

論文

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2011.39.9.805>

Nonlinear PSE를 이용한 경계층의 비선형 안정성 해석

박동훈*, 박승오**

Nonlinear Stability Analysis of Boundary Layers by using
Nonlinear Parabolized Stability Equations

Dong-hun Park* and Seung O Park**

ABSTRACT

Nonlinear Parabolized Stability Equations(NSPE) can be effectively used to study more throughly the transition process. NPSE can efficiently analyze the stability of a nonlinear region in transition process with low computational cost compared to Direct Numerical Simulation(DNS). In this study, NPSE in general coordinate system is formulated and a computer code to solve numerically the equations is developed. Benchmark problems for incompressible and compressible boundary layers over a flat plate are analyzed to validate the present code. It is confirmed that the NPSE methodology constructed in this study is an efficient and effective tool for nonlinear stability analysis.

초 록

비선형 포물형 안정성 방정식(Nonlinear Parabolized Stability Equations, NPSE)은 보다 전체적인 천이 과정 연구에 효과적으로 사용될 수 있다. NPSE는 천이 과정에서 비선형 구간의 안정성을 직접 수치 모사(Direct Numerical Simulation, DNS)에 비해 적은 계산 비용을 사용하여 효율적으로 해석 할 수 있다. 본 연구에서는 일반 좌표계에서의 NPSE를 구성하고, 수치 계산을 위한 코드를 개발하였다. 코드의 검증을 위해 비압축성 및 압축성 평판 경계층에서의 벤치마크 문제들을 해석하였다. 본 연구의 NSPE 해석 기법이 비선형 안정성 연구에 효율적이고 효과적인 방법임을 확인하였다.

Key Words : Nonlinear Stability(비선형 안정성), Parabolized Stability Equation(포물형 안정성 방정식), Boundary Layer(경계층)

1. 서 론

층류에서 난류로의 경계층 천이 현상은 항력 및 열전달과 같은 공기역학적 특성과 밀접한 관련이 있기 때문에, 실용적 측면에서 관심의 대상

이 될 뿐만 아니라 다양한 분야에서 공학적 응용 가능성을 가진다. 항공기, 발사체, 유도무기, 터빈 블레이드 등 천이유동을 포함하는 공학적 대상의 설계 및 제어를 통한 성능 향상을 위해서는 천이의 원인에 대한 이해가 선행되어야 한다. 하지만 오랜 기간 이론적, 실험적, 수치적 연구가 이루어져 왔음에도 불구하고, 문제의 복잡성과 관련 파라미터의 다양성으로 인해 천이 현상은 완전히 규명되지 못하고 있다.

천이는 발생 과정의 특성에 따라 자연 천이와

† 2011년 4월 25일 접수 ~ 2011년 8월 18일 심사완료

* 정회원, KAIST 항공우주공학과 대학원

** 정회원, KAIST 항공우주공학과

교신저자, E-mail : sopark@kaist.ac.kr

대전 유성구 대학로 291번지

바이패스 천이로 분류되는데, 고고도와 같이 작은 교란 환경에서 발생하는 자연 천이는 메커니즘에 따라 다시 세분되어진다[1-2]. 발생 과정은 일반적으로 교란이 경계층으로 유입되는 receptivity[3], 미소 교란이 독립적으로 성장하는 선형 증폭 단계, 비선형 증폭 및 이어지는 붕괴 단계(breakdown stage)를 거치게 된다.

천이 초기 단계에서 교란간의 비선형 상호작용을 무시할 수 있는 경우에는 선형 안정성 이론(linear stability theory, LST)[4-5]이 주로 이용된다. LST는 오랜 기간의 연구들을 통해 그 타당성과 실용성이 검증되었다. 천이 후반부의 비선형 과정은 교란의 선형 증폭 단계와 최종 붕괴 단계 사이를 연결하는 과정이기 때문에 이론 연구에 있어 중요한 부분이다. 처음에는 해석적 접근이 가능한 매우 단순화된 모델 문제에 대해 제한적으로 연구되었으나, 점차 수치적 접근을 통해 실제적 문제들로 확대되었다[6-7]. 비선형 안정성에 대한 이론적 연구 방법으로는 포물형 안정성 방정식(Parabolized Stability Equation, PSE)이 대표적이다. PSE는 선형 안정성을 전진(marching) 계산을 통해 효율적으로 해석할 수 있을 뿐 아니라, 비선형 항을 포함시켜 비선형 안정성 해석도 수행할 수 있다[8-9]. 최근에는 DNS를 통해 이론적 결과들을 검증하고, 비선형 안정성에 대한 이해를 높였다[10-13]. 하지만 DNS를 이론 연구 방법으로 사용하기에는 많은 계산시간이 요구되기 때문에 실용성이 떨어진다.

