한국초등수학교육학회지 15(2) 247-282.
2011. 08. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(2) 247-282.
August 31. 2011.

선분의 등분할 작도에 나타나는 6학년 영재 · 일반 학급 학생들의 수학적 사고

임영빈[1] · 류희수[2]

7차 교육과정의 초등학교 수학교과서를 살펴보면 자와 컴퍼스를 사용하여 삼각형과 원을 그리며, 삼각자를 활용해 수직선과 평행선을 그리는 작도 교육이 이루어지고 있다. 본 연구는 2010년 초등학교 6학년 학생들의 작도 과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석하여 초등학교 작도지도의 시사점을 제안하고자 한다. 연구결과 영재학급 6학년 학생들은 교사의 적절한 조언이 뒷받침되면 선분의 등분할 작도를 통해 유추, 연역, 발전, 일반화, 기호화의 사고와 같은 수학적 사고가 가능하며, 일반학급 학생들에게도 현행 교육과정보다 심화된, 자와 컴퍼스를 이용한 수직이등분선, 사각형, 마름모, 선분의 연장 등의 작도는 교육이 가능하다.

[주제어] 선의 등분할, 기하학적 작도, 수학적 사고

Ⅰ. 서 론

작도 문제의 해결을 위한 탐구는 기하학 발달의 역사를 풍부하게 만든 중요한 원천이었고 작도는 직관 기하와 형식 기하의 단절이라는 기하교육의 문제점을 해결하는 데 중요한 역할을 한다. 기하학적 작도는 학생들의 시각화와 도형 성질의 이해를 풍부하게 하고 분석과 연역적인 증명을 위한 기초를 제공한다(조완영·정보나, 2002, p.614).

따라서 작도 교육을 통해 고대 수학자들의 고민을 느껴보고, 일상생활이나 다른 분야로 적용해 보는 것은 의미 있는 일이다. 프로이덴탈은 기하를 지도하는 진정한 방식은 학생들이 기하를 활동으로 경험하게 하는 것, 즉 학생들이 기하를 재발명할 수 있도록 지도하는 것이라고 했다(김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤, 2006, p.226에서 재인용).

7차 교육과정의 초등학교 수학교과서를 살펴보면 컴퍼스를 사용해서 원을 그리고, 삼각형을 그리며, 삼각자를 활용해 수직선과 평행선을 그리는 정도로 작도 교육이 이루어지고 있다. 구체적으로 조작하고, 활동하며 수학을 배워야 할 초등학생들에게도 작도의 장점을 이용할 수 있는 작도 교육의 확대가 필요하다. 그러나 작도 교육을 확대하기 위해 무조건 작도의 순서만을 암기시켜서는 안 된다. 학생들이 작도를 통해 수학적으로 사고할 수 있도록 가르침으로써 학생들이 작도 이외의 영역에서 얻을 수 있는 수학적 깨달음과 기쁨을

---

1) [제1저자] 인천 굴포초등학교
2) [교신저자] 경인교육대학교 수학교육과

얻도록 해야 할 것이다.

'수학적 사고'는 수학교육의 가장 중요한 항목 중 하나로, 우리나라 교육과정의 시작에서부터 현재까지 변하지 않는 수학교육의 기본 목표로 제시되고 있다. 특히 2007 개정 교육과정에서는 수학교육의 목표로서 의사소통 능력 신장과 함께 수학적 사고력의 신장을 더욱 강조하고 있다. NCTM(2000)에서도 '수학적 사고'와 관련하여 교사는 진지하게 수학적으로 사고하는 지적인 환경을 조성할 책임이 있고, 수학적 사고의 조직과 통합을 위하여 반성과 의사소통의 과정을 중요시하고 있다.

이에 본 연구에서는 초등학교 6학년 영재 학급 학생들과 일반 학생들의 작도 과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석하여 초등학교 작도지도의 시사점을 제안하고자 한다. 본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 내용을 설정하여 연구하였다.

첫째, 초등학교 6학년 영재학급 및 일반학급 학생들이 타당하게 선분의 등분할 작도를 하도록 하기 위한 교수-학습 자료를 개발한다.

둘째, 작도과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석하기 위한 틀을 개발한다.

셋째, 개발된 자료를 적용하여 초등학교 6학년 영재학급 및 일반학급 학생들의 작도과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석하고, 초등학교 작도 지도의 시사점을 제안한다.

Ⅱ. 이론적 배경

본 단원에서는 선분의 등분할 작도를 지도하고 그 과정에서 드러나는 학생들의 수학적 사고를 알아보기 위해 필요한 이론들을 살펴본다. 또한 이러한 작도가 현재의 교육과정에서는 어떻게 반영되고 전개되고 있는지를 살펴보고 이를 고려한 프로그램을 작성하고자 한다. 따라서 여기서는 작도의 기본 개념과 이러한 작도를 담고 있는 초 · 중등 교육과정의 내용을 살펴보고 또한 외국의 교과서에서는 어떻게 다루어지는지도 살펴보고자 한다.

1. 작도

가. 작도 문제의 특성(한인기, 1999, pp.154-156)

흔히 기하학의 작도 문제는 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하는 것으로 알려져 있는데, 이것을 좀 더 확대하여 일반적으로 작도를 요구하는 문제들은 다음과 같은 독특한 특성이 있다.

첫째, 작도 문제에서 주어진 요소들은 대부분 그 위치나 크기 등이 명확히 규정되어 제시되는 것이 아니라, 개괄적으로 주어진다.

둘째, 작도 문제에서는 어떤 도형을 단순히 작도하는 것이 아니라, 문제에서 주어진 성질들을 만족시키는 도형들을 작도하는 것이다.

셋째, 작도에 사용되는 도구에 따라 여러 가지 유형의 작도 문제와 그 풀이들이 존재한다. 많은 경우에 있어 작도에 사용되어지는 도구들이 제시되지 않는데, 이 경우에는 작도에서 전통적으로 사용되는 도구인 자와 컴퍼스를 이용하면 된다.

나. 작도 문제 해결 단계

1) 분석

작도 문제 해결에 있어서 가장 중요한 단계들 중의 하나로 작도의 문제해결을 위해 탐색하는 활동은 분석을 통하여 이루어진다.

작도 문제 해결은 크게 두 가지 방법으로 접근이 가능하다. 이미 준비된 작도 방법을 학습자에게 제시해 주는 경우와 학습자들이 문제 해결 과정을 스스로 발견하도록 하는 방법인데 전자는 '행하는 수학'을 경험하는데 큰 도움을 주지 못한다.

반면, 두 번째 접근 방법은 학습자 스스로 문제 해결을 위한 탐색 과정을 경험할 수 있다. 이 접근에서 '분석'은 작도 문제 해결에서 주도적인 역할을 수행하는데, 작도 문제 해결에서의 성패는 대부분 이 '분석' 과정에 의존하게 된다.

분석은 주어진 것에서 구하는 것으로 진행해 가는 전개 방법으로, 작도 문제에서 '분석' 과정은 '주어진 작도 문제가 해결되었다.'는 가정에서 출발한다. 이 가정에 의해 문제의 조건에 상응하여 구하는 도형에 대한 개략적인 스케치를 하게 된다.

2) 작도

'분석'을 통해 주어진 요소와 구하는 요소들 사이의 관계가 설정이 되면, 작도를 수행하게 된다. 실제로 작도는 작도 문제 해결 과정에서 가장 쉬운 부분이다. '작도' 단계는 문제의 조건에 맞는 작도를 수행하며, 그 작도 과정을 하나씩 순서대로 나열하는 것이다. 작도 문제 해결의 계획 수립 과정에서 '분석'이 주된 역할을 했다면, 이 작도 단계는 '종합'이 중심적인 역할을 하는 단계라고 할 수 있다.

3) 증명

이 단계에서는 얻어진 작도가 문제의 모든 요구 조건들을 충족시키는가를 확인한다. 즉, 증명 단계는 수행한 작도와 각 단계들의 타당성을 밝히는 단계로써, 학습자들은 스스로에게 얻어진 작도를 논리적으로 설명하고, 내면화하는 기회를 가지게 된다.

4) 탐구

탐구 단계는 작도 문제의 풀이를 마무리 짓는 중요한 단계로써, 이 단계에서는 해의 존재 조건이나 가능한 해의 수 등에 대해 고찰한다. 작도에서 발생 가능한 모든 서로 다른 경우에 대해서 확인해야 하기 때문에, 이 단계는 작도 문제 해결에 있어서 매우 중요하다. 이와 관련하여 구세프(Gusev V. A.)는 "가끔 어려운 작도 문제들에 대한 '탐구'단계에서는 아주 섬세한 문제들에 대한 논의가 가능하며, 이 때 엄밀한 수학적 논의가 이루어지는 경우도 있기 때문에, 작도 문제는 학습자들의 논리적 사고나 다양한 수학적 재능의 개발과도 밀접한 관계가 있다."라고 했다(한인기, 1999, p.160에서 재인용).

2. 작도와 관련된 초등학교 교육과정

우리나라 제 7차 교육과정 및 2007 개정교육과정에서는 작도와 관련된 내용을 저학년부터 순차적으로 지도하도록 구성하고 있다.

교육 과정의 목표 및 내용을 살펴보면 2학년에서는 선분, 직선, 삼각형, 사각형, 원을 이해하고, 그 모양을 그리거나 만들 수 있도록 하며 3학년에서는 각과 직각을 이해하고 직각삼각형, 직사각형, 정사각형을 이해하며 원의 중심, 반지름, 지름을 알고 그들 사이의 관계를 이해한다. 또한 컴퍼스를 이용하여 여러 가지 모양을 그릴 수 있도록 한다. 4학년에서

는 이등변삼각형과 정삼각형을 이해하고 수직과 평행의 관계를 이해하며 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형의 개념을 알고, 그 성질을 이해하도록 하며 5학년에서는 도형의 합동의 의미를 알고, 합동인 도형을 식별할 수 있으며 자, 컴퍼스, 각도기를 이용하여 조건에 맞는 삼각형을 그릴 수 있고 선대칭도형과 점대칭도형의 의미를 알고 그릴 수 있으며 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형을 그릴 수 있도록 하고 있다. 6학년에서는 비례식을 이해하고, 이를 활용할 수 있고 비례식의 성질을 이용하여 간단한 비례식을 풀 수 있다. 원주율을 이해하며 원주와 원의 넓이 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있도록 하고 있다.

3. 작도와 관련된 중학교 내용 분석

본 연구에서 분석한 교과서는 대한교과서(박윤범·박혜숙·권혁천·육인선, 2001)이며, 기하 영역은 각 학년의 '나' 단계에만 도입이 되어있다.

7-나 과정에서는 점, 선, 면, 각의 뜻을 이해하고 기호로 나타낼 수 있으며 점, 직선, 공간의 위치 관계를 적당한 용어나 기호를 사용하여 나타내고, 관계를 파악할 수 있다. 작도의 뜻을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 삼각형을 작도를 할 수 있으며 다각형 및 원의 구성요소를 이해할 수 있다. 또한 입체도형을 종류에 따라 분류하고, 성질을 이해하도록 하며 8-나 과정에서는 명제의 뜻을 알고, 도형과 관련된 증명을 할 수 있고 삼각형과 사각형의 성질을 증명을 통해 이해할 수 있으며 평행선의 성질을 이용하여 넓이가 같은 여러 가지 삼각형을 그릴 수 있다. 닮은 도형의 성질을 이해하고, 닮은 도형을 그리고, 닮은 도형을 찾을 수 있으며 평행선과 선분의 길이에 대한 비의 성질을 이해·증명하고 이를 활용할 수 있도록 한다.

4. 외국의 기하 교과서에 있는 선분의 등분할 작도

본 연구에서 투입하고자 하는 '선분의 등분할 작도'는 국내 정규 교육과정에 없으며 콜롬비아 대학 수학교육과 교수였던 D. Smith가 저술한 기하교과서인 『평면기하의 본질』(ESSENTIALS OF PLANE GEOMETRY, 1923)에 제시된 문제를 통해 분석을 했다.

『평면기하의 본질』에서는 기본적인 이론을 토대로 할 수 있는 작도를 제시하며 그 이론을 통해 연속으로 증명이 가능한 것들을 추가하고 있다. 선행 증명이 뒤의 내용에 활용될 수 있도록 내용이 유기적으로 연결되고 있으며 각 부분별로 연습문제를 충분히 두어 실제로 숙달할 수 있도록 돕고 있다.

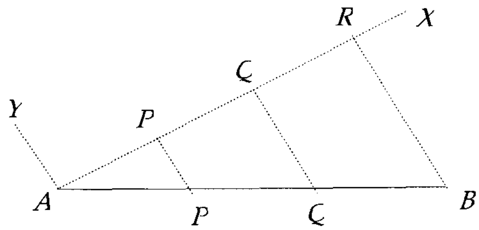
『평면기하의 본질』에 제시된 선분의 등분할 작도 과정을 살펴보면, 선분의 등분할을 하기 위해 반드시 먼저 알고 있어야 할 기저의 지식은 다음과 같은 두 가지가 있다.

[정리 1] 만약 3개 이상의 평행선이 같은 간격으로 하나의 횡단선을 지나가면 그 평행선들은 다른 모든 횡단선에도 같은 간격을 가진다(『평면기하의 본질』, p.58, 정리 [85]).

[정리 2] 주어진 선분 외부의 주어진 한 점을 지나는 평행선을 작도할 수 있다(『평면기하의 본질』, p.75, 정리 [107]).

위의 두 정리를 토대로 해결할 수 있는 선분의 등분할 문제는 다음과 같다.

[문제1] 주어진 선을 등분할 하시오.



(『평면기하의 본질』, p.77 , 문제 [113])

주어진 선분 AB를 등분할하라는 문제이며 먼저 배웠던 [정리 1]의 평행선들을 지나가는 횡단선에 관련된 것이다.

<작도>
- A로부터 선분 AX를 그린다. A와 B중 편한 쪽에 그리면 된다.
- 편한 간격으로 호를 그리면서 선분 AX를 A에서부터 같은 간격으로 분할해 나아간다.
- 마지막 점인 R로부터 선분 RB를 그린다.
- 선분 AX위에 같은 간격으로 분할 된 점 P, Q를 지나면서 RB와 평행한 선분을 그린다. [정리 2]
- 이 선분들은 선분 AB를 요구한대로 같은 간격으로 분할한다.

<증명>
- 선분 AY는 선분 BR과 평행이다. [정리 2]
- 평행선 AY, $P'P$, $Q'Q$, BR는 선분 AX를 등분할 한다. 이 평행선들은 선분 AB를 AP', $P'Q'$, $Q'B$로 등분할 한다. [정리 1]

이 방법은 자를 이용하는 것보다 선분 AB를 더욱 정확하게 분할한다.

5. 수학적 사고

가. 수학의 방법에 관련된 수학적 사고(이용률·성현경·정동권·박영배, 1992, pp.122-182)

1) 귀납적 사고

어떤 문제를 해결하고자 하나 그 해결 방법을 몰라서 해결이 불가능할 때, 우선 일반적인 규칙이나 성질을 알아내어 이것을 근거로 당면 문제를 해결하려는 사고 방법, 또는 어떤 문제가 해결되었을 때 그것으로 멈추지 않고 그 해결 결과를 이용하여 일반적인 규칙이나 성질을 알아내려고 하는 경우 이용되는 사고 방법이다.

