 학년별로 차이를 분석하였다.

4. 연구 결과 분석 및 해석

선택형 1번 문항은 "자신의 수학 실력은 어떻다고 생각하십니까?"라는 질문으로, 이를 통해 학생 스스로 자신의 수학 성취 수준을 평가하도록 하였다. 그런데, I 초등학교 5, 6학년을 대상으로 설문조사를 실시한 결과, 학생들의 자기 자신의 성취 수준에 대한 평가는 실제 성취 수준과 차이가 있는 것으로 나타났다. 그래서 연구자는 2차적으로 교사들에게 학생들의 실제 성취 수준에 대한 자료를 부탁하였다. 학생들의 수학 수준은 초등학생의 경우 담임교사가, 중학생의 경우 수학 담당 교사가 주관적으로 판정하게 하였으며, 주관적 판단이 어려울 때는 해당 학급의 상위 25% 이내의 학생을 상, 25-75%의 학생을 중, 그 외의 학생을 하로 판정하도록 하였다. S 중학교의 경우 학생들의 실제 성취 수준에 관한 데이터가 수집이 되지 못하여 성취 수준과 관련된 학생 수는 해당 데이터를 제외하였다.

그러므로 앞으로 학생들의 성취 수준에 따른 분석이 필요할 경우에는 문항 1에 의한 성취 수준보다는 교사가 판단한 388명의 학생들의 성취 수준을 중심으로 분석한다.

다음은 S 중학교의 일부 학생들을 제외한 388명에 대하여 교사가 판단한 성취 수준의 분석 결과이다. 학교별로 학생들의 성취수준에서 많은 차이가 나는 것을 볼 수 있다. G초와 I초교의 경우는 상위의 성취수준의 학생의 비율이 가장 높지만 나머지 J초와 M중 그리고 W중은 중위의 성취수준의 학생이 가장 높았다.

<표 2> 교사가 판단한 학생들의 수학 성취도 수준

학교	교사가 판단한 학생들의 수학 성취도 수준(%)			전체(388명)
	하	중	상	(%)
G초	10.5	36.8	52.6	100
I초	21.6	35.3	43.1	100
J초	23.0	55.7	21.3	100
M중	29.5	43.8	26.8	100
W중	31.8	36.4	31.8	100
전체	25.3	41.5	33.2	100

선택형 2번 문항 "자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지 다시 확인해 볼 필요가 있는가?"에 대한 학년별 반응은 다음과 같다. '매우 그렇다'와 '그렇다'에 대한 응답은 전체 학생 수의 73.4%로 설문에 참여한 많은 학생들은 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지 다시 확인해 볼 필요가 있다고 응답하였다. 그러나 5학년의 경우 82.5%이며 중학교 3학년의 경우는 63%로, 학년이 올라갈수록 이 비율이 낮게 나왔다.

선택형 3번의 수학적 정당화의 역할에 대한 응답은 학년별로는 많은 차이를 보이지 않았다. 자기 자신을 확신시키기(56.3%), 지식의 체계화(20.3%), 새로운 발견(18.4%), 다른 사람을 설득과 설명(3.6%), 의사소통(1.3%)으로 나타났다. 이로써 학생들은 수학적 정당화에 있어서 심리적 측면으로서 자기 자신 확신시키기를 가장 중요하게 생각하는 것으로 나타났다.

<표 3> 선택형 3번 문항의 학년별 분석

학년	3. 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지를 다시 확인해 보는 것이 왜 필요할까요?(%)						전체(%)
	자신의 확신	다른 사람을 설득과 설명	새로운 발견	의사 소통	지식의 체계화	무응답	(474명)
5	60.5	2.3	18.6	1.2	17.4	0.0	100
6	57.8	6.0	14.5	1.2	20.5	0.0	100
중1	50.0	3.3	22.8	1.1	21.7	1.1	100
중2	60.8	2.0	16.7	1.0	19.6	0.0	100
중3	53.2	4.5	18.9	1.8	21.6	0.0	100
전체(%)	56.3	3.6	18.4	1.3	20.3	0.2	100

선택형 4번을 통하여 69.5%의 학생이 수학적 정당화의 유용성을 느끼고 있으며 필요하지 않다고 생각하는 학생은 1.5%로 극히 낮은 비율로 나타났다.