현재 비선형 안정성 연구에 가장 현실적인 접근 방법은 NPSE라 할 수 있다. 향후 국내의 고속 비행체, 장거리 유도무기 개발 등에서 천이 관련 이론적 기반이 요구됨을 감안할 때, 비선형 안정성 해석 능력의 확보 또한 필연적이라 할 수 있다. 본 연구에서는 NPSE 해석 기법을 확보하고, 이로부터 경계층의 비선형 안정성 특성을 해석 및 검증하고자 하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 서론에 이어 본론에서는 NPSE의 공식화(formulation), 수치기법 및 해석방법이 설명된다. 결과 및 해석에서는 비압축성 경계층에서 Tollmien-Schlichting(T-S) 파의 비선형 안정성과 subharmonic 2차 불안정성 그리고 초음속 경계층에서 Mack's 2차 모드의 비선형 안정성과 경사 붕괴(oblique breakdown)에 대한 해석 및 검증이 각각 소개된다. 또한 파라미터 연구로의 적용 예를 소개한 후 결론이 제시된다.

II. 본 론

2.1 비선형 포물형 안정성 방정식

PSE는 Bertolotti[14]에 의해 처음 제안되었으며 선형 안정성 이론[4-5]이나 다중 스케일 방법(multiple scale method)[15]에 비해 향상된 선형 안정성 해석 뿐 아니라 비선형 안정성 해석도 가능하다[16-17]. PSE는 유동의 비평행 효과를 고려할 수 있으며, 선형 안정성 방정식과 같이 고유치 문제[18]로 귀결되는 국소적 해석이 아닌 미분방정식을 전진 계산하기 때문에 효율적이다. 이와 같은 장점 때문에 PSE는 1차 불안정성, 2차 불안정성 및 비선형 과정[19-21] 연구 등에 널리 이용되고 있으며 그 타당성이 입증되었다[11-13].

PSE는 교란 방정식을 주유동 방향에 대해 포물화 한 편미분 방정식으로써 유도 과정이나 적용하는 가정에 따라 얻어지는 최종 식은 유일하지 않고, 개념적으로 포물화 된 교란 방정식들을 통틀어 일컫는다. 본 연구의 NPSE 방정식 및 안정성 해석 과정은 다음과 같다.

2.1.1 NPSE 지배방정식

본 연구에서는 Chang과 Malik이 수행한 일련의 연구들[9,20,22]과 유사하지만, 일반 좌표계의 개념을 적용하여 공식화 하였다. 기존의 연구들은 직교 좌표계 또는 직교 곡선적 좌표계에서의 지배방정식을 기초로 하지만 본 연구에서는 일반 좌표계로의 변환을 적용하는 방식을 사용한다. 기존 방법들은 평평하거나 볼록한 표면과 같이, 직교 곡선적 좌표계 설정이 용이한 경우로 해석 범위가 제한된다. 이에 반해 본 연구의 방법은 오목한 표면이나 hump와 같은 형상에도 좌표계를 직교성에 대한 제약 없이 간단히 정의하여 해석할 수 있는 유연성을 갖는다. 일반 좌표계를 직교 곡선적 좌표계로 정의하게 되면 두 접근 방법은 동일하게 회귀된다.