2) 유추적 사고

어떤 사상 A에 대한 성질이나 법칙 또는 해결 방법을 알고자 해도 이것을 알 수 없을 때, A와 구조적으로 유사한 기지의 사상 A'(이에 대하여는 성질이나 법칙 또는 해결 방법 P'을 알고 있다.)를 생각해 내어, A에 대해서도 P'와 마찬가지의 것이 성립하지 않을까하고 생각하는 사고 방법이다.

3) 연역적 사고

넓은 의미로는 전제로 주어진 몇 개의 명제로부터 논리적인 법칙을 써 필연적인 결론을 이끌어내는 방법이며, 좁은 의미로는 일반적인 주장으로부터 특수한 주장으로 나아가는 추리이다.

4) 통합적 사고

여러 사상을 이산 상태로 두지 않고, 보다 넓은 관점에서 그들의 본질적인 공통성을 추상하여 그들을 모두 동일한 범주의 것으로 종합·정리해 나가려는 사고 방법이다.

5) 발전적 사고

대상을 고정적, 종국적인 것으로 보지 않고 끊임없이 새로운 것으로 창조해 나가 발전시키려는 생각, 즉 통합한 것을 보다 넓은 범위에 적용하려 한다거나, 어떤 결과를 구했더라도 보다 나은 방법을 추구하거나 보다 일반적이거나 새로운 것을 발견하려는 생각이다.

6) 단순화의 사고

주어진 몇 개의 조건을 모두 만족하는 해결 방안을 알 수 없을 때, 조건을 단순한 것으로 대체하거나 조건의 일부를 우선 무시하여 주어진 문제를 간단한 기본적인 문제로 손질하고, 그 손질된 간단한 문제의 고찰을 통해 주어진 문제의 구조나 해결 방안을 알아내는 경우에 적용되는 사고 방법이다.

7) 추상화의 사고

전체로서의 사물의 표상에 포함되는 여러 특징 가운데 한 가지 이상을 분리 독립시켜 사고의 대상으로 삼으려는 정신 작용을 추상이라 한다.

8) 일반화의 사고

문제에서 볼 수 있는 일반성을 찾아낸다거나, 또는 해결된 문제를 바탕으로 이를 포함하는 집합 전체에서 성립하는 일반성을 구하려고 할 때 쓰이는 사고 방법이다.

9) 특수화의 사고

어떤 사상의 집합에 관한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 보다 작은 집합이나 하나의 사상에 관한 고찰로 이행하는 사고 방법이다.

10) 기호화의 사고

기호로 나타내려는 생각과 더불어, 기호화한 것을 바르게 해석하려는 생각, 또는 수학적 용어를 써서 간결·명확히 나타낸다거나 이것을 읽어내려는 생각이다.

11) 수량화·도형화의 사고

질적인 사상을 양적 성질로 파악하고 목적이나 경우에 따라 적당한 양을 선택하려는 생각이 양화의 사고이며, 양의 크기를 수를 써서 나타내려는 생각이 수화의 사고이다. 양화의 사고와 수화의 사고를 합쳐 수량화의 사고라 한다.

나. 수학적 사고력을 측정하기 위한 유형별 준거

이환철 외(2009)는 수학적 사고력의 신장을 측정하기 위한 방법을 찾기 위한 토대로써 아래 <표 1>과 같이 유형별 준거를 제시하고 있다.

<표 1> 수학적 사고력 측정을 위한 유형별 준거

수학적 사고의 유형	측정 요소
귀납적 사고	주어진 조건에서 공통적 규칙이나 원리를 찾으려고 노력하였는가?
	주어진 조건에서 공통적 규칙이나 원리를 찾았는가?
	찾아낸 규칙이나 원리가 처음의 모든 조건에서 성립함을 확인하였는가?
	찾아낸 규칙이나 원리가 다른 상황에서도 성립할지를 생각하였는가?
유추적 사고	문제 상황과 유사한 조건을 가지는 상황에 대해 생각해 보았는가?
	문제 상황과 유사한 상황에서 성립했던 원리나 성질이 떠올랐는가?
	유사한 상황에서 떠올린 원리나 성질을 문제 상황에 적용하였는가?
연역적 사고	추측한 결론을 설명할 수 있는 정리나 성질이 있는지 생각하였는가?
	추측한 결론을 설명할 수 있는 정리나 성질을 찾아내었는가?
	찾아낸 정리나 성질을 사용하여 추측한 결론을 증명하였는가?
통합적 사고	주어진 조건 속에 담긴 성질들의 공통성에 대해 생각하였는가?
	주어진 조건 속에 담긴 성질들의 공통성을 찾아내었는가?
	찾아낸 공통성을 하나의 관점에서 다시 종합 정리하였는가?
발전적 사고	새로운 풀이 과정이나 접근 방식을 찾아내려고 생각하였는가?
	주어진 조건이나 대상을 변화시켜 새로운 결과를 얻고자 노력했는가?
	새로운 풀이 과정이나 접근 방식 또는 새로운 결과를 얻어내었는가?
추상화의 사고	문제 상황의 이상적인 요소로부터 동질적인 요소를 찾았는가?
	동질적인 요소로부터 이상화된 개념을 찾아내었는가?
	문제 상황이 이상적으로 그럴 수 있다고 인식하고 받아들였는가?
단순화의 사고	주어진 조건을 간단한 것으로 바꾸려고 생각하였는가?
	주어진 조건을 간단한 것으로 바꾸었는가?
	조건이 간단한 경우로부터 점차 복잡한 경우로 생각해 나갔는가?
일반화의 사고	주어진 조건보다 일반적인 경우에서도 성립할지 생각하였는가?
	주어진 조건보다 일반적인 경우에서도 성립함을 밝혔는가?
	자신의 풀이 방법이 일반적으로 다른 경우에도 사용되는지 생각하였는가?
	문자의 사용과 같이 더 추상화, 통합화된 개념을 이용하여 설명하였는가?
특수화의 사고	문제 상황을 특수한 경우로 바꾸어 생각하였는가?
	문제 상황을 보다 극단적인 경우로 바꾸어 생각하였는가?
	특수한 경우에 대해 생각한 후 다시 일반적인 경우를 생각하였는가?
기호화의 사고	문제 상황을 기호를 사용하여 나타내었는가?
	문제 상황을 수량으로 나타내었는가?
	문제 상황을 그림으로 나타내었는가?

이환철 외(2009)의 연구는 수학적 사고력 신장의 측정 방안 마련을 위한 기초 연구로서 박사 1인과 박사과정에 있는 2인의 연구자에 의해 제시된 것으로 수학적 사고력의 신장을 측정하는 방안으로 표준화된 문항 제작, 교사의 학생 사고과정 관찰 체크리스트, 학생의 자기 평가 체크리스트 등을 제안하고 있다(이환철 외, 2009, p.100).

Ⅲ. 연구 방법

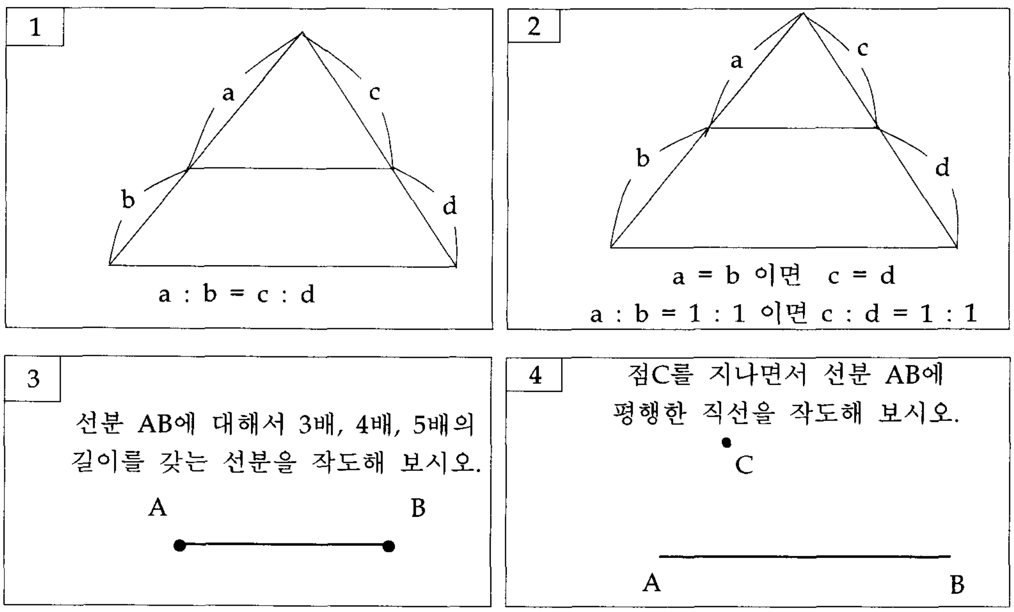
1. 선분의 등분할 작도 문항 분석

가. 선분의 등분할 작도 문항

본 연구에서 사용되는 검사 문항은 『평면기하의 본질』에 제시된 문항을 토대로 작성한 것으로서 다음과 같다.

> 눈금 없는 자와 컴퍼스 그리고 다음과 같은 공준 3가지를 이용하여 주어진 선분을 3등분 하시오. 그리고 그 작도 과정을 설명하시오.
>
> 공준 1. 한 점에서 또 다른 한 점으로 한 직선을 그릴 수 있다.
> 공준 2. 선분을 무한히 연장시킬 수 있다.
> 공준 3. 임의의 점을 중심으로 하고 그 중심으로부터 그려진 임의의 선분과 동일한 반경을 갖는 원을 그릴 수 있다.

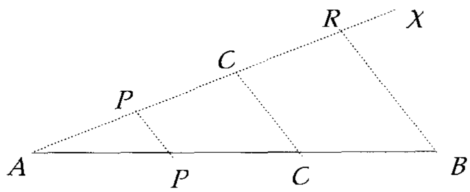
스스로의 힘으로 진전이 없는 아동들은 일정한 시간 간격(10~15분)으로 다음의 단계별 힌트를 제공한다. 단계별 힌트는 『평면기하의 본질』의 [정리 1]과 [정리 2]의 내용을 학생 수준에 맞게 수정한 것이다.



이러한 힌트는 선분의 등분할을 하려고 할 때 필수적인 개념인 선분의 비와 평행선 작도에 대한 정보를 알려줌으로써 학생들이 이러한 개념을 실제의 선분 등분할 작도에 사용할 수 있도록 도와주는 데에 그 의의가 있다.

1) 선분의 등분할 문제의 일반적 풀이

본 문항의 일반적 풀이 방법은 다음과 같다.



- A로부터 선분 AX를 그린다. A와 B중 편한 쪽에 그리면 된다.
- 편한 간격으로 호를 그리면서 선분 AX를 A에서부터 같은 간격으로 분할해 간다.
- 마지막 점인 R로부터 선분 RB를 그린다.
- 선분 AX위에 같은 간격으로 분할된 점 P, Q를 지나며 RB와 평행한 선분을 그린다.
- 이 선분들은 선분 AB를 요구한대로 같은 간격으로 분할한다.

2) 검사 문항의 특징

본 검사 문항은 원과 직선을 몇 개 그려주면 간단하게 작도할 수 있다. 그러나 검사 문항에 주어진 조건만을 가지고 엄밀하게 작도하기 위해서는 추가 설명(증명)이 필요하다. 학생들이 연역적 추론을 요구하는 문제를 해결하는데 있어서 선행 개념이 영향을 끼치면 순수한 연역적 추론 능력을 측정할 수 없게 된다(김설한·정진우·김효남, 1998, p.48). 선분 등분할의 경우 국내 정규 교육과정에 없기 때문에 선행 개념이 최소한으로 영향을 미칠 것이다. 본 검사문항을 작도한 뒤 옳게 작도했음을 증명하기 위해서는 다음과 같은 과정이 필요하다.

가) 원과 선을 그리기 위해 사용된 공준에 관한 설명

나) 닮음인 삼각형의 대응변의 길이 비 증명

다) 한 선분의 3배의 길이를 갖는 선분의 작도

라) 평행선을 작도하기 위해 수직 이등분선이나 마름모를 작도할 수 있음을 증명

그 외에도 평행선을 사용한 등분할 방법을 사용하지 않을 경우에는 그 방법이 공준으로부터 이끌어져 나올 수 있는 설명이나 증명이 필요할 것이다. 그리고 자신의 작도 과정을 효율적으로 설명하기 위해 기호화를 하는 것이 편리하다는 것을 느낄 수 있을 것이다.

그리고 전 차시에 공부한 수직 이등분선의 작도를 응용하여 2등분, 4등분, 8등분을 해보는 시도를 할 수도 있다. 이러한 잘못된 풀이 과정도 학생들의 유추적 사고에서 기반하는 것으로 이 방법으로 해결이 불가능함을 스스로 깨닫기 위해 연역적으로 사고하는 것도 수학적 사고를 활성화시키는 교육에 의미가 있을 것이다.

나. 검사문항에서 기대되는 아동들의 수학적 사고

대부분의 초등영재학급 학생들은 사교육의 영향으로 대수적인 영역에서 많은 속진이 되어있으며 학생들 사이에 속진의 편차가 매우 크다. 하지만 작도의 경우에는 초등 영재학생들에게 속진의 대상이 되지 않아서 진솔한 반응을 얻을 수 있다. 게다가 선분의 등분할은 국내 교육과정에 도입되지 않고 있기 때문에 미리 알고 있을 가능성이 극히 적다.

작도의 해결을 위해 다른 학생들과 의사소통하고, 작도 과정을 설명하기 위해 기호화의 필요성을 느끼게 되고, 논리적으로 설명하기 위한 논리적 사고를 증진시킬 수 있을 것이며

다른 학생의 설명을 통해 비판적으로 사고할 수 있는 능력을 기르게 될 것이다.

기하의 증명 문제는 과제에 대한 학생들의 사고 수준과 사고의 유형을 고려하여 보다 체계화된 증명 학습 방법이 제공되기만 하면 초등 수준에 있는 수학 영재들의 연역적 사고력을 충분히 자극할 수 있다(송상헌·장혜원·정영옥, 2006, p.342).

선분의 등분할 작도를 하기 위해 기존에 배운 내용들을 최대한 활용하려는 유추적 사고를 하게 될 것이다. 그 외에도 작도의 결과를 더 넓은 범위로 적용해 보려는 발전적 · 일반화의 사고, 조작의 사고, 표현의 사고 등이 관찰될 것으로 기대된다.

2. 예비 검사

본 연구에 나타날 문제점을 미리 진단하기 위해 인천의 G초등학교 영재학급 6학년 2개반 학생 30명에게 예비 실험을 실시하여 관련 문제의 풀이 경험 유무 및 검사 문항의 난이도, 문항 해결 과정에서의 오류 등을 검사하였다. 영재학생들은 일반학급 학생들에 비해 수학적 사고가 뛰어나기 때문에 예비 실험에서 많은 시사점을 주었다.

예비 검사 결과, 30명의 학생들 중에서 1명의 학생이 아무런 힌트가 없이 작도를 해결하였다. 1단계 힌트를 가지고 작도를 성공한 학생이 2명, 2단계 2명, 3단계 3명, 4단계 7명의 학생이 작도를 성공하였다.

4단계 힌트로도 성공하지 못했던 학생들도 동료 학생들과의 상호 협의를 통해 대부분 작도 과정을 이해할 수 있었다.

예비 검사는 적절한 지도법이 병행된다면 6학년 영재학급 아동들이 충분히 선분의 등분할을 작도하고, 이해할 수 있음을 보여주었다.