<표 4> 선택형 4번 문항의 학년별 분석

학년	4. 해결방법이나 답을 친구나 선생님께 설명하는 활동은 자신이 수학을 이해하도록 하는 데 도움을 줄 것이라고 생각하나요?(%)						전체(%)
	매우 그렇다	조금 그렇다	보통 이다	그렇지 않다	매우 그렇지 않다	무응답	(474명)
5	40.7	33.7	22.1	3.5	0.0	0.0	100
6	30.1	44.6	21.7	3.6	0.0	0.0	100
중1	37.0	26.1	31.5	2.2	3.3	0.0	100
중2	38.2	25.5	26.5	8.8	1.0	0.0	100
중3	40.5	31.5	19.8	5.4	1.8	0.9	100
전체(%)	37.6	31.9	24.3	4.9	1.3	0.2	100

결과적으로 학생들은 수학적 정당화의 필요성을 느끼며 자신 자신을 확신시키는 심리적인 측면에서의 역할이 그리고 그 다음으로 지식의 체계화라는 논리적 측면에서 수학적 정당화의 역할을 중요시 여기고 있으며 수학적 정당화는 선생님이나 친구들에게 도움을 주는 유용한 방법으로 생각하고 있었다.

선택형 5번 문항에서는 "홀수+홀수=짝수"가 옳다는 것을 친구에게 어떻게 확인시킬 것인지를 5개의 선택지에서 모두 선택하도록 하였다. 한 개만 선택한 학생도 있고 4개를 선택한 학생도 있었다. 중복 선택한 학생의 응답을 하나하나 개별적으로 고려하여 그 빈도는 1,010개가 되었다. 분석결과 경험적·귀납적 정당화 중 평범한 예를 이용한 정당화가 29.3%가 가장 높았다. 증명을 학습한 중학교 3학년의 경우만 4단계와 2단계가 동일한 비율로 나타났고, 6학년을 포함한 다른 학년의 경우에는 2단계, 4단계, 3단계 순서로 같은 경향을 보여주었다. 단순 연역적 정당화의 비율을 비교할 때 학년별로 조금씩 변화가 있기는 하나 증명을 학습한 후인 중학교 3학년에서 그 비율이 가장 높게 나타났으며 성취수준별 분석의 결과 전체적으로는 3단계의 귀납적 정당화가 가장 높게 나타났으나 단순 연역적 정당화만을 비교할 때 상위 수준으로 갈수록 그 비율이 높게 나타났다.

<표 5> 문항 5의 학년별 분석

학년	5. "홀수+홀수=짝수"라는 것이 옳다는 것을 어떻게 하면 친구에게 확신시킬 수 있을까요?(%)					전체(%) (474명)
	3단계 (포괄적 예)	2단계 (결정적 예)	2단계 (귀납적)	1단계 (외적 확신)	4단계 (단순 연역)	
5	16.4	27.7	24.6	7.7	23.6	100
6	12.3	32.3	30.8	7.2	17.4	100
중1	14.3	24.0	30.6	7.6	23.5	100
중2	16.7	25.0	31.5	3.7	23.1	100
중3	9.1	25.0	28.9	8.1	28.9	100
전체(%)	13.8	26.7	29.3	6.8	23.4	100

<표 6> 문항 5의 성취수준별 분석

성취 수준	5. "홀수+홀수=짝수"라는 것이 옳다는 것을 어떻게 하면 친구에게 확신시킬 수 있을까요?(%)					전체(%) (388명)
	3단계 (포괄적 예)	2단계 (결정적 예)	2단계 (귀납적)	1단계 (외적 확신)	4단계 (단순 연역)	
하	12.5	27.1	34.8	7.7	17.9	100
중	14.7	29.4	29.1	6.6	20.2	100
상	12.9	25.4	27.1	6.1	28.5	100
전체(%)	13.6	27.4	29.8	6.7	22.5	100

선택형 6번 문항에 대해 학생들은 4단계의 단순 연역적 정당화를 가장 많이 선택하였으며(33.5%), 이어서 3단계의 포괄적 예에 의한 연역적 정당화(20.9%)의 비율이 높았다.

<표 7> 선택형 6번 문항의 학년별 분석

학년 (%)	6. "사각형의 내각의 크기의 합은 360도이다"라는 것이 참인지 거짓인지를 선생님이나 친구에게 어떻게 하면 확인시킬 수 있을까요? (%)						전체 (%) (1,010)
	3단계 (포괄적 예)	4단계 (단순연역)	2단계 (귀납적)	1단계 (교사의 권위)	1단계 (교과서의 권위)	2단계 (극단적 예)	
5	22.9	30.8	10.8	7.5	8.9	19.2	100
6	20.4	33.8	4.0	6.0	10.0	25.9	100
중1	19.9	31.9	12.0	4.7	11.0	20.4	100
중2	24.7	32.6	7.9	6.2	10.1	18.5	100
중3	16.0	38.5	11.0	8.0	9.5	17.0	100
전체	20.9	33.5	9.1	6.5	9.9	20.1	100