압축성 유동의 무차원 지배방정식에서 모든 변수들을 평균유동과 교란의 합으로 표현(e.g. $u = U + u'$)하고 전개 한 후, 독립적으로 성립하는 평균 유동에 대한 방정식을 빼고 정리하면, 밀도, 속도 및 온도 교란 $\phi = \{\rho', u', v', w', T'\}^T$ 을 독립변수로 하는 직교좌표계에서의 전체 교란 방정식을 얻는다. x_1, x_3 는 각각 주유동 방향 및 폭 방향, x_2 는 표면에서부터 멀어지는 방향으로의 좌표인 일반 좌표계를 고려해 연쇄 법칙을 사용하여 변환하면 식 (1)로 표현되는 교란 방정식을 얻는다. 앞서 설명한 바 있듯이 평판의 경우에는 일반좌표계가 직교좌표계와 동일해진다. 무

차원화에 사용하는 기준 길이는 경계층 길이 스케일을 사용한다.

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \bar{B} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \bar{C} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \bar{D} \phi \\ & - \bar{V}_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \bar{V}_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - \bar{V}_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \\ & - \bar{V}_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \bar{V}_{23} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} - \bar{V}_{31} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} = F^n \end{aligned} \quad (1)$$

좌변은 선형 항들이고, $\bar{\Gamma}, \bar{A}, \bar{B}, \dots, \bar{V}_{31}$ 들은 5×5 행렬들으로써 원소들은 평균 유동 정보를 포함한다. F^n 는 교란의 비선형 항들을 나타내며, LPSE에서는 충분히 작다는 가정 하에 무시된다. 비선형 항 F^n 은 Appendix에 나타내었다.

폭방향에 대해 독립적인 평균 유동장의 경우, NPSE에서는 교란 ϕ 가 시간과 폭 방향으로 주기성을 갖는 푸리에 모드들의 합으로 이루어져 있다고 가정하여, 빠르게 진동하는 파 부분과 진폭 분포의 의미를 가지는 형상함수(shape function) ψ 의 조합으로 식 (2)와 같이 표현한다.

$$\phi = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \psi_{mn}(x_1, x_2) A_{mn}(x_1) \times \exp[i(n\beta x_3 - m\omega t)] \quad (2)$$

$$\text{where } A_{mn}(x_1) = \exp\left[i \int_{x_0}^x \alpha_{mn}(\bar{x}_1) d\bar{x}_1\right]$$

여기서 β, ω 는 각각 폭 방향 및 시간에 대한 기본 파수와 주파수이며 α_{mn} 은 각 모드 (m, n) 에 대한 주유동 방향의 파수를 의미한다. 이상적으로는 무한개 모드의 합으로 교란을 표현해야 하지만, 실질적으로는 이를 유한개로 제한(truncation)하여 해석을 수행한다. M 과 N 은 해석에 고려하는 교란의 모드 수이다.

교란 표현 (2)를 교란 방정식 (1)에 적용한 후, 각 모드 (m, n) 에 해당하는 항들끼리 모은다. 주유동 방향으로의 형상 함수 변화가 $O(1/R)$ 라는 가정 하에 $O(1/R^2)$ 이하의 작은 항들을 무시하면 방정식이 포물화 되어 각 모드의 형상 함수 $\psi_{mn} = (\hat{\rho}_{mn}, \hat{u}_{mn}, \hat{v}_{mn}, \hat{w}_{mn}, \hat{T}_{mn})^T$ 에 대한 편미분 방정식계 (3)을 얻을 수 있다. 여기서 R 은 기준 길이를 기초로 한 레이놀즈수으로써 $\sqrt{Re_x}$ 으로 정의된다. 식 (3)은 복소 변수에 대한 편미분방정식으로써, 물리 공간에서의 교란 방정식 (1)을 시간과 폭방향에 대해 스펙트럼 영역으로 푸리에 변환한 것과 개념적으로 동일하다.

$$\begin{aligned} & \hat{D}_{mn} \psi_{mn} + \hat{A}_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x_1} + \hat{B}_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x_2} \\ & = V_{22} \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial x_2^2} + F_{mn}/A_{mn} \end{aligned} \quad (3)$$

소스 항으로 기능하는 F_{mn} 은 전체 비선형 항 F^n 의 푸리에 성분이며, 비선형 항 F^n 에 2차원 푸리에 변환을 적용하면 F_{mn} 을 얻는다.

$$F^n = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N F_{mn} e^{i(n\beta x_3 - m\omega t)} \quad (4)$$

식 (3)은 x_2 의 양 경계에서 경계조건이 필요하다. 표면($x_2=0$)에서는 모든 푸리에 모드 교란이 경계조건 (5)를 만족해야 한다.