예비 검사를 통해 많은 학생들이 범하는 오류를 발견하였다. 기존의 수직이등분선의 작도를 통해 수직 이등분을 계속해 나아가는 과정이었는데 이 과정 자체에서 학생들의 유추적 사고를 발견할 수 있었다. 그리고 2의 거듭제곱은 짝수만 표현할 수 있기 때문에 홀수인 3등분은 불가능함을 연역적 사고를 통해 알아내는 과정이 있었다. 이를 통해 학생들이 범하는 오류에서도 수학적 사고를 발견할 수 있었다.

가. 학생 답안 분석

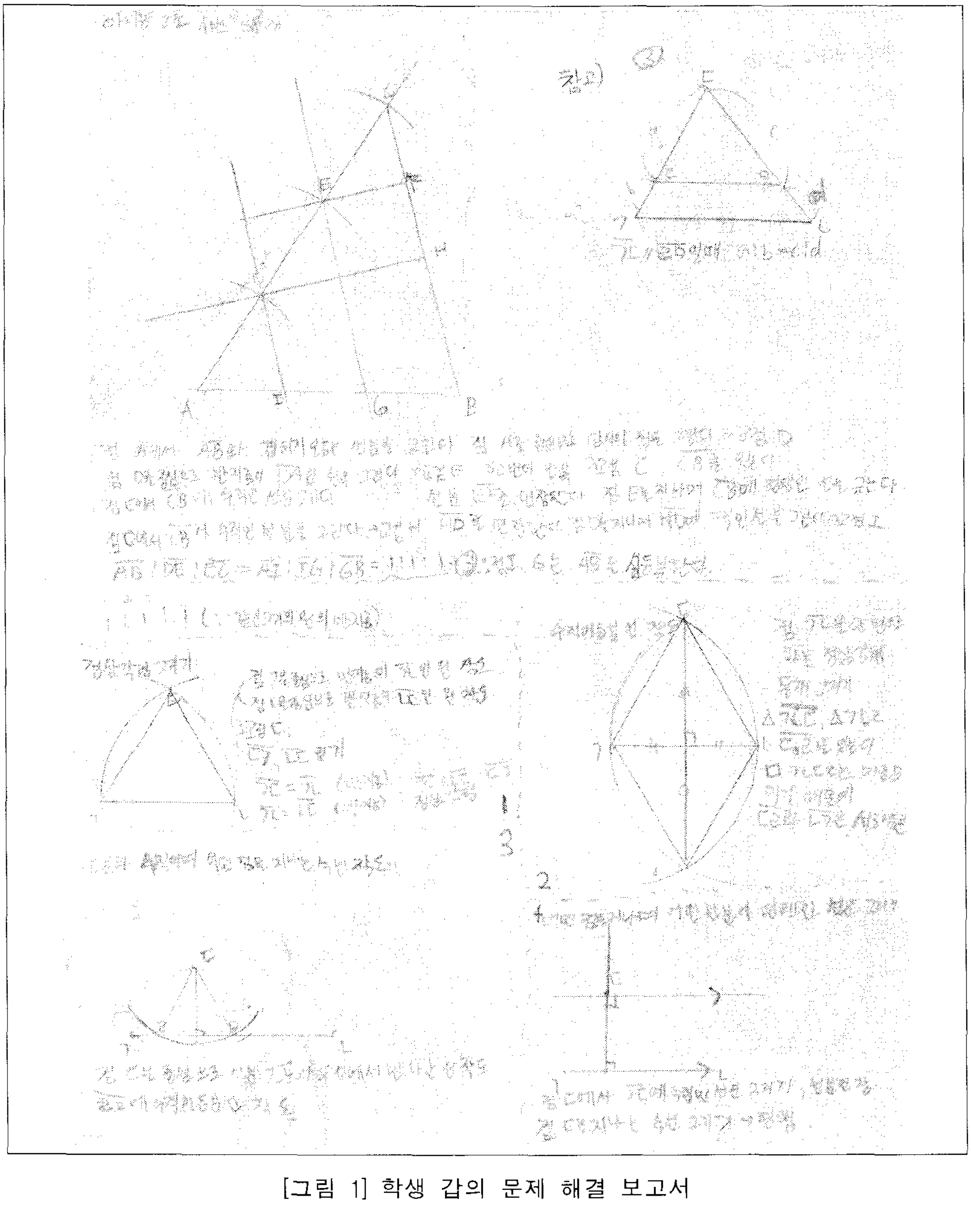
예비 검사 결과 단계별 힌트를 받은 학생별로 1명씩 선정하여 답안을 분석하고 면담을 통해 학생들이 문제를 해결하기 위해 사용한 방법들의 의도를 파악하였다. 영재학급 학생들은 수학 성취도 등으로 상·중·하를 구분하는 것이 어렵기 때문에 단계별 힌트를 제공 받은 순서에 따라 수준을 나누었다.

나. 예비 검사 분석

1) 학생 갑 (단계별 힌트 없이 문제를 해결한 학생)

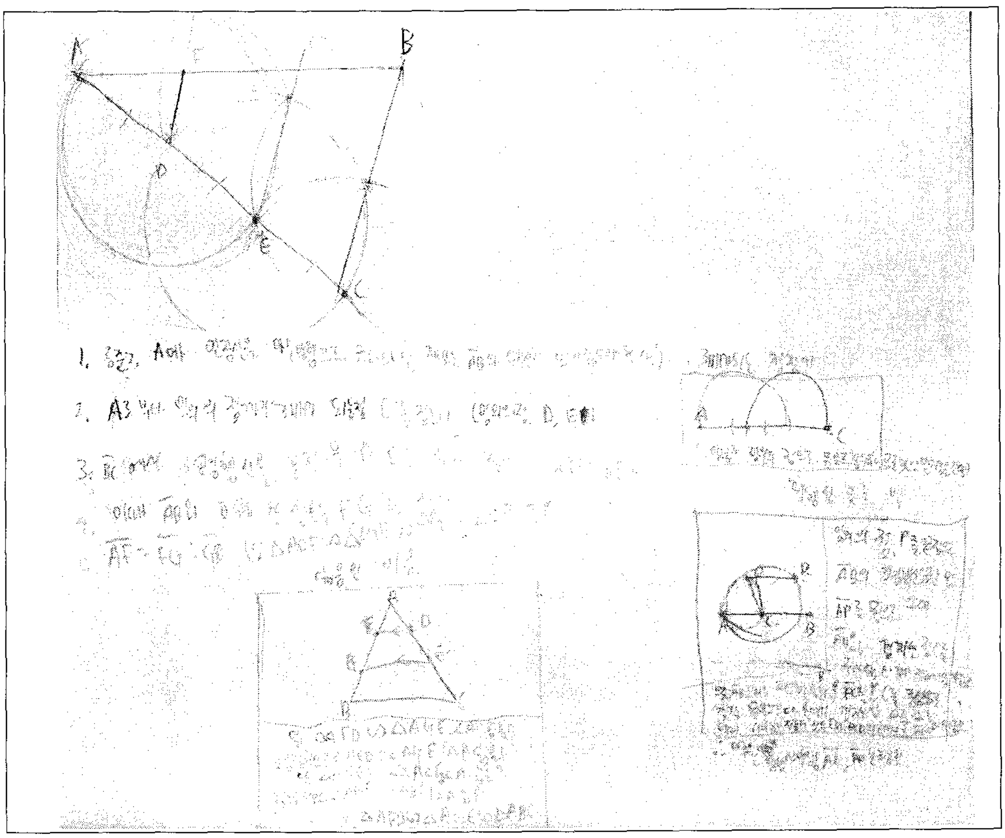
문제에서 수행해야 할 목표를 정확히 인지함 [표상형성-유추]
구조적으로 유사한 선의 2등분 문제로 접근을 해보고자 함 [인출-유추]
선의 2등분으로 해결이 안됨을 인식 [오류 인식-연역]
선의 2등분은 2의 제곱수로만 등분할이 됨을 증명 [인식된 오류의 증명]
문제를 해결하기 위해 도움이 되는 정리를 생각해냄 [정리 발견-연역]
찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각함 [사상-유추]

찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용함 [적합-유추]
찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결함 [연역]
해결된 문제를 증명함 [연역]
문제의 상황을 도식화 함 [기호]
문제의 구성 요소를 기호화 함 [기호]
문제 해결 과정을 기호화 함 [기호]
문제의 증명 과정을 기호화 함 [기호]



[그림 1] 학생 갑의 문제 해결 보고서

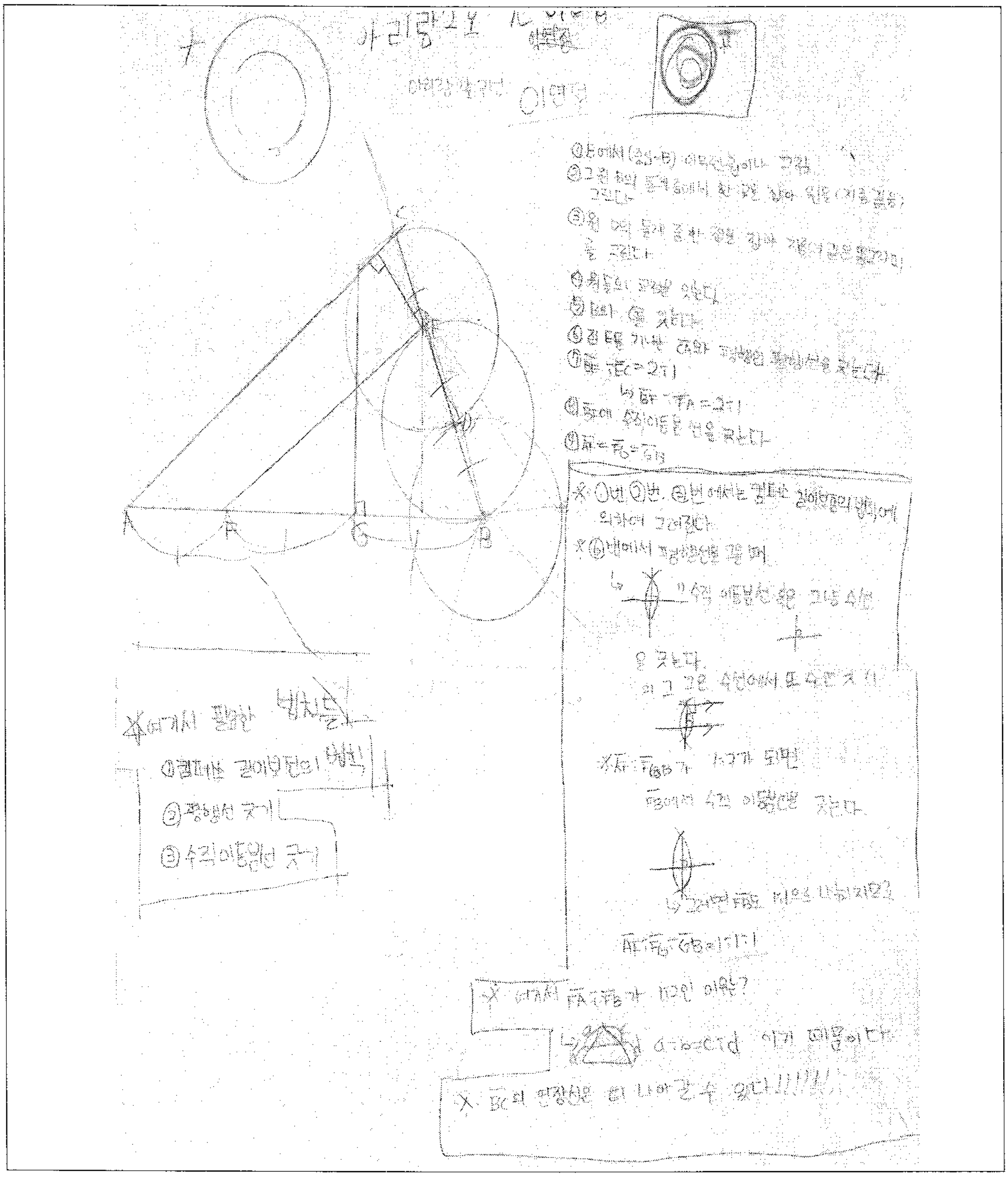
(2) 학생 을 (1단계 힌트를 사용한 학생)
문제에서 수행해야 할 목표를 정확히 인지함 [표상형성-유추]
힌트1을 제공 받은 후 정리를 생각해냄 [정리 발견-연역]
찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각함 [사상-유추]
찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용함 [적합-유추]
찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결함 [연역]
해결된 문제를 증명함 [연역]
문제의 상황을 도식화 함 [기호]
문제의 구성 요소를 기호화 함 [기호]
문제 해결 과정을 기호화 함 [기호]
문제의 증명 과정을 기호화 함 [기호]



[그림 2] 학생 을의 문제 해결 보고서

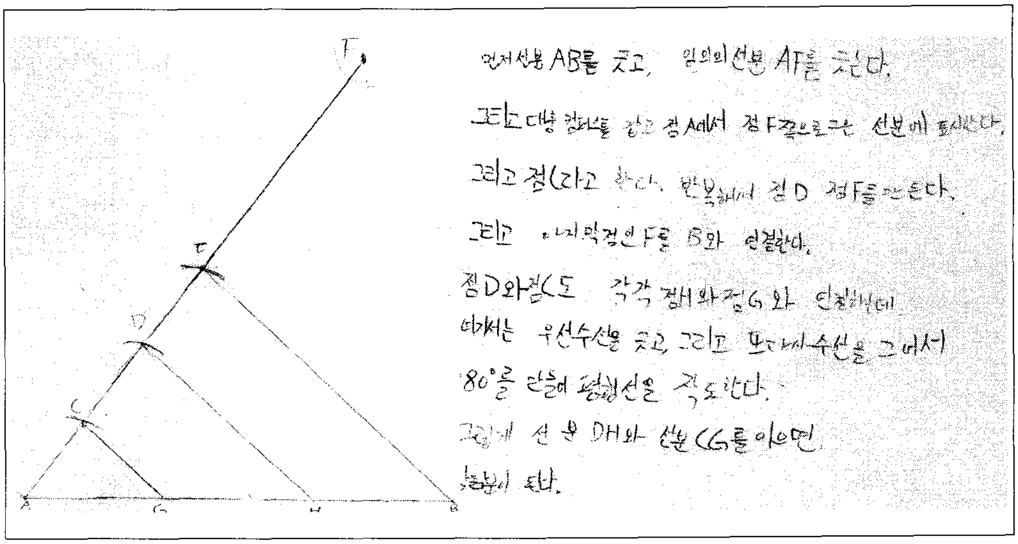
(3) 학생 병 (2단계 힌트를 사용한 학생)
문제에서 수행해야 할 목표를 정확히 인지함 [표상형성-유추]
구조적으로 유사한 선의 2등분 문제로 접근을 해보고자 함 [인출-유추]
선의 2등분으로 해결이 안됨을 인식 [오류 인식-연역]
힌트를 제공 받은 후 정리를 생각해냄 [정리 발견-연역]

찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각함 [사상-유추]
찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용함 [적합-유추]
찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결함 [연역]
해결된 문제를 증명함 [연역]
문제의 상황을 도식화 함 [기호]
문제의 구성 요소를 기호화 함 [기호]
문제 해결 과정을 기호화 함 [기호]
문제의 증명 과정을 기호화 함 [기호]