문항 5인 대수 영역에서의 정당화 단계에서, 4단계로 판단되는 학생 중 4단계 문항만을 선택한 학생은 11.1%에 불과하며, 그 외는 그 이하의 단계의 문항도 함께 선택하고 있다는 점이다. 특히, 45.2%의 학생들이 2단계의 귀납적·경험적 정당화도 함께 선택하였다. 다른 선택지에 응한 경우까지 고려하면 2단계를 택한 학생은 4단계 전체의 71%가 되고 있다. 그러나 3단계를 함께 택한 학생은 38.9% 정도 밖에 되지 않는다. 또한 외적 확신에 의한 정당화를 함께 선택한 학생도 16%에 이르고 있다. 문항 6의 도형 영역에서도 대수 영역에서와 마찬가지로 비슷한 경향을 보이고 있다. 4단계로 판단되는 학생들 중 4단계만을 선택한 학생은 18.26%로 대수 영역보다 높았다. 4단계+2단계는 24.9%이며, 다른 문항을 선택한 경우까지 따지면 2단계를 택한 학생은 전체의 54.8%에 이른다. 그러나 3단계를 함께 택한 학생은 42.6%가 된다. 또한 외적 확신에 의한 정당화를 선택한 학생도 24%였다.

<표 8> 수학적 정당화의 4단계와 함께 다른 단계의 정당화 선택 결과 분석(문항 5)-1

대수영역	4	1, 4	2, 4	1, 2, 4	3, 4	1, 3, 4	2, 3, 4	1,2,3,4	전체
%	11.1	2.4	45.2	2.4	13.9	1.6	13.5	9.9	100%

<표 9> 수학적 정당화의 4단계와 함께 다른 단계의 정당화 선택 결과분석(문항 6)-2

도형영역	4	1, 4	2, 4	1, 2, 4	3, 4	1, 3, 4	2, 3, 4	1,2,3,4	전체 (345명)
%	18.3	7.8	24.9	6.4	14.5	4.6	18.3	5.2	100%

직접 정당화를 시도하는 서술형 7번 문항에서, 4단계의 정당화가 가장 많이 나타났다(친구에게 58.4%, 교사에게 54.0%). 그 다음에는 2단계의 정당화가 많았다(친구에게 22.2%, 교사에게 16.2%). 반면, 3단계의 포괄적 예에 의한 연역적 수학적 정당화는 친구에게 1.1%, 교사에게 1.5%로 아주 낮은 비율로 나타났다. 학생들은 포괄적 예로 하나의 예를 이용하여 연역적으로 설명하기 보다는 여러 가지 예를 통한 또는 극단적인 예를 통한 경험적·귀납적 정당화를 하거나 예를 이용하지 않고 논리적인 설명으로 수학적 정당화를 써 내려가는 단순 연역적 정당화를 하였다.

<표 10> 서술형 7번 문항의 학년별 분석

<7번> 학년	도형영역에서의 정당화 단계(친구에게)(%)					도형영역에서의 정당화 단계(교사에게)(%)				
	0단계	1단계	2단계	3단계	4단계	0단계	1단계	2단계	3단계	4단계
5	3.5	8.1	26.7	0.0	61.6	7.0	9.3	22.1	0.0	61.6
6	8.4	3.6	30.1	0.0	57.8	10.8	2.4	27.7	0.0	59.0
중1	26.1	2.2	26.1	4.3	41.3	33.7	3.3	20.7	5.4	37.0
중2	7.8	5.9	14.7	1.0	70.6	20.6	7.8	7.8	2.0	61.8
중3	15.3	9.0	16.2	0.0	59.5	31.5	9.9	7.2	0.0	51.4
전체	12.4	5.9	22.2	1.1	58.4	21.5	6.8	16.2	1.5	54.0

서술형 8번 문항은 "짝수+홀수=홀수이다"라는 대수 영역의 문제를 정당화하는 것이다. 4단계가 가장 많았던 도형 영역에서와는 달리 대수 영역에서는 2단계가 가장 많이 나타났으며(친구에게 73.6%, 교사에게 52.7%), 그 다음에는 4단계의 정당화가 가장 많이 나타났다(친구에게 9.7%, 교사에게 19.6%). 포괄적 예에 의한 3단계의 수학적 정당화는 친구에게 3.0%, 교사에게 4.2%로 낮게 나타났다. 정당화를 시도하지 않은 0단계는 도형 영역에서와 비슷한 수치로 나타났다.