$$\hat{u}_{mn} = \hat{v}_{mn} = \hat{w}_{mn} = \hat{T}_{mn} = 0 \quad (5)$$

자유류($x_2 \rightarrow \infty$)에서는 (0,0) 모드인 평균 유동 변형(mean flow distortion, MFD)에 대한 방정식을 제외하고 표면에서와 동일한 경계조건 (5)를 적용한다. 하지만 평균 유동 변형에 대해서는 교란 상호작용에 의한 변위 두께 변화를 보상하기 위해 경계조건 (6)을 적용한다.

$$\hat{u}_{1,00} = \frac{\partial \hat{u}_{2,00}}{\partial x_2} = \hat{u}_{3,00} = \hat{T}_{00} = 0 \quad (6)$$

첫 번째 아래첨자는 반변(contra-variant) 속도 성분을 나타낸다. NPSE 해석에서는 모든 모드 (m, n) 에 대해 방정식 (3) 및 경계조건 (5-6)을 만족하는 ψ_{mn} 과 α_{mn} 의 조합들을 결정하게 된다. 식 (2)의 가정에 의하면 ψ_{mn} 과 α_{mn} 은 모두 x_1 에 의존성을 가지기 때문에, 이들의 조합이 유일하지 않다. PSE의 기본 가정($\partial \psi_{mn} / \partial x_1 \sim O(1/R)$)에 충실한 해로 조합을 결정 하기위해 정규화 조건(normalization condition)을 고려한다.

$$\alpha_{mn}^{new} = \alpha_{mn}^{old} - i \frac{\int_0^\infty \sum_k \left(\hat{u}_{k,mn} + \frac{\partial \hat{u}_{k,mn}}{\partial x_1} \right) dx_2}{\int_0^\infty \sum_k |\hat{u}_{k,mn}|^2 dx_2} \quad (7)$$

본 연구에서는 식 (7)의 정규화 조건을 사용해 α_{mn} 를 갱신하여 수렴할 때 까지 반복 계산을 수행한다. 수렴여부는 모든 모드에 대해 갱신을 통한 α_{mn} 변화가 10^{-8} 이하가 되는 경우를 수렴으로 판단하였다.

2.1.2 수치기법

식 (3)의 NPSE는 (ξ, η) 의 계산 격자로 변환하

여 계산한다. 계산 격자계로의 변환은 경계층 두께에 걸쳐(x_2 방향으로) 격자분포를 일정한 조밀도로 하여 해석 가능하게 한다. 변환을 수행하면 식 (3)은 식 (8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{mn}\psi_{mn} + \tilde{A}_{mn}\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial\xi} + \tilde{B}_{mn}\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial\eta} \\ = \tilde{V}_{m}\frac{\partial^2\psi_{mn}}{\partial\eta^2} + F_{mn}/A_{mn} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 유한 차분법을 이용하여 차분화 하면 대수 방정식 계를 얻을 수 있다. η 방향으로서는 4차 정확도의 중앙 차분법, 주유동 방향(ξ)으로는 1차 또는 2차 정확도의 후방 차분법을 사용하여 차분한다. PSE는 주유동 방향으로 포물형이지만 여전히 일부 타원형 성질이 잔재한다. 이러한 수학적 특성은 ξ 방향으로의 격자간격이 일정 수준 이하가 되면 전진 계산시 수치적 불안정성을 발생시킨다[23-24]. 이를 완화하기 위한 방법으로 $\partial\hat{p}/\partial x_1$ 항을 억제하는 기법을 사용한다[9,20].

비선형 항 F_{mn} 는 매 반복 계산마다 전체 비선형 항 F^n 을 물리적 공간에서 계산한 후, 스펙트럼 도메인으로 푸리에 변환하여 추출한다[9,20,22]. 복소 변수에 대한 2차원 푸리에 변환은 FFTPACK[25]으로 수행한다. 파수중첩오차(aliasing)에 의한 높은 모드 정보가 간섭되지 않도록 하기 위해 dealiasing을 적용한다.