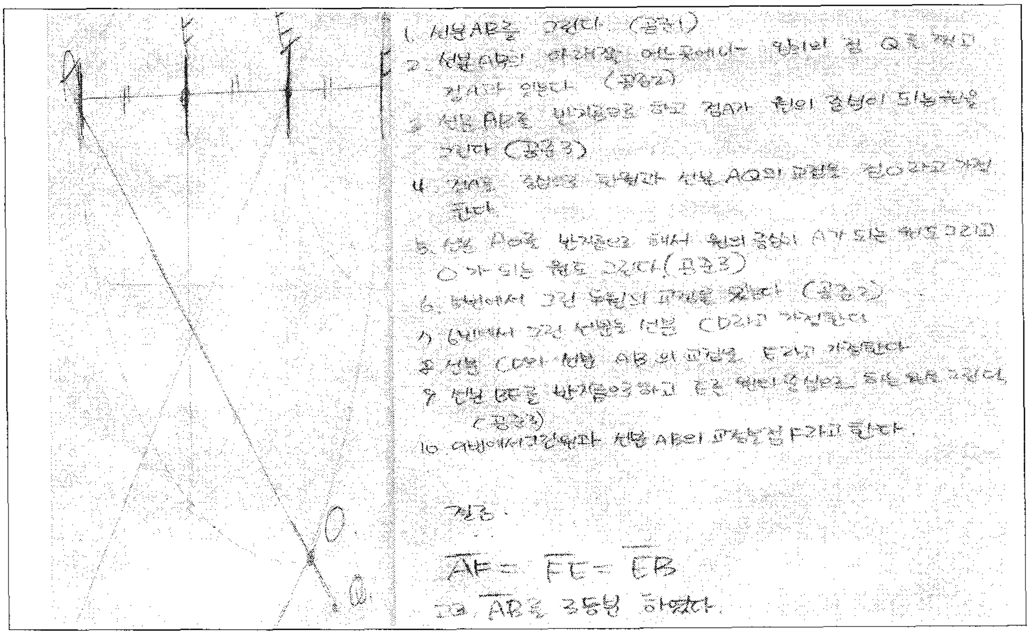
[그림 3] 학생 병의 문제 해결 보고서

(4) 학생 정 (3단계 힌트를 사용한 학생)
문제에서 수행해야 할 목표를 정확히 인지함 [표상형성-유추]
구조적으로 유사한 선의 2등분 문제로 접근을 해보고자 함 [인출-유추]
선의 2등분으로 해결이 안됨을 인식 [오류 인식-연역]
힌트를 제공받은 후에 정리를 생각해냄 [정리 발견-연역]
찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각함 [사상-유추]
찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용함 [적합-유추]
찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결함 [연역]
문제의 상황을 도식화 함 [기호]
문제의 구성 요소를 기호화 함 [기호]
문제 해결 과정을 기호화 함 [기호]
문제의 증명 과정을 기호화 함 [기호]



[그림 4] 학생 정의 문제 해결 보고서

(5) 학생 무 (4단계 힌트를 사용한 학생)
문제에서 수행해야 할 목표를 정확히 인지함 [표상형성-유추]
힌트를 제공 받았으나 정리를 떠올리지 못하여 정리를 제공받음
제공된 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각함 [사상-유추]
제공된 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용함 [적합-유추]
제공된 [정리 1], [정리 2]를 사용하여 문제를 해결함 [연역]
문제의 상황을 도식화 함 [기호]
문제의 구성 요소를 기호화 함 [기호]
문제 해결 과정을 기호화 함 [기호]



[그림 5] 학생 무의 문제 해결 보고서

학생 갑, 을, 병, 정, 무 모든 학생이 문제의 목표를 명확히 이해하고, 구조를 잘 파악했다. 즉, 유추적 사고의 첫 번째 단계인 표상형성이 이루어진 것이다. 갑, 병, 정 세 학생의 경우에는 유추적 사고의 두 번째 단계인 인출로써 구조적으로 유사한 형태를 가지는 선의 2등분을 통하여 문제 해결의 실마리를 찾고자 하였다. 그리고 이 방법을 통해서는 해결이 안 됨을 연역적으로 인지하였다. 세 학생 중 갑만이 자신이 인지한 오류를 연역적으로 증명하였으며, 학생 무를 제외하고 다른 학생들은 문제 해결에 필요한 정리를 생각해 내었다. 문제 해결에 필요한 정리를 생각해 내는 것 역시 연역적 사고의 결과라 할 수 있다. 힌트의 제공 유무와 상관없이 모든 학생들이 정리 1과 2를 문제 상황에 맞게 적용해 연역적으로 문제를 해결하였다.

작도를 마친 후 갑, 을, 병 세 학생은 작도 과정을 증명하였다. 사전 지도과정에서 공준을 이용하여 작도 과정을 증명해 본 경험이 있기 때문에 자신의 작도 과정의 타당성을 설명하기 위해 증명이 필요함을 인식하고 있었다.

모든 학생들이 답안 작성이나 작도 과정 설명을 위해 기호화의 중요성을 인지하고 있었으며 문제 상황을 도식화하고 문제의 구성 요소와 해결 과정을 기호로써 설명했다.

예비 검사에서 의외로 발전적 사고와 일반화의 사고를 관찰할 수 없었다. 다른 해결 방안을 생각해 본다거나, 구체적으로 성립되는 장면을 생각해 보지도 않았고, 3등분을 4등분, 5등분 등으로 일반화시켜 나아가려는 시도를 하지 않았다. 그 이유로는 사전 지도의 부족을 생각해 볼 수 있었다. 학생들이 발전적·일반적으로 생각해 볼 경험이 부족했기 때문에 활동지를 작성할 때도 문제의 주어진 목표만 수행하고, 활동을 마치게 된 것으로 예상 된다. 따라서 본 검사를 하기 위한 교재에는 사전에 발전적·일반적으로 생각해 볼 경험을 제공할 필요성이 있으며, 문항에 발전적·일반적 사고를 유도할 수 있는 내용을 포함시킬 필요성이 있었다.

3. 연구 대상

연구대상자는 인천 G초등학교 6학년 일반학급 학생들 중에서 선정 과정을 거친 학생들과 영재학급 학생들 중에서 선정 과정을 거친 학생들이다.

인천 G초등학교는 2010년 진단평가 결과 인천광역시북부교육청 관내에서 성적이 가장 높은 학교이며 일반 학급의 편성은 성적에 따른 균등 편성이었으며 학급당 학생 수는 28명이고 수학 과목 성취도에 따라 상(25%-7명), 중(50%-14명), 하(25%-7명)로 구분한 뒤 관찰하였다.

영재학급 학생들의 경우 6학년 2개반 37명이었고, 본 연구에서 연구하고자 하는 영재학급 학생들은 소속 학교에서 3학년 학년말에 1차로 담임 추천을 받아 2차 국어 · 수학으로 선발된 뒤, 3차로 수학 · 과학 시험과 4차 면접을 거쳐 최종 선발된다. 한번 선발되면 6학년까지 3년간 교육을 받을 수 있으며 40명을 선발하면 6학년까지 최종 수료하는 학생은 35~38명 정도이다.

37명을 대상으로 선정과정을 거쳐 단계별 힌트의 도움(0~4단계)을 받은 학생을 각 단계별로 1명씩 선정하여 면담을 통한 분석을 하였다. 선정과정에서는 작도 과정에 나타나는 전반적인 수학적 사고와 오류 과정을 분석하였으며, 개인별 분석에서는 면담과 비디오 녹화 등을 통하여 작도 과정에 나타나는 수학적 사고 과정을 면밀히 분석하였다.

4. 선분의 등분할 작도 지도 교수-학습 자료 개발

본 연구에서 사용할 교수-학습 자료는 작도를 소재로 하여 영재학급 학생들과 일반학급 학생들을 대상으로 할 것이기 때문에 작도 학습 자료 개발을 위한 선행 연구와 수학 영재 교수-학습 자료를 개발하기 위한 준거를 바탕으로 개발을 하였다.

가. 교수-학습 자료 개발을 위한 준거

1) 작도 학습 자료 개발을 위한 방향 설정(박명희 신경희, 2006, p.121)

가) 개념 및 명제가 요구되는 상황을 설정하여 그 필요성을 역설함으로써 자연스러운 발생을 바탕으로 한다. 즉, 필요에 의해 시작하고 점차적으로 형식화하는 수학 전개 방식으로 수학 학습자에게 흥미를 유발시키고 학습을 용이하게 하도록 한다.

나) 실생활 문제 상황에서 접근한다. 학생 주변의 다양한 상황을 바탕으로 한 학습 자료를 통해 학생들이 스스로 주어진 상황의 해결 방법으로서 학습 내용을 재발명할 기회를 제공하도록 한다.

다) 개념을 처음 배우는 학생들이 이해하기 쉽도록 자연스러운 방식으로 제시하여 상식과 기초 산술 능력만 있으면 쉽게 이해할 수 있도록 일상 언어로 표현하도록 한다.

라) 작도 과정을 문제 해결의 입장에서 작도 방법을 스스로 발견하게 하기 위한 분석, 작도의 타당성을 밝히는 확인, 작도 결과를 일반화하는 반성의 단계를 강조하여 의식적으로 실행할 수 있도록 구체화한다.

마) 역사 발생적 원리에 입각한 구성으로 인식 과정에서의 주체의 활동적, 구성적 역할을 강조하는 활동주의 이론을 실천하며 구체적인 도구의 사용으로 도형 개념 형성에 도움이 될 수 있도록 한다.

나. 수학 영재 교수-학습 자료 개발의 준거(최종현, 2004, p.76)

가) 수학 영재들을 위한 교수-학습 자료는 일반 교육과정에서 교수되는 많은 수학적 개념들을 기초로 하되 수학적 사고력을 보다 확장 또는 발전시키는 기회를 제공하는 심화된 주제로 구성하여야 한다.

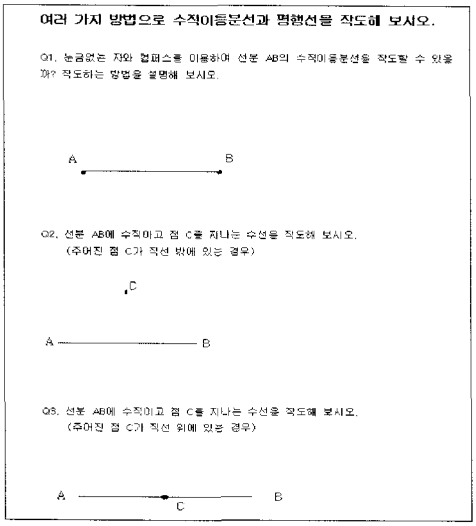
나) 탐구하고자 할 주제의 학습 목표는 수학 영재들의 사고 측정을 고려하여 다양한 구체적인 조작 활동이나 보다 추상적인 사고 활동 속에서 수학적으로 의미 있는 추측과 그것의 타당화를 통해 새로운 개념을 이해하거나 재창조하는 경험을 갖도록 하여야 한다.

다) 의도한 교수-학습의 주된 목표를 달성하기 위해서는 하위 학습 주제와 탐구 활동들 사이에 일관성이 유지되도록 체계적으로 조직하여야 한다.

라) 주제 탐구형의 교수-학습 자료를 개발하는 개발자는 그것을 활용하는 교사가 학생들로 하여금 실제적인 주제학습 과정에서 자기 주도적인 탐구를 수행할 수 있도록 자세히 안내할 뿐만 아니라 후속적인 탐구 활동을 유발하여 관련되는 학습 주제로 안내하는 방법에 도움을 얻을 수 있도록 가능한 자세히 기술해주어야 한다.

다. 선분의 등분할 작도 지도 교수-학습 자료 개발

총 3차시 15쪽 분량의 교재와 15쪽 분량의 교사용 지도서를 다음과 같이 개발하였다.



여러 가지 방법으로 수직이등분선과 평행선을 작도해 보시오.

Q1. 눈금없는 자와 컴퍼스를 이용하여 선분 AB의 수직이등분선을 작도할 수 있을까? 작도하는 방법을 설명해 보시오.

A B

Q2. 선분 AB에 수직이고 점 C를 지나는 수선을 작도해 보시오.
(주어진 점 C가 직선 밖에 있는 경우)

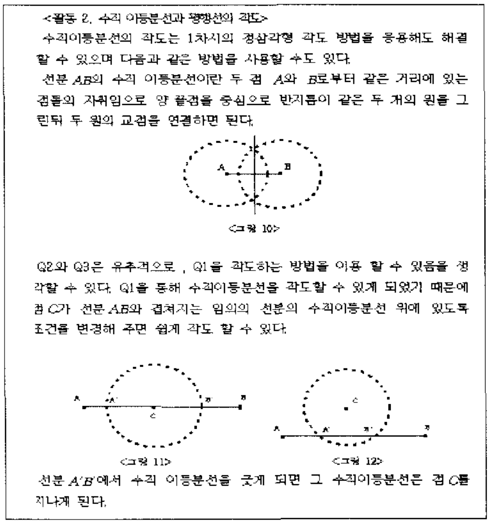
C

A B

Q3. 선분 AB에 수직이고 점 C를 지나는 수선을 작도해 보시오.
(주어진 점 C가 직선 위에 있는 경우)

A C B

[그림 6] 개발된 교재의 예



<활동 2. 수직 이등분선과 평행선의 작도>

수직이등분선의 작도는 1차시의 정삼각형 작도 방법을 응용해도 해결할 수 있으며 다음과 같은 방법을 사용할 수도 있다.

선분 AB의 수직 이등분선이란 두 점 A와 B로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취임으로 양 끝점을 중심으로 반지름이 같은 두 개의 원을 그린뒤 두 원의 교점을 연결하면 된다.

A B

<그림 10>

Q2와 Q3은 유추적으로, Q1을 작도하는 방법을 이용 할 수 있음을 생각할 수 있다. Q1을 통해 수직이등분선을 작도할 수 있게 되었기 때문에 점 C가 선분 AB와 겹쳐지는 임의의 선분의 수직이등분선 위에 있도록 조건을 변경해 주면 쉽게 작도 할 수 있다.

<그림 11> <그림 12>

선분 $A'B'$에서 수직 이등분선을 긋게 되면 그 수직이등분선은 점 C를 지나게 된다.

[그림 7] 개발된 교사용 지도서의 예

5. 작도 과정의 수학적 사고 분석을 위한 틀 개발

본 연구에서는 이환철 외(2009)의 연구 결과와 예비 검사를 토대로 선분의 등분할 작도와 증명 과정에서 의미 있게 관찰할 수 있을 것이라 기대되는 측정 요소를 선별하였다.

예비 검사에서 관찰된 유의미한 수학적 사고는 유추적 사고, 연역적 사고, 기호화의 사고이다. 예비 검사에서는 발견되지 않았지만 교사의 발문에 따라 일반화의 사고와 발전적 사고가 충분히 관찰되어 질 것으로 판단되어 작도 과정의 수학적 사고 분석을 위한 틀에서는 유추적 사고, 연역적 사고, 발전적 사고, 일반화의 사고, 기호화의 사고를 관찰해보고자 한다. 그러나 각각의 사고 유형이 가지는 측정 요소 중에는 작도에 적합한 요소가 있는 반면 부적합한 요소들도 있다. 이에 본 연구에서는 각각의 측정 요소가 작도에 적합한지

여부를 검토하여 적합한 요소들을 선별하고자 한다.

가. 유추적 사고

1) 문제 상황과 유사한 조건을 가지는 상황에 대해 생각해 보았는가?