기하영역에서 나타난 결과와 유사하게 1단계의 외적 확신에 의한 수학적 정당화나 3단계에 포괄적 예에 의한 연역적 수학적 정당화는 낮은 비율이었으나, 기하영역에서보다 3단계의 포괄적 예에 의한 연역적 정당화가 높게 나타났다. 2단계의 경험적 · 귀납적 정당화와 4단계의 단순 연역적 정당화를 비교해 보면 친구에게의 비율이 낮아지고 교사에게 비율이 높아진 것을 볼 수 있다. 이는 대수 영역의 수학적 정당화를 할 때 교사에게는 형식적·연역적 정당화를 통하여 수학적 정당화를 하지만 친구에게는 여러 가지 예나 결정적인 예를 통하여 쉽게 설명하려는 경향을 보이는 학생들이 많았다. 대수 영역에서의 수학적 정당화에 있어서 저학년으로 갈수록 2단계의 경험적 · 귀납적 정당화를 하는 학생들의 비율이 높아졌고 중학교 3학년의 경우 상대적으로 2단계의 수학적 정당화는 다른 학년의 학생들에 비해 낮고 4단계의 형식적 정당화의 비율이 높았다.

도형 영역에서와는 달리 대수 영역에서는, 친구에게보다 교사에게 정당화하는 단계가 3단계와 4단계에서 더 비율이 높고 2단계에서는 친구에게가 더 높았으나 그 차이가 크지는 않았다.

<표 11> 서술형 8번 문항의 학년별 분석

<8번> 학년	대수영역에서의 정당화 단계(친구에게)(%)					대수영역에서의 정당화 단계(교사에게)(%)				
	0단계	1단계	2단계	3단계	4단계	0단계	1단계	2단계	3단계	4단계
5	4.7	0.0	88.4	3.5	3.5	5.8	0.0	82.6	3.5	8.1
6	3.6	0.0	84.3	7.2	4.8	8.4	0.0	72.3	10.8	8.4
중1	16.3	1.1	69.6	1.1	12.0	25.0	3.3	45.7	2.2	23.9
중2	12.7	2.9	74.5	2.0	7.8	26.5	1.0	47.1	3.9	21.6
중3	18.9	4.5	56.8	1.8	18.0	34.2	6.3	26.1	1.8	31.5
전체	11.8	1.9	73.6	3.0	9.7	21.1	2.3	52.7	4.2	19.6

7번과 8번 문항 교사나 친구 어느 한쪽에라도 정당화하지 않은 학생은 제외한 342명의 각각의 경우의 정당화 단계의 평균을 구한 결과는 다음 표와 같다. 여기서 알 수 있는 것은, 학생들은 자신과 단계가 비슷하거나 낮다고 생각하는 친구들에게는 보다 낮은 단계로 정당화를 시키며, 그 차이가 크지는 않지만 교사에게는 보다 높은 단계로 정당화를 시도하고 있음을 알 수 있다.

<표 12> 서술형 7번과 8번 문항의 정당화 단계의 평균

	기하 영역		대수 영역	
	친구에게	교사에게	친구에게	교사에게
단계의 평균	3.29	3.34	2.24	2.52

위에서 살펴본 바와 같이 선택형 5번 문항에서의 단계와 6번 문항에서의 단계, 서술형 7번과 8번 문항에서의 학생들의 정당화 단계를 종합적으로 분석하면 <표 13>과 같다. 이를 정리하면 선택형 문항에서 모든 학년에서 공통적으로 기하 영역의 단계가 대수 영역의 단계보다 최소 0.39에서 최대 0.81보다 높다. 서술형에서는 친구에게 정당화하는 단계와 교사에게 정당화하는 단계가 다르기 때문에 이 두 단계의 평균을 구하여 이를 개인별 정당화 단계로 생각하였다. 이 평균(기하 영역 SGm, 대수 영역 SAm)을 보면, 기하 영역의 단계가 대수 영역의 단계보다 적게는 0.67, 높게는 1.09까지 더 높게 나타났다. 그리고 대수 영역을 살펴보면, 학생들은 선택형 문항에서는 평균 3.11의 단계를 보이고 있으나 서술형에서는 2.38로, 서술형일 때 평균적으로 0.73의 단계가 낮음을 알 수 있다. 5학년의 경우 0.97의 단계 차를 보이고 있다. 이는 심각한 괴리로서, 대수 영역에서의 정당화 교육에서 주목하여야 할 부분이라고 생각한다. 마지막으로 기하 영역을 살펴보면, 선택형 문항에서 평균 3.64의 단계를 보이고 있으며, 서술형 문항에서는 3.31로, 서술형일 때 평균적으로 0.33의 단계 저하를 보이고 있다.