평균 유동이 2차원인 경우, 음수 모드들에 대해 대칭 조건을 적용하면 계산 비용을 줄일 수 있다. 대칭 조건은 NPSE 방정식 (3)의 수학적 특성에 따라 식 (9)로 주어진다. 여기서 위첨자 †는 켈레복소수를 의미한다.

$$\begin{aligned} \alpha_{m,-n} &= \alpha_{m,n} \\ \alpha_{-m,n} &= \alpha_{-m,-n} = -\alpha_{m,n}^\dagger \\ \psi_{m,-n} &= (\hat{\rho}_{m,n}, \hat{u}_{1m,n}, \hat{u}_{2m,n}, -\hat{u}_{3m,n}, \hat{T}_{m,n})^T \\ \psi_{-m,n} &= (\hat{\rho}_{m,n}^\dagger, \hat{u}_{1m,n}^\dagger, \hat{u}_{2m,n}^\dagger, -\hat{u}_{3m,n}^\dagger, \hat{T}_{m,n}^\dagger)^T \\ \psi_{-m,-n} &= (\hat{\rho}_{m,n}^\dagger, \hat{u}_{1m,n}^\dagger, \hat{u}_{2m,n}^\dagger, \hat{u}_{3m,n}^\dagger, \hat{T}_{m,n}^\dagger)^T \end{aligned} \quad (9)$$

PSE의 전진 계산을 위해서는 초기 조건이 요구된다. 초기 조건으로 안정성 방정식을 국소적으로 만족하는 해를 사용한다. 본 연구에서는 LPSE에서 주유동 방향 미분항을 무시한 방정식의 해를 사용한다. 이것은 α_{mn} 을 고유치로 하는 행렬 비선형 고유치 문제로 귀결 되는데, 고유치 문제는 선형 안정성 이론에서와 동일한 수치적 방법으로 α_{mn} 와 ψ_{mn} 을 계산한다[26]. 복소 변수의 행렬 고유치 문제는 EISPACK[25]을 사용

하여 계산한다. 유동의 비평행성이 크거나 표면 곡률이 큰 경우에는 국소 안정성 해석 결과로 얻은 초기 조건이 PSE의 해로 적용해 가는 과도 구간(transient region)이 나타남이 잘 알려져 있다[19,27].

2.1.3 NPSE 해석 과정

PSE는 평균 유동 데이터를 계수로 하는 방정식이다. 따라서 경계층의 속도 및 온도에 대한 평균 유동 데이터가 요구된다. 본 연구의 NSPE 코드 검증을 위한 평판 경계층 해석들에서는 층류 상사해를 평균 유동 데이터로 사용한다.

그림 1은 NPSE 과정을 개략적으로 나타낸다. 가장 먼저, 해석을 시작하고자 하는 위치에서 초기 조건을 계산한다. 초기조건에서부터 하류 방향으로 전진 계산을 해나가는데, 각 위치에서 모든 모드에 대해 수립된 α_{mn} 과 ψ_{mn} 를 얻기 위한 반복 계산을 수행한다. 반복 계산을 위한 α_{mn} 과 ψ_{mn} 의 초기값은 이전 위치에서의 값으로 추측한다.

α_{mn} 과 ψ_{mn} 들을 사용하여 식 (2)에 따라 비선형 항 F^n 을 계산하고, 식 (4)에 의해 푸리에 변환으로 F_{mn} 을 얻는다. 각 모드에 대해 식 (8)으로 ψ_{mn} 을 다시 계산한다. 새로 얻어진 ψ_{mn} 을 식 (7)에 적용하여 α_{mn} 를 갱신한다. 식 (9)에 따라 대칭 모드들을 갱신한다. 모든 모드에 대한 결과가 수립될 때까지 일련의 과정을 반복한다. 수립된 해로 판별되면 주유동 방향의 다음 위치로 전진한다.