유사한 조건이나 전에 학습한 내용을 바탕으로 문제를 해결하기 위한 노력을 관찰할 수 있으므로 작도에 적합한 측정 요소이다.

2) 문제 상황과 유사한 상황에서 성립했던 원리나 성질이 떠올랐는가?

유사한 상황에서 성립했던 원리를 이용해서 문제 해결을 시도할 수 있기 때문에 작도에 적합한 측정 요소이다.

3) 유사한 상황에서 떠올린 원리나 성질을 문제 상황에 적용하였는가?

떠올린 원리와 성질의 올바른 적용 여부 역시 작도에 적합한 측정 요소이다.

나. 연역적 사고

1) 추측한 결론을 설명할 수 있는 정리나 성질이 있는지 생각하였는가?

2) 추측한 결론을 설명할 수 있는 정리나 성질을 찾아내었는가?

작도를 하기 위한 기본적인 정리와 성질을 생각해내는지 여부는 적합한 측정 요소이다. 그러나 찾아낸 정리나 성질을 활용하여 문제를 올바르게 해결하는지의 여부도 중요하기 때문에 '2)'의 측정 요소는 '찾아낸 정리나 성질을 사용하여 문제를 해결하였는가?'로 바꾸어 관찰한다.

3) 찾아낸 정리나 성질을 사용하여 추측한 결론을 증명하였는가?

작도를 올바르게 하였음을 증명하는 것 역시 적합한 측정요소이다.

예비검사 결과 학생들은 기존에 배운 것들 중에서 본 문제와 유사한 상황의 문제를 유추하여 해결하고자 하는 경향이 많았다. 그러나 잘못된 유추로 인한 오류를 인식하고 이를 증명하기도 하였다. 이러한 사고도 연역적 사고의 일부분이므로 다음과 같은 측정 요소를 추가할 수 있다.

4) 문제 해결 과정에 오류가 생겼을 때 그 오류를 인식하였는가?

5) 인식된 오류를 증명하였는가?

다. 발전적 사고

1) 새로운 풀이 과정이나 접근 방식을 찾아내려고 생각하였는가?

2) 주어진 조건이나 대상을 변화시켜 새로운 결과를 얻고자 노력했는가?

작도를 완결한 후에 새로운 해결 방법을 찾으려는 시도는 적합한 측정 요소이다.

3) 새로운 풀이 과정이나 접근 방식 또는 새로운 결과를 얻어내었는가?

새로운 해결 방법을 찾으려는 시도가 성공하였는지의 여부도 적합한 측정 요소이다. 그러나 '3)'의 경우 '1)'과 '2)'가 겹쳐있기 때문에 본 연구의 측정 요소에서는 제외한다.

라. 일반화 사고

1) 주어진 조건보다 일반적인 경우에서도 성립할지 생각하였는가?

2) 주어진 조건보다 일반적인 경우에서도 성립함을 밝혔는가?
3) 자신의 풀이 방법이 일반적으로 다른 경우에도 사용되는지 생각하였는가?
해결 방법이 일반적으로 성립함을 밝히는 것은 적합한 측정 요소이다. 그러나 '3)'의 경우 '2)'와 겹쳐지기 때문에 본 연구의 측정 요소에서는 제외한다.
4) 문자의 사용과 같이 더 추상화, 통합화된 개념을 이용하여 설명하였는가?
작도 과정을 증명한 후 문자를 사용하여 일반화를 하는 경우는 적합한 측정 요소이다.

마. 기호화 사고

1) 문제 상황을 기호를 사용하여 나타내었는가?
문제 상황을 기호로 나타내는 것은 작도 과정을 증명하거나 설명하기 위해 도움이 되는 것으로 적합한 측정 요소이다. 그러나 작도에서는 문제의 상황 뿐 아니라 문제의 해결 과정 및 증명 과정이 중요하기 때문에 본 연구에서는 '문제의 구성 요소를 기호로 나타내었는가?', '문제의 해결 과정을 기호로 나타내었는가?', '증명 과정을 기호로 나타내었는가?'로 세분화 하고자 한다.
2) 문제 상황을 수량으로 나타내었는가?
작도 과정에서 수량화는 적합하지 않은 측정 요소이다.
3) 문제 상황을 그림으로 나타내었는가?
문제의 상황을 그림으로 나타내는 것은 문제 해결을 위해 시도할 수 있는 의미있는 행동이므로 적합한 측정 요소이다.

따라서 본 연구에서 관찰하고자 하는 유의미한 수학적 사고의 관찰 항목은 다음 <표 2>와 같다. 관찰 항목은 측정 요소의 내용을 고려하여 설정한 것이다.

<표 2> 수학적 사고 측정을 위한 관찰 항목 및 코드화

수학적 사고의 유형	측정 요소
유추적 사고	문제 상황과 유사한 조건을 가지는 상황에 대해 생각해 보았는가?(A1-인출)
	문제 상황과 유사한 상황에서 성립했던 원리나 성질이 떠올랐는가?(A2-사상)
	유사한 상황에서 떠올린 원리나 성질을 문제 상황에 적용하였는가?(A3-적합)
연역적 사고	추측한 결론을 설명할 수 있는 정리나 성질이 있는지 생각하였는가?(B1)
	찾아낸 정리나 성질을 사용하여 문제를 해결하였는가?(B2)
	찾아낸 정리나 성질을 사용하여 추측한 결론을 증명하였는가?(B3)
	문제 해결 과정에 오류가 생겼을 때 그 오류를 인식하였는가?(C1)
	인식된 오류를 증명하였는가?(C2)
발전적 사고	주어진 조건이나 대상을 변화시켜 새로운 결과를 얻고자 노력했는가?(D1)
	새로운 풀이 과정이나 접근 방식을 찾아내려고 생각하였는가?(D2)
일반화의 사고	주어진 조건보다 일반적인 경우에서도 성립할지 생각하였는가?(E1)
	주어진 조건보다 일반적인 경우에서도 성립함을 밝혔는가?(E2)
	문자의 사용과 같이 더 추상화, 통합화된 개념을 이용하여 설명하였는가?(E3)
기호화의 사고	문제 상황을 그림으로 나타내었는가?(F1)
	문제의 구성 요소를 기호로 나타내었는가?(F2)
	문제 해결과정을 기호로 나타내었는가?(F3)
	증명 과정을 기호로 나타내었는가?(F4)

유추적 사고의 관찰 항목은 측정 요소와 유추에 의한 문제해결 과정을 토대로 설정하였다. 유추에 의한 문제해결 과정은 표상, 인출, 사상, 적합, 도식형성의 5단계로 이루어지는데 토대(the base)와 목표(the target)를 바르게 사용하지 못하면 유추를 제대로 하기 어렵다. 바르게 표현했더라도 적절한 이전의 경험의 표현을 검색하지 못하면 사상으로 나아갈 수 없으며, 문제를 바르게 표현하고 검색했더라도 사상이 제대로 이루어지지 않는 경우도 있다.

첫째, 유추의 처음인 표상 형성 단계에서는 문제가 제시되면 먼저 문제와 문제 영역에 대한 표현을 구성해야 한다. 표상을 올바르게 하기 위해서는 먼저 주어진 문제(목표 문제)에서 무엇을 구해야 하는지, 문장 안에 감추어진 조건들은 어떤 것이며 각 조건들 사이의 관계를 이해하여 파악하는 것이 선행되어야 한다. 즉 해결하고자 하는 목표 문제의 알고 싶은 개념이나 구해야 하는 것이 무엇인지 표상을 형성하는 단계다. 표상 형성은 새로운 문제(목표 문제)나 이전에 경험한 유사한 문제(바탕 문제)에 대한 지식에 따라 표상 형성이 달라진다. 또한 유추 과정의 첫 단계인 표상 형성이 정확하지 않으면 유추는 잘 이루어지지 않는다.

둘째, 인출 단계는 현재의 문제와 관련될 만한 과거에 접하여 저장한 표현을 검색해야 한다. 표상 형성 단계에서 파악된 목표 문제의 표상과 구조적으로 유사한 문제들을 떠올리며 목표 문제를 해결하는데 도움을 줄 수 있는 이와 비슷한 문제를 푼 적이 있는지 먼저 생각을 한다. 즉 목표 문제와 유사한 이전에 학습한 문제(내용)를 머릿속에서 상기시키는 단계다. 첫 단계인 표상 형성이 바르게 이루어졌다고 이전에 경험한 유사한 문제가 무조건 인출되는 것이 아니라, 표상 형상은 바르게 이루어졌으나 이전에 학습된 내용이 인출되지 않을 수도 있다.

셋째, 사상 단계에서는 잠정적인 해결 방법을 일단 검색한 후에는 잠정적인 해결 방법과 해결해야 할 문제 사이의 관계를 사상시켜야 한다. 주어진 문제를 해결하기 위해 이전에 경험한 유사한 문제(바탕 문제)를 인출했으면 사상 단계에서 주어진 문제와 이전에 학습한 문제에서 공통점이나 유사한 구조를 찾아 대응시키는 과정이다. 이러한 유추는 아동 스스로 자발적으로 잘 일어나지 않으므로 교사의 역할이 크다. 교사가 사상이 잘 이루어질 수 있도록 가능한 적절한 단서를 많이 제공해 주어야 학생들은 바탕 문제와 목표 문제의 구조를 잘 사상시킬 수 있다. 즉 지식 기반의 양이 많을수록 유추 전이가 잘 이루어진다.

넷째, 적합 단계에서는 정확한 해결 방법을 찾았다면 주어진 상황에 맞게 고쳐서 문제해결에 활용해야 한다. 바탕 문제와 목표 문제 사이의 관계와 구조를 파악하여 사상이 잘 이루어졌으면 적합 단계에서는 목표 문제를 해결하기 위해 예전에 풀었던 문제의 해결 방법을 생각하여 목표 문제에 바탕 문제의 해결 방법을 적용하는 과정이다. 표상 형성이 바르고 목표 문제를 잘 해결할 수 있는 바탕 문제를 잘 인출하고 목표 문제와 바탕 문제 사이의 공통점을 찾아 사상을 바르게 대응시켰어도 적합 단계가 잘 이루어지지 않을 수도 있다. 만약 예전에 풀었던 문제와 현재의 당면 문제가 유사한 구조를 가지지 않았다면 목표 문제를 해결하기 위해 바탕 문제를 만드는 것이 필요하다. 목표 문제와 바탕 문제가 동형을 이루지 않으면 바탕 문제의 해결을 적합하게 해야 한다. 또한 적합 단계가 성공하기 위해서는 목표 문제의 구성 요소와 바탕 문제의 요소를 비교·분석하면서 문제들 단계적으로 해결해야 한다.

유추 과정의 마지막 단계는 도식 형성 과정이다. 이전에 학습한 문제를 유추하여 목표 문제를 해결한 것을 바탕으로 새로운 규칙을 발견하거나 일반화시키고 확장하는 단계다. 도식 형성 단계는 문제의 해로부터 학습을 하게 되는데 새로운 규칙이나 기술을 획득하거

나 이미 가지고 있던 지식의 개념적 표현을 수정하게 된다. 도식 형성이 잘 이루어지면 아동 스스로 목표 문제를 바탕으로 새로운 문제를 만들어서 해결할 수 있다(이신자, 2009, pp.14-16).

본 연구에서는 위와 같은 유추의 단계 중에서 측정요소와 관련이 있는 인출, 사상, 적합의 세 가지 관찰 항목을 보고자 한다.

구조적 유사성을 이용하는 유비추리의 경우에는 항상 바른 결론만을 도출할 수 있는 것은 아니며 (강문봉·강홍규·김수미·박교식·박문환·서동엽·송상헌·유현주·이종영·임재훈·정동권·정은실·정영옥, 2005, p.130), 수학적 사고의 유형이 독립적으로 일어나는 것만이 아니고 때로는 동시에 연속적으로 일어나기 때문에(이환철 외, 2009, p.100) 유추적 사고의 검증을 위해 연역적 사고 등 다른 사고가 수반될 것이다. C1, C2는 유추적 사고나 특수화의 사고 등을 통해 문제를 해결하는 과정에서 발견되는 오류를 연역적으로 검증하는 과정을 보고자 한 것이다.

선분의 등분할 작도를 수행하기 위해서는 기존에 학습한 내용 중 필요한 내용을 사용하여야 한다. B1은 필요한 정리를 생각 · 발견하는지를 관찰하는 것이다. B2는 그 정리를 사용하여 문제를 해결할 수 있는가를 관찰하는 것이다. 학생 스스로 정리를 발견하지 못하는 경우가 있어 단계별 힌트를 통해 필요한 정리를 제공하기 때문에 B1과 B2는 반드시 같이 관찰되지는 않는다. 작도를 수행한 후에는 자신의 수행 과정의 타당성을 밝히기 위한 증명이 뒤따라야 한다(한인기, 1999, p.159). 따라서 B3은 자신의 작도 수행 과정을 증명하는가를 관찰하는 항목이다.

발전적 사고에는 조건 변경에 의한 발전과 관점 변경에 의한 발전이 포함된다(강문봉 외, 2005, p.132). D1은 조건이 변경된 경우와 다른 관점에서 문제를 봄으로써 새로운 결과를 얻기 위해 노력하는 것을 관찰할 수 있으며, D2는 하나의 해결방법이 아닌 새로운 해결 방법을 생각하는 것을 관찰할 수 있다.

일반화의 경우 수치를 바꾸는 시도와 수치와 상관없이 일반적인 경우로 확장하는 경우를 E1과 E2를 통해 관찰할 수 있으며, 일반화 결과를 문자로 표현하는 경우를 E3으로 설정하였다.

기호화의 사고는 문제 상황을 그림으로 나타내는 것을 F1로, 문제의 구성 요소를 기호화하는 것을 F2로 설정하였으며, 문제 해결 과정을 기호를 통해 나타내는 것을 F3으로 나타내었다. 기호를 통해 해결 과정을 나타내는 것은 수학적으로 의사소통하기 위해 중요한 항목이다. 작도 과정을 증명하는 과정을 기호화하는 것을 F4로 설정하였다.

6. 자료의 수집과 자료 분석

본 연구는 연구 대상자들이 선분의 등분할 작도를 하는 과정에서 나타나는 수학적 사고 과정을 분석하기 위하여 관찰자 및 관찰자의 기록, 활동지 자료, 임상면접 자료, 면접 녹화물 등을 활용하였다.

연구자는 수업 진행을 하며 관찰을 하였고 학생들에게는 활동지를 충분히 주어 오류가 난 부분이라도 지우지 않게 했으며, 학생들의 작도 과정을 처음부터 끝까지 지켜보며 수학적 사고 과정을 관찰 · 기록 하였고, 일정 시간마다 단계별 힌트를 제공하여 학생들의 문제 해결 과정을 도왔다.