<표 13> 학년별 정당화 단계의 평균

학년(명)	선택형			서술형 도형			서술형 대수			서술형 차	대수 차	기하 차
	대수 (OA)	도형 (OG)	차 OG-OA	친구 SGf	교사 SGt	평균 SGm	친구 SAf	교사 SAt	평균 SAm	SGm -SAm	OA -SAm	OG -SGm
5학년(78)	3.14	3.55	0.41	3.21	3.21	3.21	2.12	2.22	2.17	1.04	0.97	0.35
6학년(69)	2.96	3.77	0.81	3.23	3.33	3.28	2.19	2.32	2.25	1.03	0.70	0.49
중1학년(60)	3.17	3.67	0.50	3.17	3.13	3.15	2.30	2.67	2.48	0.67	0.68	0.52
중2학년(72)	3.22	3.61	0.39	3.44	3.53	3.49	2.21	2.58	2.40	1.09	0.83	0.13
중3학년(63)	3.05	3.63	0.59	3.40	3.49	3.44	2.41	2.90	2.66	0.79	0.39	0.19
합계(342)	3.11	3.64	0.54	3.29	3.34	3.31	2.24	2.52	2.38	0.94	0.73	0.33

본 조사 연구의 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 수학적 정당화의 필요성에 관한 질문에 대해 73.4%의 학생들이 '매우 그렇다'와 '그렇다'에 응답하였다. 이러한 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식은 초등학교 5학년에서 중학교 3학년에 갈수록 그 비율이 낮아졌다.

둘째, 수학적 정당화의 역할에 대해서 학생들은 자신을 확신시키기 위해서, 그리고 자신이 알고 있는 것이 문제에 적절하게 적용되었는지를 알아보기 위해서라고 대답한 학생들의 비율이 높았으며 '의사소통을 위해서'에 응답한 학생들의 비율은 상대적으로 낮게 나타났다.

셋째, 수학적 정당화가 수학을 이해하는데 도움이 된다고 생각하는 학생이 69.5%로 가장 높은 비율을 차지했다. 특히, 낮은 성취수준의 학생보다는 높은 수준의 학생들이 수학적 정당화가 수학을 이해하는 데에 도움이 된다고 생각하는 학생 비율이 높았다.

넷째, 수학적 정당화의 수준은 선택형 문항에서는 대수 영역과 기하 영역 모두에서 4단계의 단순 연역적 정당화를 가장 많이 선택하였다. 그러나 자신이 직접 수학적 정당화를 하는 활동에서는 기하영역에서는 4단계의 단순 연역적 정당화의 수준의 학생들의 비율이 높았으나 대수 영역에서는 2단계의 경험적·귀납적 수학적 정당화를 하는 학생들의 비율이 가장 높았다.

다섯째, 정당화의 수준이 성취수준과 밀접한 관련이 있다. 4단계의 수학적 정당화를 하는 학생의 비율이 상위의 성취 수준 학생 비율이 가장 높게 그리고 중위의 성취수준의 학생 그 다음으로 하위 성취수준의 학생으로 나타났다. 특히 0단계의 수학적 정당화(수학적 정당화 없음)는 하에서 상으로 갈수록 그 비율이 눈에 띄게 줄어들었다.

여섯째, 기하 영역의 문항과 대수 영역의 서술형 문항은 교사에게 즉 자신보다 수학적 정당화의 수준이 높다고 생각하는 사람, 그리고 친구에게 즉 자신과 수학적 정당화의 수준이 비슷하거나 자신보다 못하다고 생각하는 사람에 대한 수학적 정당화를 하도록 하였다. 학생들은 친구들에게는 보다 낮은 수준으로 수학적 정당화를 하고 교사들에게는 보다 높은 수준의 수학적 정당화를 시도하고 있었다.

일곱째, 대수 영역과 기하 영역 모두 서술형 보다는 선택형의 수학적 정당화의 단계 높게 나타났다. 특히 대수 영역에서는 서술형과 선택형의 정당화의 단계차가 더 크게 나타났다.

여덟째, 학년별 수학적 정당화의 단계를 비교했을 때, 중학교 3학년에서 4단계의 수학적 정당화가 가장 높게 나타나기는 했으나 그 차이가 크지 않았으며 특히 기하영역의 서술형 문제에 대한 응답 비율을 비교한 결과 오히려 중학교 2학년에서 그 4단계의 수학적 정당화를 하는 학생의 비율이 높게 나타났다. 이를 통해 교육과정에서 수학적 증명을 배웠는가가 수학적 정당화에 크게 영향을 미치지 않으며 예상했던 것과는 달리 초등학교 5, 6학년을 포함한 중학교 1, 2학년의 수학적 정당화의 수준도 상당히 높게 나타났다.