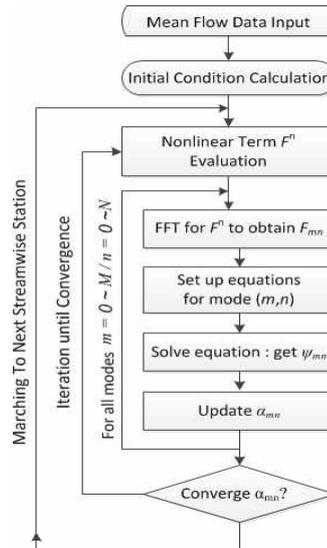


그림 1. Procedure of NPSE analysis

2.2 결과 및 해석

본 연구에서 개발된 코드의 검증을 위한 벤치마크 문제를 선정하고 해석을 수행한 후, 기존 문헌의 결과들과 비교하였으며, 검토한 문제에 대한 자세한 서술은 아래와 같다.

2.2.1 T-S 파의 비선형 안정성

기초 벤치마크 문제로 주로 이용되는 비압축성 경계층에서 2차원 교란($\beta=0$)의 비선형 안정성 해석을 수행하였다. 비압축성 경계층에서의 2차원 불안정 교란은 잘 알려져 있는 T-S 파이다. 평균 유동은 Blasius 분포이며, 비평행 효과를 모두 포함하기 위해 상사 변환의 정의에 따른 속도 성분 V 도 평균 유동 데이터에 포함한다.

해석 시작위치 $R = \sqrt{Re_x} = 400$ 에서 기본 주파수가 $F=86$ 이고 최대 RMS 진폭 u_{max} 의 크기 A_0 가 0.25%인 T-S파가 하류로 전파해 감에 따른 비선형 성장을 해석하였다. 무차원 주파수 F 는 식 (10)으로 정의된다.

$$F = \frac{2\pi f^* \nu_e^*}{(u_e^*)^2} \times 10^6 \quad (10)$$

여기서 *는 물리적 값을 나타낸다. 해석에 이용한 모드의 수 M 은 5이다. 2차원 교란 해석을 수행하기 때문에 $n=0$ 인 모드들만을 고려한다. 그림 2는 기본 주파수(1F) 교란인 (1,0)모드와 first harmonic(2F)인 (2,0)모드, 그리고 평균 유동 변형(0F)인 (0,0)모드들의 u_{max} 크기 변화를 보여준다. 기본 주파수에 대한 선형 PSE(LPSE) 결과를 함께 나타내었다. 선형 안정성에 의한 증폭과 비교했을 때, 비선형 안정성에 의한 증폭이 더 크게 나타남을 알 수 있다. 교란의 크기가 작은 초기에는 비선형 상호작용 역시 작아서 LPSE와 NPSE의 결과가 일치하지만, 진폭이 일정 이상 커지면 비선형 안정성이 더 큰 증폭을 발생시킨다. 비선형 효과가 나타나기 시작하는 기본 모드의 진폭 크기는 약 1.5%로 관찰되며, 이는 기존의 연구로부터 알려진 사실과 잘 일치한다[20]. 비선형 상호작용에 의해 두 배 주파수의 교란(2F)과 평균 유동 변형(0F)의 발생을 알 수 있다. 그림 2에서 본 연구의 계산 결과가 기존의 Chang et al.[9], Bertolotti[14], Herbert[19]의 NPSE 및 Joslin et al.[10]의 DNS 결과들과 잘 일치함을 알 수 있다.

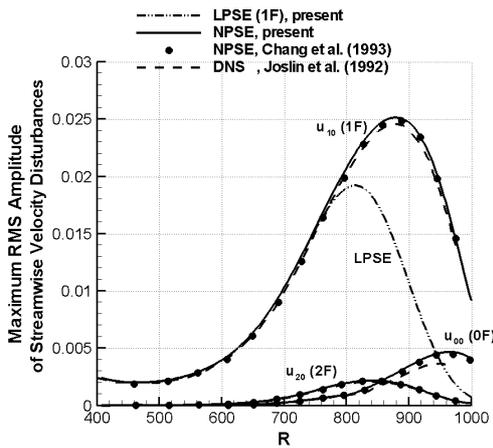


그림 2. Linear and nonlinear evolution of T-S wave with $F=86$ and $A_0=0.25\%$ at $R=400$