수업이 끝난 뒤 영재학급 학생들의 경우 힌트를 제공 받은 단계에 따라 4명을 선정하였

고, 일반학급 학생들의 경우 의미 있는 반응을 보인 학생들을 선정해 각각 면담을 하며 작도 과정에서 나타난 수학적 사고 과정을 면접 프로토콜과 활동지 분석을 통해 각각의 요소별로 코드화하여 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 작도과정에 나타나는 수학적 사고

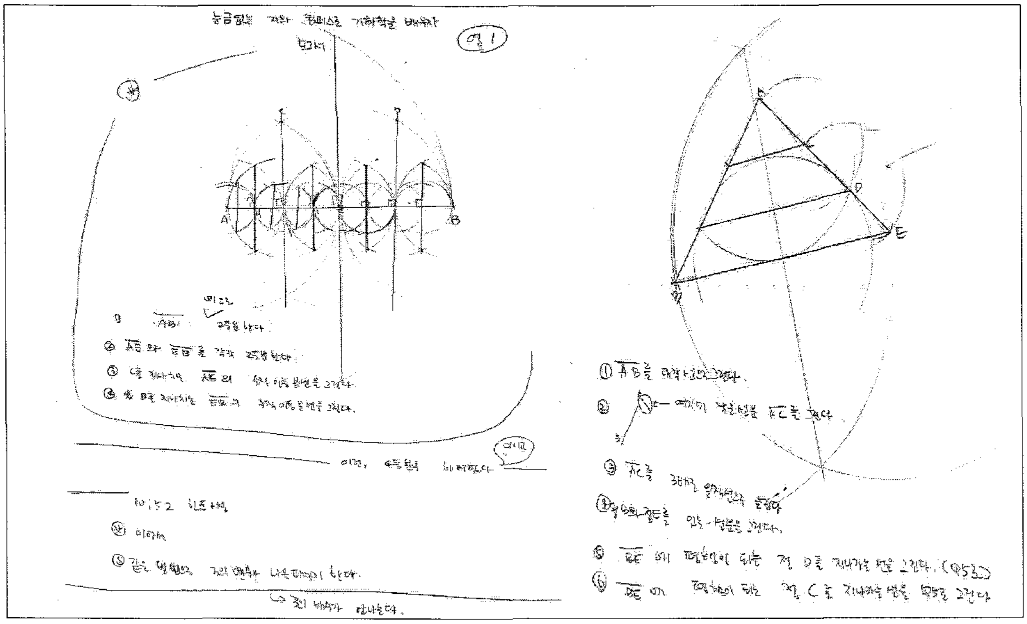
영재학급 아동들의 수학적 사고는 예비 검사 때와 달리 단계별 힌트를 제공받지 않고 해결한 학생은 없었다. 단계별 힌트를 제공받고 해결한 학생은 1단계 2명, 2단계 2명, 3단계 3명, 4단계 7명이었고, 나머지 학생들은 50분의 시간이 지난 뒤에 서로 토의를 통해 해결 방법을 공유하고 대부분이 풀이 과정을 이해하였다. 영재학급 학생들의 경우 단계별 힌트를 제공받은 정도에 따라 4명의 학생을 선별하였다. 1단계 힌트를 제공받은 학생을 'GA', 2단계 힌트를 제공받은 학생을 'GB', 3단계 힌트를 제공받은 학생을 'GC', 4단계 힌트를 제공받은 학생을 'GD'라고 명명하였다.

일반학급 아동들의 경우 2차시까지는 무난하게 이해하고 중위권 이상의 아동들은 무난하게 과제를 수행하였다. 3차시의 경우도 중위권 이상의 아동들은 선의 연장, 수직 이등분선의 작도, 평행선의 작도까지는 무난하게 수행하였으나 선분의 등분할 작도는 4단계까지의 힌트를 모두 받고 많은 토의 과정을 거쳐도 해결하지 못하는 경우가 대부분이었다. 대부분의 일반학급 학생들도 2등분을 반복하여 3등분에 근접하고자 하는 시도를 하였다. 그러나 영재학급 학생들은 몇 번의 시도 뒤에 연역적으로 2등분의 반복이 무의미함을 깨닫고, 다른 풀이 방법을 찾으려고 한 반면에 일반학급 학생들은 활동을 최종 결론으로 생각하는 학생이 많았으며, 연역적으로 되지 않음을 증명한 학생은 한 명에 불과했다. 그리고 최상위권 학생 두 명만이 관찰이 유의미한 결과를 보여주었다. 인천 G초등학교는 2010년 3월 진단평가 결과 인천광역시북부교육청 관내 초등학교에서 평균성적이 가장 높은 학교임에도 불구하고, 일반학급 아동들이 선분의 등분할 작도를 수행하는 것은 무리였다. 일반학급 아동들 중에서 유의미한 반응을 보인 학생 두 명은 'SA', 'SB'라 명명하였다.

일반학급 학생들은 힌트를 제공받을 수 있는 상황이 되면 가급적 힌트를 빨리 받으려는 경향이 많았으며 영재학급 학생들은 오히려 힌트를 원하지 않는 경우가 많이 있었다.

관찰 및 면담을 통해 행동 특성을 정리한 뒤, 풀이 과정의 전개에 나타나는 수학적 사고를 분석하였다. 이러한 분석은 선분의 등분할을 통한 작도의 지도가 영재 학생이나 일반 학생들에게 어떻게 인지되고 학습이 가능한지를 가늠할 수 있는 자료가 되며 각각의 학생들이 보이는 풀이와 반응을 면밀히 관찰함으로써 학생들의 행동 특성과 풀이 과정에서의 수학적 사고 요소를 분석틀에 맞게 추출함으로써 연구 방법의 타당도를 확보할 수 있었다.

가. 영재학급 학생 중 1단계 힌트까지 제공 받은 학생 - GA



[그림 8] 학생 GA의 문제 해결 보고서

1) 행동

2등분의 반복을 통하여 문제를 해결하고자 하였으나 빠르게 연역적으로 사고하여 3등분이 불가능함을 깨닫고, 다른 해결 방법을 찾고자 하였다. 힌트를 받는 것을 싫어하고 사고 과정을 간략하게 메모하는 것을 좋아했으나 문제를 해결한 뒤 증명을 하지 않았다.

2) 풀이 과정의 전개

구조적으로 유사한 선분의 2등분을 통하여 문제를 해결하고자 하였으며[A1] 2등분의 반복으로는 3을 약수로 갖는 수가 나오지 않음을 인지하고[C1] 힌트를 제공받은 뒤 선분AB를 비스듬히 세우고 등분할을 시도하였다. [정리 1]과 [정리 2]의 원리를 생각해내었고[B1] 찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각하였다[A2]. 찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용하였으며[A3] 찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결하였다[B2]. 문제의 상황을 도식화 하였으며[F1] 문제의 구성 요소를 기호화하고[F2] 문제 해결 과정을 기호화 하였다[F3].

3) 학생 면담 과정

· 교사: 처음에 문제를 받았을 때 어떻게 해결해야겠다고 생각했니?

· GA: 음. 수직이등분선 그리면서 이등분 하는 방법을 알고 있었기 때문에 별다른 고민 없이 이등분부터 해봤어요.

· 교사: 그 풀이 방법이 잘못된 것은 언제 알게 되었니?

· GA: 4등분이 된 것 보고.

· 교사: 그런데 보고서에는 8등분까지 했는데?

· GA: 그냥 다른 방법이 떠오르지 않아서 한 번씩 더 이등분 한거에요. 그런데 이렇게

하면 해결이 안 되겠더라고요.

· 교사: 그런데 왜 안 되는지는 궁금하지 않았니?

· GA: 그냥 홀수는 나오지 않겠다고 생각했고, 더 이상 이걸 생각하는 건 시간낭비라 생각해서 다른 방법을 생각했지요.

· 교사: 학생들이 힌트2를 제공받을 때 힌트1을 받았는데 왜 이렇게 늦게 가져갔니?

· GA: 그냥 아예 안보고 풀고 싶었는데 남들이 힌트 보고도 잘 못 푸는 거 보고 시간 안에 못할 것 같아서 가져왔어요.

· 교사: 힌트1을 보고 어떤 걸 느꼈니?

· GA: 음. 우선 문제에서 평행선을 이용하라고 했던 게 수직이등분선의 무한 반복이 서로 평행이라는 이야기인줄 알았는데 힌트를 보니 직선 위에서 해결하기는 힘들 것 같고, 다른 직선과 연결해서 해결해야 한다고 생각했어요.

· 교사: 풀이과정에서 선분 AB를 대각선으로 그렸는데 왜 그랬니?

· GA: 문제의 조건을 바꿔볼 필요성은 있다고 생각했죠. 비스듬히 세우니까 힌트에 있는 삼각형의 빗변과 겹쳐져 방법이 생각났어요.

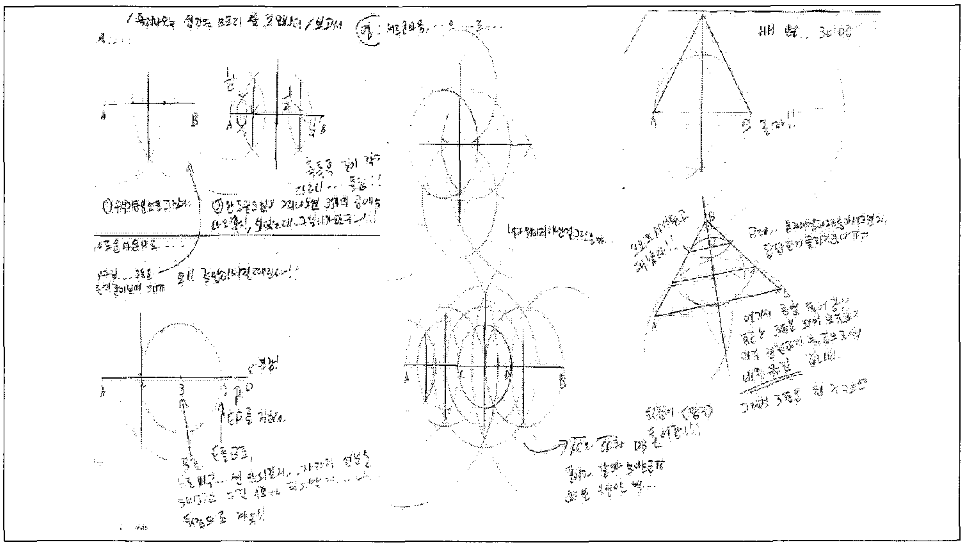
· 교사: 풀고 나서 증명은 전혀 하지 않았네?

· GA: 아.전 제가 푼 거 자체가 증명이 돼있다고 생각했어요.

· 교사: 그리고 3등분을 활용해서 할 수 있는 다른 거는 생각 안 해봤니?

· GA: 그냥 풀고 나서는 아무것도 생각하기 싫어서.

나. 영재학급 학생 중 2단계 힌트까지 제공 받은 학생 - GB



[그림 9] 학생 GB의 문제 해결 보고서

1) 행동 특성

2등분의 반복을 통하여 문제를 해결하고자 하였으나 빠르게 연역적으로 사고하여 3등분이 불가능함을 깨닫고, 다른 해결 방법을 찾고자 하였으며 힌트를 제공 받는 것을 싫어했

지만 시간 내에 문제를 해결하고자 하는 욕구도 강하여 힌트를 2단계까지 제공 받았다. 힌트를 받고 문제를 해결한 것에 대해 자기 스스로에게 만족하지 못하였고 사고 과정을 이야기 하듯이 써나갔다. 문제를 해결한 뒤 반드시 증명과 탐구를 하고자 하고 다른 사람과의 의견 교환 없이 혼자 힘으로 해결하고자 하였다.

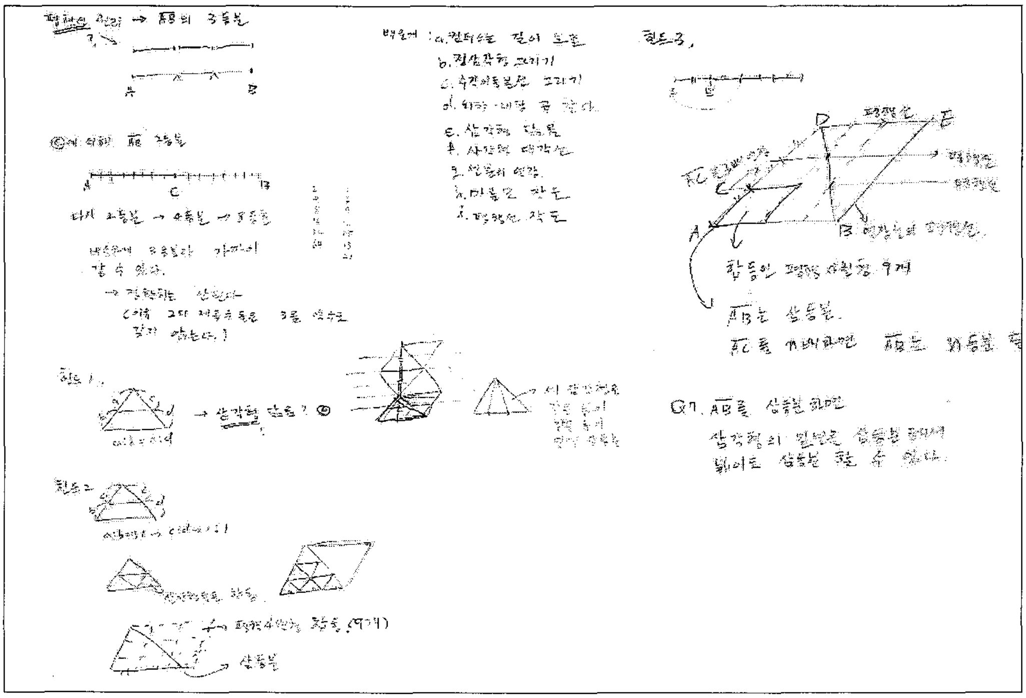
2) 풀이 과정의 전개

구조적으로 유사한 선분의 2등분을 통하여 문제를 해결하고자 하였고[A1] 2등분의 반복으로는 3을 약수로 갖는 수가 나오지 않음을 인지하였으며[C1] 선의 2등분은 2의 제곱수로만 등분할이 됨을 증명하였다[C2]. 2등분 된 선의 연장을 통해 3등분 된 선분을 임의로 그리고자 하였으며[D1] 힌트를 제공 받고, [정리 1]과 [정리 2]의 원리를 생각해냈다[B1]. 찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각하였고[A2] 찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용하였다[A3]. 찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결하였고[B2] 해결한 문제를 증명하였다[B3]. 문제의 상황을 도식화 하였고[F1] 문제의 구성 요소를 기호화하고 [F2] 문제 해결 과정을 기호화하였으며[F3] 문제의 증명 과정도 기호화하였다[F4]. 3등분 이외에 등분이 가능한 경우를 생각하였고[E1] 일반적으로 3을 약수로 갖는 등분할이 가능하다고 생각하였다[E2].

3) 학생 면담 과정

· 교사: 수직이등분선으로 문제를 해결하려고 했는데 어떻게 됐니?
· GB: 이거요? 두 번하고 4등분되었는데 이런 식으로 하면 2의 거듭제곱 이외에는 못구한다고 생각해서 그냥 관두고 다른 방법을 생각했어요.
· 교사: 선분 AB를 연장하는 건 결국 포기했구나?
· GB: 선분을 연장해서 문제를 바꾸려고 했는데 생각해보니까 그렇게 하느니 차라리 한 선분을 3배 연장하고 그걸 AB라고 하는 거나 마찬가지더라고요.
· 교사: 힌트를 굉장히 늦게 받았는데 왜 이렇게 늦게 가져갔니?
· GB: 지금도 힌트 받아서 푼게 찜찜해요...숙제로 풀라고 했으면 내일 하루 종일 생각했을텐데....힌트 받고 푸니까 남이 푼 거 베낀 거 같아요.
· 교사: 그래...그래도 인간은 다른 사람의 생각을 토대로 계속 발전하잖니? 힌트를 2개 받았는데 힌트에서 특별히 느낀 점이 있었니?
· GB: 우선 평행선을 사용하는 이유를 알았어요. 삼각형의 밑변의 간격이 같으면 양쪽 변이 등분할 되니까 그걸 이용하면 문제를 풀 수 있을 거라 생각했지요.
· 교사: 증명도 하고 일반화도 시켰구나. 실생활에서 이용되는 장면은 생각 안 해봤니?
· GB: 시간이 좀 더 있었으면 했을텐데 이것도 힘들었어요.