Ⅳ. 결 론

본 연구는 초등학교 5학년, 6학년 그리고 중학교 1학년, 2학년, 3학년 학생 474명을 대상으로 하였다. 이는 우리나라의 교육과정상 8-나 단계에서 시작하는 증명 지도를 고려하여, 중학교에 입학하기 전의 초등학교 5학년과 6학년의 학생을 그리고 중학교 1학년 학생과 증명을 배우기 전 2학년 학생, 증명에 대해 학습한 중학교 3학년 학생을 대상으로 하였다. 자료의 분석 결과 물론 중학교 3학년이 높은 비율의 학생이 단순 연역적 정당화의 단계로 정당화하기는 했으나, 초등학교 5학년 학생들의 단순 연역적 정당화 단계의 비율도 상당히 높았다.

설문에 응한 학생들 중 63%이상의 학생들이 수학적 정당화의 필요성을 느끼고 있었으며 또한 김정하 · 강문봉(2009)의 연구에서 초등학교 교사들의 경우 수학적 정당화가 필요하다고 느끼는 교사가 전체 교사의 비율이 62% 이상이었다. 현재 중학교 2학년의 2학기에 증명에 대한 지도가 시작되지만, 본 설문에 응한 초등학교 5학년에서 중학교 2학년 증명에 대한 학습을 시작하기 전까지의 학생(474명 중 363명의 학생)들 역시 대부분이 그 필요성을 느끼고 있다는 것이다. 이는 현 교육과정에 시사하는 바가 크다고 하겠다.

Leddy(2001)의 연구에서는 대수 영역에서, Healy & Holyes(1998)의 연구에서는 기하영역에서 보다 나은 증명의 구성을 보였으나, 본 연구에서는 기하의 영역에서 보다 높은 단계의 수학적 정당화를 하는 것으로 나타났다. Balaceff(1991)는 사회적 상호작용을 할 때 학생들이 성공적으로 다른 사람을 설득하기를 원하거나 다른 관점을 받아들일 수 없거나 과학적인 근거에서 그들의 갈등을 극복하기 어려울 때 높은 수준의 증명 대신에 동의를 얻어내기 위해 극단적인 예나 순수한 예를 사용하는 정당화를 선호한다고 하였으나 본 연구에서는 친구에게 정당화를 할 때보다 교사에게 정당화를 할 때에 정당화의 단계가 약간 높게 나타났으나 큰 차이는 없었다.

중학교 3학년을 대상으로 한 이종희(2003)의 연구, 초등학교 6학년을 대상으로 한 김정하(2010)의 연구에서 학생들이 연역적 정당화를 선호하는 것을 보였다. 본 연구에서도 중학교 3학년은 연역적 정당화를 하는 학생의 비율이 다른 수학적 정당화를 하는 학생보다 높았으나 중학교 3학년 학생들과 마찬가지로 초등학교 5학년에서부터 중학교 2학년 학생에 이르기까지 모든 학년에서 단순 연역적 정당화의 수준에 있는 학생들의 비율이 가장 높았다.

본 연구 결과 성취수준이 높은 학생들이 높은 단계의 수학적 정당화를 하였으며, 초등학교 5학년부터 중학교 3학년까지의 일반학생들의 수학적 정당화의 단계는 문제마다 차이가 있으나 선택형의 대수 · 도형 문항과 서술형의 도형 문항에서는 4단계의 단순 연역적 정당화의 비율이 높았으며, 서술형 대수 문항에서만 2단계의 귀납적 정당화가 높게 나타났다. 초등학교 5학년으로부터 중학교 2학년에 이르기까지 학생들에게도 자신의 해결 결과에 대해 맞았는지, 틀렸는지, 왜 그러한지를 정당화 할 수 있는 기회가 많이 제공되어야 할 것으로 생각된다. 또한 귀납적 추론에 중점을 두고 있는 초등학교 교육 과정에서도 연역적 정당화를 보다 적극적으로 지도하여 중학교 2학년 2학기 이후에 연역적 수학적 정당화의 학습 과정에서 겪게 되는 어려움을 최소화하도록 노력해야 할 것이다.

참 고 문 헌

권성룡 (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 한국수학교육학회지 초등수학교육, 7(2), 85-99.

김남준, 배종수 (2006). 서술형 평가가 초등학생의 수학적 성향에 미치는 영향 연구. 한국초등수학교육학회지, 10(2), 195-219.