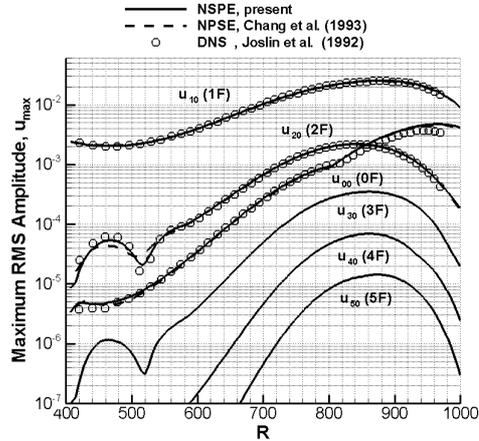


그림 3. Nonlinear evolution of T-S wave with $F=86$ and $A_0=0.25\%$ at $R=400$

그림 3에는 그림 2의 진폭을 로그 스케일로 나타내어 비교 하였다. 본 연구의 NPSE 해석 결과가 기존 결과와 잘 일치함을 확인 할 수 있다. 계산된 고주파 모드들(3F~5F)의 진폭 변화를 추가로 나타내었다. 비선형 상호작용에 의해 높은 주파수의 교란들도 일제히 증폭됨을 알 수 있다. $R=800$ 근방에서 평균 유동 변형(0F) 크기의 변화 경향이 바뀌는 것은 u_{max} 의 위치가 다른 peak로 옮겨가기 때문이며, 기존의 해석들에서도 공통적으로 나타나는 특징이다[10-11,15,20].

그림 4는 $R=883$ 에서 경계층 내의 교란 진폭 분포를 모드별로 보여준다. 본 연구의 NPSE 해석 결과가 기존 문헌의 DNS 및 NPSE 결과들과 잘 일치함을 다시 확인 할 수 있다[11]. 평균 유동 변형 모드의 진폭 분포에서 DNS와 NPSE 결과가 일정 차이를 보이는 이유는 이 모드에 대해

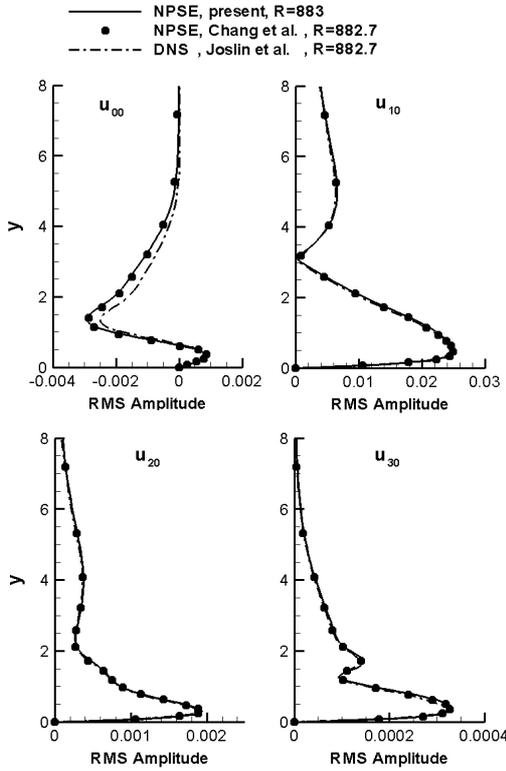


그림 4. RMS amplitude distribution at R=883

자유류 경계조건이 다르게 적용되기 때문이다. 그림 2부터 4의 결과들로부터 본 연구의 NPSE 해석 코드가 비압축성 경계층에서 T-S 파의 비선형 안정성에 대한 적절한 해석 능력을 갖추고 있다고 판단 할 수 있다.

2.2.2 Subharmonic 2차 불안정성

이어서 3차원 교란($\beta \neq 0$)을 포함한 해석 능력을 검증하기 위해 2차 불안정성 해석을 수행하였다. 비압축성 경계층에서 2차 불안정성은 크게 fundamental 불안정성과 subharmonic 불안정성, detuned 불안정성으로 분류된다[28]. 증폭된 2차원의 1차 파(primary wave)가 존재할 때, 파라미터적 불안정성(parametric instability)에 의해 3차원의 2차 파(secondary wave)가 급격하게 증폭되어, 폭발적으로 주기성을 갖는 3차원 유동구조를 일으키는 원인으로 잘 알려져 있다[28]. subharmonic 불안정성은 2차 파의 주파수가 1차 파 주파수의 절반인 경우에 해당한다[29-30].