다. 영재학급 학생 중 3단계 힌트까지 제공 받은 학생 - GC



[그림 10] 학생 GC의 문제 해결 보고서

1) 행동 특성

2등분의 반복을 통하여 문제를 해결하고자 하였으나 빠르게 연역적으로 사고하여 3등분이 불가능함을 깨닫고, 다른 해결 방법을 찾고자 하였고 기호를 사용하여 나타내는 것이 습관화 되어 있었다. 문제 풀이 과정에 도움이 될 수 있는 내용을 메모한 뒤 풀이를 시작하였고 힌트를 제공 받는 것에 대한 거부감이 없었다.

2) 풀이 과정의 전개

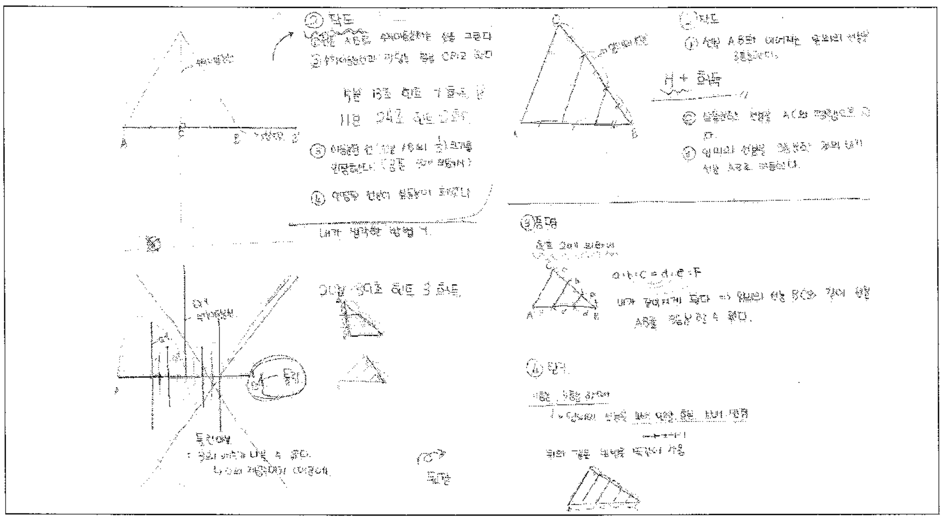
구조적으로 유사한 선분의 2등분을 통하여 문제를 해결하고자 하였고[A1] 2등분의 반복으로는 3을 약수로 갖는 수가 나오지 않음을 인지하였으며[C1] 선의 2등분은 2의 제곱수로만 등분할이 됨을 증명하였다[C2]. 힌트를 제공 받고, [정리 1]과 [정리 2]의 원리를 생각해내었고[B1] 찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각하고[A2] 찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용하였다[A3]. 찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결하고[B2] 해결한 문제를 증명하였고[B3] 문제의 상황을 도식화하였다[F1]. 문제의 구성 요소를 기호화하고[F2] 문제 해결 과정을 기호화하였으며[F3] 문제의 증명 과정을 기호화하였다[F4]. 3등분 이외에 등분이 가능한 경우를 생각함하였고[E1] 일반적으로 3을 약수로 갖는 등분할이 가능하다고 생각하였다[E2]. 문자를 사용하여 일반화를 하였고[E3] 결과가 성립하는 구체적인 장면을 떠올렸다[D1].

3) 학생 면담 과정

· 교사: 힌트를 빨리 빨리 가져가던데 힌트가 있으면 빨리 받는 게 좋니?
· GC: 그냥 별 생각 없었는데요?
· 교사: 그럼 마지막 힌트는 왜 가져가지 않았니?

· GC: 그냥. 그 정도는 남겨놓고 싶었어요.(웃음)
· 교사: 보고서에 배운 내용들을 다 써놓고 문제를 풀기 시작했는데 원래 그렇게 하니?
· GC: 아니요. 선생님이 지금까지 배운 내용을 참고로 하면 충분히 풀 수 있다고 해서 그냥 써봤어요.
· 교사: 도움이 되었니?
· GC: 도움이 됐는지는 잘 모르고. 음. 모르겠어요.
· 교사: 배운 내용들을 다 기호로 썼는데... 여기 수직이등분선 그리기를 ⓒ라고 했지. 그리고 ⓒ에 의해 이등분 한다고 한걸 보면 도움이 된 것 같구나. (다른 학생의 보고서를 보여주며) 여기 다른 애들은 다시 컴퍼스로 2등분 했는데 넌 그냥 'ⓒ'라고만 썼잖아.
· GC: 도움이 됐네요.(웃음)
· 교사: 힌트 2까지 받은 뒤에 그린 이 평행사변형은 무슨 생각으로 그린거니?
· GC: 힌트1은 닮음이고, 힌트 2에서는 잘만 나누면 합동인 삼각형이 4개 나오잖아요. 그러면 수직이등분선이랑 상관없이 밑변을 2등분 할 수 있으니까 삼각형을 9개 만들면 3등분이 될 거라 생각했죠.
· 교사: 평행사변형은?
· GC: 삼각형을 거꾸로 이어붙이면 평행사변형이니까 한번 그려본 거에요.
· 교사: 힌트3은 많이 도움이 되었니?
· GC: 합동인 도형 9개 만들기가 너무 힘들었는데 옆쪽 변을 연장하면 된다고 조건에 맞게 그릴 수 있을 것 같았어요.
· 교사: 'n'을 사용해서 일반화 했는데 평소에도 'n'을 자주 사용하니?
· GC: 네. 수열이나 규칙이 있는 거 할 때는 자주 쓰죠.
· 교사: 여기 실생활에서 사용하는 예로 넓이의 삼등분을 썼는데 다른 생각은 없니?
· GC: 똑같이 접기? 아니면 무슨 공사 같은데 쓸 수 있을 것 같기도 한데.

라. 영재학급 학생 중 4단계 힌트까지 제공 받은 학생 - GD



[그림 11] 학생 GD의 문제 해결 보고서

1) 행동 특성

2등분의 반복을 통하여 문제를 해결하고자 하였으나 빠르게 연역적으로 사고하여 3등분이 불가능함을 깨닫고, 다른 해결 방법을 찾고자 하였고 힌트를 제공 받는 것에 대한 거부감이 없었지만 다른 학생들과 의견을 교환하며 문제를 해결하는 것을 선호하였다.

2) 풀이 과정의 전개

구조적으로 유사한 선분의 2등분을 통하여 문제를 해결하고자 하였고[A1] 2등분의 반복으로는 3을 약수로 갖는 수가 나오지 않음을 인지하였으며[C1] 선의 2등분은 2의 제곱수로만 등분할이 됨을 증명하였다[C2]. 2등분 된 선의 연장을 통해 3등분 된 선분을 임의로 그리고자 하였고[D1] 힌트를 제공 받고, [정리 1]과 [정리 2]의 원리를 생각해냈다[B1]. 찾아낸 정리와 문제 사이의 관계를 연결지어 생각하였고[A2] 찾아낸 정리를 문제의 상황에 맞게 고쳐서 활용하여[A3] 찾아낸 정리를 사용하여 문제를 해결하였다[B2]. 해결한 문제를 증명하였고[B3] 문제의 상황을 도식화하였다[F1]. 문제의 구성 요소를 기호화하고[F2] 문제 해결 과정을 기호화하였으며[F3] 문제의 증명 과정을 기호화하였다[F4]. 3등분 이외에 등분이 가능한 경우를 생각하였다[E1].

3) 학생 면담 과정

· 교사: 선분 AB를 수직이등분 하고서 또 연장을 했구나? 어떤 생각으로 이렇게 했니?

· GD: 공준에 의해서 할 수 있는 방법을 생각하다 보니까 연장해보면 어떨까 하는 생각을 했어요.

· 교사: 그런데 어떤 점이 틀렸다고 생각했니?

· GD: 연장을 해버리면 문제가 달라지니까요. 1+1 물어봤는데 2+2 풀어놓고 답이라고 하는 거 같아서.

· 교사: 그래. 수직이등분선을 계속 긋는 방법도 생각했었구나?

· GD: 그건 안 될 거 같았는데 그냥 생각이 안 나서 한번 해 본거에요.

· 교사: 힌트를 다 받고나서는 문제를 풀었는데 어떻게 풀 수 있었니?

· GD: 처음에는 잘 몰랐는데 힌트 4개를 같이 놓고 생각하니까 힌트2의 삼각형이 한 변을 제 맘대로 늘릴 수 있으면 나머지도 연결될 거라고 생각했어요. AC는 어차피 마음대로 그릴 수 있는 거니까요.

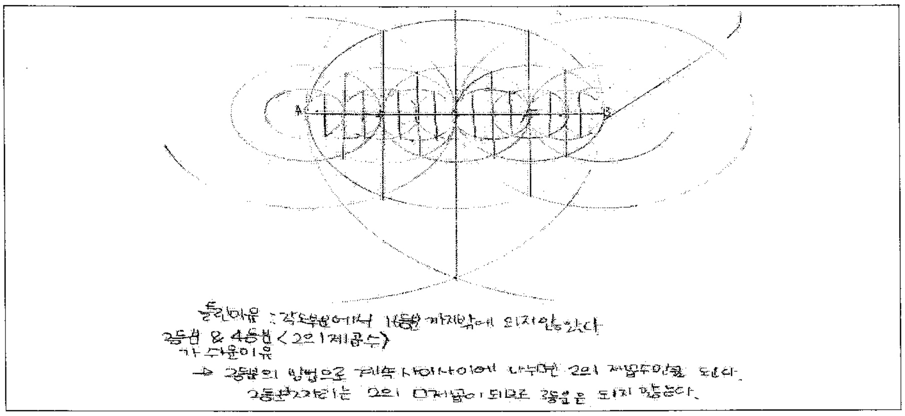
· 교사: 그래 탐구에서 4등분, 5등분도 할 수 있다고 했는데 다른 건 없니?

· GD: 6등분, 7등분도 할 수 있겠죠 뭐.

· 교사: 그런 거 말고.

· GD: 몇 등분이든 할 수 있지 않을까요?

마. 일반학급 학생 1 - SA



[그림 12] 학생 SA의 문제 해결 보고서

1) 행동 특성

2등분의 반복을 통하여 문제를 해결하고자 하였으나 빠르게 연역적으로 사고하여 3등분이 불가능함을 깨닫고, 다른 해결 방법을 찾고자 하였다. 힌트를 제공받는 것에 대한 거부감은 있으나 일반학급의 학생들이 대부분 힌트를 제공받는 분위기였기 때문에 힌트를 모두 제공 받았다.

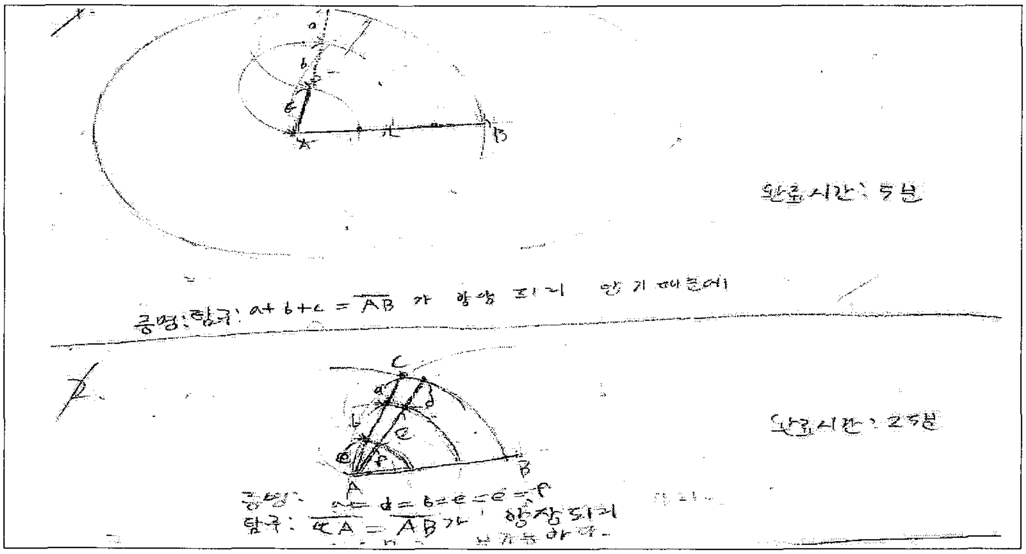
2) 풀이과정의 전개

구조적으로 유사한 선분의 2등분을 통하여 문제를 해결하고자 하였고[A1] 2등분의 반복으로는 3을 약수로 갖는 수가 나오지 않음을 인지하였다[C1]. 선의 2등분은 2의 제곱수로만 등분할이 됨을 증명하였고[C2] 문제의 상황을 도식화하였다[F1]. 문제의 구성 요소를 기호화하고[F2] 문제 해결 과정을 기호화하였으며[F3] 오류 원인의 증명 과정도 기호화하였다[F4].

3) 학생 면담 과정

· 교사: 처음에 수직이등분선으로 문제를 풀려고 했구나?
· SA: 네. 그냥 계속 하다보면 될 거 같았어요.
· 교사: 그런데 결국은 이걸로 해결은 못했네?
· SA: 네. 그런데 3은 2의 제곱수가 아니라서 안 되잖아요.
· 교사: 그런데 다른 방법은 생각해 보지 않았니?
· SA: 음. 이거저거 생각해보고 막 그려봤는데 잘 안 돼요.
· 교사: 힌트들을 보고 생각난 건 없었니?
· SA: 힌트 보니까 더 헷갈리던데요?
· 교사: 왜 힌트 보니까 헷갈렸니?
· SA: 그냥 전혀 상관 없어보였고, 지난번에 공부한 내용 다시 보여준 거라고 생각했어요. 지금 알고 나니까 허탈해요.(이미 면담 전에 풀이 방법은 알려준 상태였음)

바. 일반학급 학생 2 - SB



[그림 13] 학생 SB의 문제해결 보고서

1) 행동 특성

다른 학생들과 달리 선의 2등분을 반복하여 3등분을 하기 위한 시도를 하지 않았으며 사고 과정을 메모하기 보다는 생각을 오래 한 뒤 문제 해결 과정을 간단히 작성하였다. 힌트를 모두 제공 받은 뒤 주어진 선분 이외의 선분을 그려 두 선분간의 관계를 조작하여 문제를 해결하고자 하였다.

2) 풀이 과정의 전개

힌트를 제공받은 뒤 두 개의 선분 사이의 관계에서 분할을 시도하였고[A1] 문제의 상황을 도식화하였으며[F1] 문제의 구성 요소를 기호화하고[F2] 문제 해결 과정을 기호화하였다[F3].