김달효 (2007). 교육학 개론. 서울: 시그마프레스

김정하, 강문봉 (2009). 초등학교 교사들의 수학적 정당화에 관한 연구. 대한수학교육회지 수학교육학연구, 19(3), 371-392.

김정하 (2010). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

라병소, 신경자, 신준식, 서동엽 (2002). 초등학교 학생들의 형식적 추론 능력에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 41(3), 291-318.

류성림 (1998). 수학교육에서 증명의 의의에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 37(1), pp73-85.

류희찬, 조완영 (1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. 대한수학교육학회지, 수학 교육학 연구, 9(1), 245-261.

서동엽 (2010). 수학적 추론의 본질에 관한 연구. 한국초등수학교육학회지, 14(1), 65-80.

성태제 (2009). SPSS/AMOS를 이용한 알기 쉬운 통계분석. 서울: 학지사

송상헌, 허지연, 임재훈 (2006). 기하 영역의 최대분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. 수학교육학 연구, 16(1), 79-94.

송상헌, 장혜원, 정영옥 (2006). 초등학교 6학년 수학 영재들의 기하 과제 증명에 관한 사례 분석. 수학교육학연구, 16(1), 327-344.

염지숙 (1986). 5·6·7세 어린이들의 연역적 추리능력의 발달에 관한 연구. 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문.

이경화, 최남광, 송상헌 (2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구과정(정당화 과정과 표현과정 중심으로). 학교수학, 9(4), 487-506.

이종희 (2003). 비판적 사고와 증명 능력 및 정당화 유형과의 관계. 대한수학교육학회 제24회 추계학술대회 논문집, 535-548.

전예화 (1983). 인지적 발달 단계와 연역적 추론에 관한 연구. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof, in: A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Eds). *Mathematical knowledge: Its growth teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer.

de Villers M. (1999). *Rethinking proof with sketchpad*. Emeryville, Ca: Key curriculum Press.

English, D. L. (1999). *Mathematical reasoning : Nature, form and development.* Hove, United Kingdom.

Harel, G., & Sowder, L. (2007), Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 435-458). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justification and proving in school mathematics.* Institute of Education of University of London.

King, I. L. (1973). A formative development of an elementary school unit on proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*(1), 57-63.

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutation: The logic of mathematical discovery.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Leddy, J. F. (2001). *Justifying and proving in secondary school mathematics.* Unpublished doctoral dissertation, University of Toronto, Canada.

Lester, F. K. (1975). Developmental aspects of children's ability to understand mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 6*(1), 14-25.

Machtinger, D. D. (1965). *Experimental course report, kindergarten, No. 2.* Washington, DC: National Science Foundation.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proof produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 88-125.

National Council of Teachers of Mathematics. (1998). *Qualitative research methods in mathematics education.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Reid, D. A. (2002). Describing young children's deductive reasoning. *Proceeding of the 26th of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 105-12.

Stylianides, J. A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65,* 1-20.

van Dormeolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 27-34.

<Abstract>

Awareness and Steps of the Mathematical Justification of Elementary and Middle School Students

Kim, Jeong Ha[2)]

Mathematical justification is essential to assert with reason and to communicate. Students learn mathematical justification in 8th grade in Korea. Recently, However, many researchers point out that justification be taught from young age. Lots of studies say that students can deduct and justify mathematically from in the lower grades in elementary school.

I conduct questionnaire to know awareness and steps of elementary school students and middle school students. In the case of 9th grades, the rate of students to deduct is highest compared with the other grades. The rease is why 9th grades are taught how to deductive justification. In spite of, however, the other grades are also high of rate to do simple deductive justification. I want to focus on the 6th and 5th grades. They are also high of rate to deduct. It means we don't need to just focus on inducing in elementary school. Most of student needs lots of various experience to mathematical justification.

Keyword: Mathematical justification, Awareness on Mathematical Justification, Steps of Mathematical justification

논문접수: 2011. 07. 08
논문심사: 2011. 07. 08
게재확정: 2011. 07. 22

2) seakjh@hanmail.net

<부 록>

수학적 정당화에 관한 학생 설문

( ) 학교 ( ) 학년 ( ) 반 이름 ( )

1. 자신의 수학 실력은 어떻다고 생각하십니까? ( )
   ① 매우 잘 한다. ② 조금 잘 한다. ③ 보통이다.
   ④ 조금 못 한다. ⑤ 아주 못한다.

2. 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지 다시 확인해 볼 필요가 있을까요? ( )
   ①매우 그렇다 ②조금 그렇다. ③보통이다.
   ④그렇지 않다. ⑤ 매우 그렇지 않다.

3. 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지를 다시 확인해 보는 것이 왜 필요할까요? ( )
   ① 내가 찾은 해결 방법이 맞았는지를 나 스스로 알아보기 위해서
   ② 다른 사람이 나의 해결방법을 이해할 수 있도록 설명하기 위해서
   ③ 해결 방법을 되돌아보다 보면 또 다른 새로운 것을 찾게 되는 경우가 있기 때문에
   ④ 다른 친구나 선생님과 의견을 나누기 위해서
   ⑤ 내가 알고 있는 것들이 이 문제에 적절하게 잘 적용되었는지 확인해 보기 위해서

4. 해결방법이나 답을 친구나 선생님께 설명하는 활동은 자신이 수학을 이해하도록 하는 데 도움을 줄 것이라고 생각하나요? ( )
   ①매우 그렇다 ②조금 그렇다. ③보통이다.
   ④그렇지 않다. ⑤ 매우 그렇지 않다.

5. "홀수+홀수=짝수"라는 것이 옳다는 것을 어떻게 하면 친구에게 확인시킬 수 있을까요?
   자신의 생각과 비슷한 것을 모두 고르시오. ( )
   ① 5는 홀수로 2로 나누어서 1이 남고, 7도 홀수로 2로 나누어서 1이 남는다.
   각각 1씩 남은 것을 더하면 2가 되므로 5와 7을 더하면 짝수가 된다.
   이러한 예시 하나만으로도 알 수 있기 때문에 더 많은 예는 필요하지 않다.
   ② 홀수 중 가장 작은 수의 합인 1+1=2이고, 아주 큰 수인 경우 100003+100001=200004로 짝수이므로 모든 홀수들은 서로 더하면 짝수가 된다고 설명한다.
   ③ 1+3=4. 3+5=8, 5+7=12, 7+9=16, 9+11=20... 와 같이 될 수 있는 한 많은 예를 보여주겠다.
   ④ 책을 펼쳐서 보여주거나 선생님께서 수업시간에 그렇게 말씀하신 적이 있으시기 때문에 당연히 참이라고 설명한다.
   ⑤ 한두 가지의 예만으로는 참이라는 것을 보여준다는 것은 충분하지 않다.
   홀수=2의 배수+1이므로
   홀수+홀수 = (2의 배수+1)+(2의 배수+1) = 2의 배수+2 = 2×(어떤 수+1)로 2의 배수, 즉 짝수가 되므로 위의 식은 모든 경우에 참임을 알 수 있다고 설명하겠다.

6. "사각형의 내각의 크기의 합은 360도이다"라는 것이 참인지 거짓인지를 선생님이나 친구에게 어떻게 하면 확인시킬 수 있을까요? 자신의 생각과 비슷한 것을 모두 고르시오.( )
   ① 사각형을 하나 그리고 삼각형 2개로 나눈다.. 삼각형 2개로 나누어질 수 있으므로 180×2=360 즉 사각형의 내각의 합은 360도이다. 모든 사각형은 이와 같으므로 다른 사각형은 다시 조사하지 않아도 360도임이 확실하다.
   ② 삼각형의 세 내각의 합이 180도임을 알고 있다. 또 사각형은 이러한 삼각형 두 개로 이루어져 있으므로 180×2=360으로 사각형의 네 내각의 합이 360도임이 확실하다.
   ③ 사각형은 여러 종류가 있으므로 한 사각형만 조사해서는 안 된다. 그러므로 여러 개의 사각형에서 4개의 각을 모두 재거나 각을 잘라서 보여주어야만 한다.
   ④ 지난 수업 시간에 선생님께서 사각형의 내각의 합은 360도라고 말씀하셨으니 당연히 사 각형의 내각의 합은 360도임이 확실하다.
   ⑤ 교과서에 사각형의 내각의 합은 360도라고 나와 있으니 당연히 사각형의 내각의 합은 360도이다.
   ⑥ 직사각형을 그리면 4개의 각이 모두 직각이 된다. 그러므로 각을 모두 합하면 360도가 된다.

7. 다음이 옳은지 틀린지를 친구들이나 선생님에게 설명하려고 합니다. 자신의 생각이 잘 드러나도록 자세히 써 주세요.

오각형의 내각의 크기의 합은 540도이다.

8. 다음이 옳은지 틀린지를 친구들이나 선생님에게 설명하려고 합니다. 자신의 생각이 잘 드러나도록 자세히 써 주세요.

홀수-홀수=짝수 (단, 앞의 홀수는 뒤의 홀수보다 더 크다)