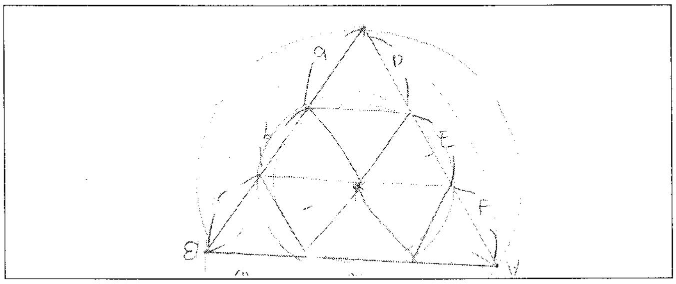
3) 학생 면담 과정

· 교사: (다른 보고서를 보여주며) 다른 학생들은 이렇게 이등분 하는 것도 시도해 봤는데.이런 생각은 안 해봤니?
· SB: 아.생각은 해봤는데 그냥 안했어요.
· 교사: 생각은 했는데 왜 안했니?
· SB: 그냥 모르겠어요. 처음부터 생각한건 아니고요. 다른 거 하다가 생각나서 그냥 안했어요.
· 교사: 힌트 받고서 선 두 개를 이용해서 문제를 풀어보려고 한거 같은데 어떤 생각을 한거니?
· SB: 힌트 보니까 선분 하나만 놓고서는 해결이 안될 거 같아서 이미 3등분된 다른 선분을 놓고서 잘 연결하면 될 것 같았어요.
· 교사: 그런데 컴퍼스로만 연결을 시도했구나? 자를 이용해서 평행선을 그을 생각은 안 해봤니?(이미 면담 전에 풀이 방법을 알려준 상태였음)

· SB: 주어진 선은 3등분이 안되어 있는데 자로 이을 수 있을 거라 생각을 못했어요...
· 교사: 힌트4가 바로 그 내용이잖니?
· SB: 나중에 답을 알고 나니까 아차 싶네요.
· 교사: 그럼 컴퍼스로는 연결을 시도한 이유가 있니?
· SB: 컴퍼스는 길이를 보존시키니까 위로 그은 선분의 3등분을 아래로 옮겨줄 것 같았죠.
· 교사: 그런데 뭐가 잘못된 거니?
· SB: 이렇게 하면 두 선분의 길이가 같아야 하니까요.

사. 기타 유의미한 해결 과정

문제의 해결 여부와 상관없이 유의미한 해결 과정을 살펴보고자 한다.



[그림 14] 일반학급 학생의 유의미한 문제 해결 보고서

위 그림은 힌트 1을 보고 자신의 생각을 표현한 것이다.

주어진 선분으로 정삼각형의 무게중심을 구한 뒤 적절한 원을 그려 정육각형을 작도하면 그 정육각형이 정삼각형의 세 변을 삼등분 할 것이라고 가정한 뒤 문제 해결을 위해 노력하였다. 그 적절한 원을 그리는 것을 실패하여 문제 해결을 완벽히 수행하지 못했지만 그림과 같이 정삼각형을 크기가 같은 작은 정삼각형 9개로 나누어 그릴 수 있었으며 꼭짓점부터 무게중심까지의 거리와 무게중심에서 대변의 중점까지의 거리가 2 : 1 임을 알고 있었기 때문에 문제의 해결에 상당히 근접했다. 그러나 더 이상 발전을 시키지 못했다.

2. 수학적 사고 분석 결과

가. 수학적 사고 분석표

<표 3> 수학적 사고 분석 결과

수학적 사고 유형	측정 항목	영재학급 학생				일반학생	
		GA	GB	GC	GD	SA	SB
유추적 사고	A1	○	○	○	○	○	○
	A2	○	○	○	○		
	A3	○	○	○	○		
연역적 사고	B1	○	○	○	○		
	B2	○	○	○	○		

	B3		○	○	○		
	C1	○	○	○	○	○	
	C2		○	○	○	○	
발전적 사고	D1		○		○		
	D2						
일반화의 사고	E1		○	○	○		
	E2		○	○			
	E3			○			
기호화의 사고	F1	○	○	○	○	○	○
	F2	○	○	○	○	○	○
	F3	○	○	○	○	○	○
	F4		○	○	○	○	

나. 수학적 사고 분석 결과 및 시사점

관찰 대상의 아동 6명에게서 모두 A1이 관찰되었다. 모든 학생이 문제의 목표를 명확히 인식하였고, 'SB'를 제외한 5명의 학생은 선의 2등분을 통하여 문제 해결의 실마리를 찾고자 했고(A1), 'SB'의 경우에도 힌트를 제공 받은 뒤 두 선분 사이의 관계에 초점을 맞추어 문제해결을 시도하였다(A1). 영재학급 학생 4명의 경우 해결 방법과 해결해야 할 문제 사이의 관계를 올바르게 사상시키고(A2), 상황에 맞게 수정하여(A3) 문제를 해결하였으나 일반학급 학생들은 제공된 힌트에서 문제 해결에 필요한 정리들을 발견하지 못하였다. 이는 교사의 적절한 발문이나 힌트의 제공으로 학생들의 유추적 사고를 유도해낼 수 있다는 것을 의미한다.

'GA'의 경우 1단계 힌트만을 제공 받고, 상대적으로 빠른 시간 내에 문제를 해결하였으나 일반화의 과정이나 발전적 생각을 하지 않고 문제가 해결된 것에만 만족을 하였다. 나머지 영재학급 학생들 3명의 경우 문제를 해결한 뒤 수치를 바꾸어 일반화하였으며(E1), 'GB', 'GC'의 경우 일반적으로 확장이 됨을 인지하였다. 그리고, 'GC'는 문자 'n'을 사용해서 일반화시키기도 하였다.

영재학급 학생들 4명은 주어진 힌트를 통해 문제 해결에 필요한 정리를 발견하였고(B1), 발견된 정리를 사용해서 문제를 해결하였다(B2). 'GA'을 제외한 3명의 학생들은 해결된 문제를 증명하였다(B3). 대부분의 영재학급 학생들은 발견된 정리를 활용하여 문제를 해결함은 물론 해결 과정의 오류도 연역적으로 판단하여 해결하는 모습이 관찰되었다. 이는 선분의 등분할 작도가 수행하고 증명하는 과정에서 연역적 사고를 유도함을 나타낸다.

'GB'와 'GD'는 문제의 조건-선분이 주어져 있다는 것-을 바꾸어 문제 해결의 실마리를 찾아보고자 하였다(D1). 그렇지만 시간적인 제약 등의 이유로 문제 해결 방법을 생각해낸 뒤에는 다른 해결 방법을 생각하려고 하지는 않아서 D2가 관찰되지는 않았다. 예비 검사에서는 일반화의 사고와 발전적 사고가 관찰되지 않았었다. 그러나 본 검사에서는 1차시부터 '탐구'과정을 강조하여 아동들이 증명을 하고난 뒤에는 다른 경우에도 적용이 되는지를 확인했기 때문에 일반화의 사고와 발전적 사고가 관찰이 되었다.

관찰한 모든 학생에게서 F1, F2, F3가 관찰 되었으며 'B', 'C', 'D', 'E'는 증명을 하면서 기호화하였기 때문에 F4가 관찰되었다. 이는 선분의 등분할 작도를 해결하기 위해서 학생들이 기호 사용의 필요성을 알고 있다는 것을 나타내며, 작도 교육은 학생들의 기호화의 사고를 함양시키는 기회가 됨을 의미한다.

힌트를 가장 적게 제공 받은 'GA'에게 수학적 사고가 가장 많이 관찰되지는 않았다. 이

는 힌트를 적게 제공 받았다고 수학적 사고를 많이 하지는 않는다는 뜻이며, 교사의 적절한 지도가 뒷받침 된 힌트는 아동들의 수학적 사고를 많이 함양시킬 수 있음을 의미한다.

V. 결 론

본 연구에서는 초등학생에게 작도를 유의미하게 지도하고 시사점을 제안하기 위해 초등학교 6학년 영재학급 학생들과 일반학급 학생들이 선분의 등분할 작도를 하는 과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석했다. 이러한 연구는 중등에서는 다루어지는 것이 있으나 초등학생을 대상으로는 거의 이루어지지 않고 있으며 작도의 초등에서의 교육이 가능한지를 가늠해보는 논문은 발견하지 못했다. 이런 점에서 본 논문은 초등 기하교육의 새로운 시도로 볼 수 있을 것이다.

선분의 등분할은 국내 교육과정에 소개되지 않았으면서 초등학교 6학년 교육과정상 해결이 가능한 소재이기에 검사문항으로 선정하였으며 다양한 수준의 아동들에게 적용해보기 위해 연구 대상을 초등학교 6학년 영재학급 학생들과 일반학급 학생들로 설정하였다.

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다.

첫째, 초등학교 6학년 영재학급 및 일반학급 학생들이 타당하게 선분의 등분할 작도를 하도록 하기 위한 교수-학습 자료를 개발한다.

둘째, 작도과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석하기 위한 틀을 개발한다.

셋째, 개발된 자료를 적용하여 초등학교 6학년 영재학급 및 일반학급 학생들의 작도과정에서 나타나는 수학적 사고를 분석하고, 초등학교 작도 지도의 시사점을 제안한다.

연구 내용 실천을 위한 연구대상자 선정을 위해 연구자가 근무하는 인천광역시 G초등학교 6학년 1개 학급 28명 및 연구자가 강의하고 있는 G초등학교 영재학급 2개 반 37명의 학생들을 대상으로 수업 및 관찰을 진행하였다.

영재학급 아동들은 단계별 힌트의 제공 정도에 따라 1단계 2명, 2단계 2명, 3단계 3명, 4단계 7명의 학생이 스스로 문제를 해결하였고, 나머지 학생들은 시간이 충분히 지난 뒤에 토의를 통해 문제를 해결하거나 풀이 과정을 이해하였으나 일반학급 학생들은 4단계 힌트를 모두 제공받고도 스스로의 힘으로 해결한 학생이 없었다. 영재학급 학생들의 경우 단계별 힌트를 제공 받은 정도에 따라 4명의 학생을 선정하여 분석하였고, 일반 학급 아동의 경우 유의미한 결과를 보여준 학생들을 선정하여 분석하였다.

초등학교 6학년 영재학급 학생들과 일반학급 학생들을 대상으로 선분의 등분할 작도를 지도하고 수학적 사고를 분석한 결과 얻은 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 6학년 영재학급 학생들은 교사의 적절한 조언이 뒷받침 되면 선분의 등분할 작도를 통해 유추적 사고, 연역적 사고, 발전적 사고, 일반화의 사고, 기호화의 사고와 같은 수학적 사고를 충분히 할 수 있다.

둘째, 일반학급 학생들에게 선분의 등분할과 같은 어려운 작도는 무리가 있지만 현행 교육과정보다 심화된 컴퍼스를 이용한 수직이등분선, 사각형, 마름모, 선분의 연장 등의 작도는 교육이 가능하다.

셋째, 작도 교육을 통해 영재학급 학생들과 일반학급 학생들이 문제 상황을 도식화하고, 문제의 구성요소와 해결과정을 기호화하였다. 학생들은 작도 과정을 설명하기 위해 자연스럽게 기호 사용을 하게 된다. 따라서 작도 교육은 초등학교 6학년 학생들의 기호 사용을

위한 좋은 수단이 될 수 있다.

넷째, 교사의 조언이나 힌트 없이 문제를 해결한 학생이 반드시 많은 수학적 사고를 하는 것은 아니다.

끝으로 본 연구와 관련하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 일반학급과 교육청지정 영재학급에서 제한적으로 이루어졌기 때문에 대학부설 영재학급 등 다양한 수학 영재들의 수학적 사고를 분석하는 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구는 '선분의 등분할 작도'를 지도하기 위해 구성된 교수-학습 자료를 토대로 이루어졌기 때문에 다양한 난이도의 소재를 활용하여 다양한 수준의 학생들의 수학적 사고를 분석하는 연구가 필요하다.

셋째, 본 연구는 수학적 사고를 분석하는데 연구를 국한시켰으므로 이 연구를 바탕으로 수학적 사고를 발달시킬 수 있는 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

강문봉, 강홍규, 김수미, 박교식, 박문환, 서동엽, 송상헌, 유현주, 이종영, 임재훈, 정동권, 정은실, 정영옥 (2005). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김명자, 신항균 (2009). 일반학급에서의 초등 수학 영재아 지도 방안 연구. 한국초등수학교육학회지, 13(2), 163-192.

김설한, 정진우, 김효남 (1998). 초등학교 학생들의 귀납-연역적 추론 능력과 정신 용량 및 보속 오류와의 관계. 한국초등과학교육학회지, 1(1), 47-60.

김유진 (2007). 현실적 맥락을 활용한 수학화 학습이 아동의 수학적 사고에 미치는 효과 -초등학교 5학년 도형 영역을 중심으로-. 한국초등수학교육학회지, 11(2), 99-115.

박명희, 신경희 (2006). Clairaut의 <기하학 원론>에 근거한 7-나 단계 작도단원 자료 개발과 적용에 관한 연구. 한국수학사학회지, 19(4), 117-132.

박윤범, 박혜숙, 권혁천, 육인선 (2001). 중학교 수학 7-나, 8-나. 서울: (주)대한교과서.

송상헌, 장혜원, 정영옥 (2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례분석. 수학교육학연구, 16(4), 327-344.

이신자 (2009). 초등학교 4학년 학생의 수학 문제해결에서 나타나는 유추적 사고 과정 분석. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이용률, 성현경, 정동권, 박영배 공역 (1992). 수학적인 생각의 구체화. 서울: 경문사

이환철, 허난, 장미숙 (2009). 수학적 사고력 신장 측정 방안 마련을 위한 기초 연구. 수학교육학논총, 36, 89-102.

조완영, 정보나 (2002). 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업사례 분석. 학교수학, 4(4), 141-146.

최종현 (2004). 주제 탐구형 수학 영재 교수-학습 자료 개발에 관한 연구. 석사학위논문, 경인교육대학교.

한인기 (1999). 작도 문제의 해결 방법. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 9, 153-164.

Smith, D. E. (1923). *Essentials of plane geometry*. New York: Ginn and company.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

<Abstract>

Mathematical Thinking of Sixth-Grade Gifted · Normal Class Students in the Equal Division Process of Line Segments

Yim, Youngbin[3] ; & Ryu, Heuisu[4]

In the elementary school mathematics textbooks of the 7th national curriculum, just simple construction education is provided by having students draw a circle and triangle with compasses and drawing vertical and parallel lines with a set square.

The purpose of this study was to examine the mathematical thinking of sixth-grade elementary school students in the construction process in a bid to give some suggestions on elementary construction guidance.

As a result of teaching the sixth graders in gifted and nongifted classes about the equal division of line segments and evaluating their mathematical thinking, the following conclusion was reached, and there are some suggestions about that education:

First, the sixth graders in the gifted classes were excellent enough to do mathematical thinking such as analogical thinking, deductive thinking, developmental thinking, generalizing thinking and symbolizing thinking when they learned to divide line segments equally and were given proper advice from their teacher.

Second, the students who solved the problems without any advice or hint from the teacher didn't necessarily do lots of mathematical thinking.

Third, tough construction such as the equal division of line segments was elusive for the students in the nongifted class, but it's possible for them to learn how to draw a perpendicular at midpoint, quadrangle or rhombus and extend a line by using compasses, which are more enriched construction that what's required by the current curriculum.

Fourth, the students in the gifted and nongifted classes schematized the problems and symbolized the components and problem-solving process of the problems when they received process of the proble. Since theythe urally got to use signs to explain their construction process, construction education could provide a good opportunity for sixth-grade students to make use of signs.

Keywords: equal division process of line segments, geometrical construction, mathematically thinking

논문접수: 2011. 07. 05
논문심사: 2011. 07. 08
게재확정: 2011. 08. 02

3) loveace-bin@hanmail.net
4) hsryu@ginue.ac.kr