해석 조건은 Chang[22]이 LSTRAC을 사용한 사례 연구(case study)의 조건과 동일하게 하였다. 1차 파는 $F=124$ 인 T-S 파로 (2,0) 모드이고 2차 파는 $F=64$, $R=390$ 에서 $\beta=\pm 0.14$ 인 한

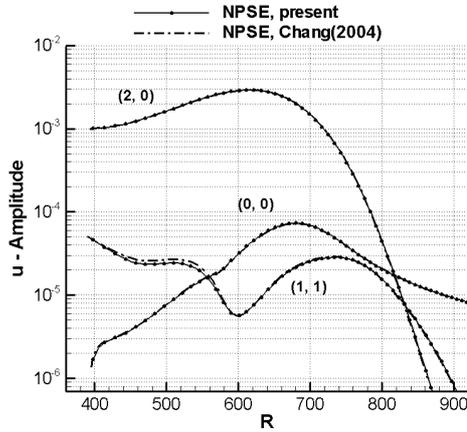


그림 5. Streamwise velocity disturbance amplitude of subharmonic secondary instability; A0 of primary wave is 0.1%

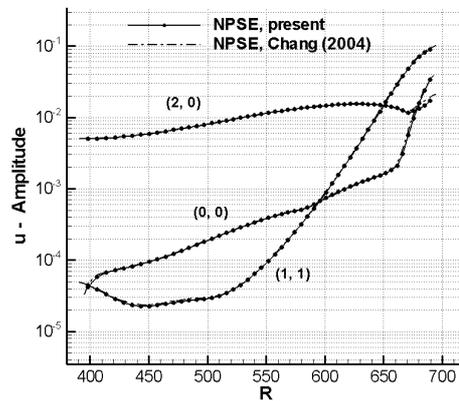


그림 6. A0 of primary wave is 0.5% Case

쌍(pair)의 경사파(oblique wave)로써 (1,1)과 (1,-1)의 subharmonic 모드로 구성된다. 해석 시작 지점은 $R=390$ 이며 2차 파의 초기 진폭은 0.005%이다. 그림 5는 1차 파의 초기 진폭이 0.1%인 경우, $M=4$, $N=4$ 로 수행한 해석 결과에서 주요 모드들의 진폭 변화를 보여준다. 다른 조건들은 동일하게 유지하고, 1차 파의 초기 진폭만을 0.5%로 크게 설정하여 해석한 결과는 그림 6에 나타내었다. 두 경우 모두 Chang[22]의 해석결과를 함께 나타내었으며 이들이 서로 잘 일치함을 확인 할 수 있다.

그림 5와 6으로부터 subharmonic 2차 불안정성의 특성을 확인 할 수 있다. 모두 초기에는 선형 안정성에 의해 1차 파는 증폭되고 2차 파는 감쇠된다. 1차 파가 증폭 되면서 비선형 상호작용에 의해 2차 파의 감쇠 경향이 증폭으로 전환

된다. 1차 파의 초기 진폭이 작은 경우(그림 5)에는 진폭이 급격한 비선형 증폭을 발생 시킬 만큼 충분하지 않아 하류로 가면서 모두 감쇠됨을 볼 수 있다. 하지만 1차 파의 초기 진폭이 큰 경우(그림 6)는 2차 파의 급격한 증폭을 유발시키기에 충분한 성장이 이루어져 모든 모드들이 급격한 비선형 증폭을 겪게 된다. 이는 3차원 교란인 2차 파가 존재해야 할 뿐 아니라, 우선적으로 2차원의 1차 파가 충분히 증폭되어야 비선형 증폭에 이은 붕괴에 도달 할 수 있음을 확인시켜 준다.

2.2.3 초음속 경계층의 Mack's 2차 모드

비압축성의 경우와는 달리 압축성의 경우에는 마하수가 증가함에 따라 에너지 방정식이 주요하게 관여하고, 온도 교란의 비중이 점차 증가한다. 해석 코드의 완전한 검증은 위해서는 압축성 해석에 관여하는 부분들이 정상적으로 기능하는지 확인이 필요하다. 벤치마크 문제로 많이 이용되는 마하수 4.5 평판 경계층에서 Mack's 2차 모드에 대한 비선형 안정성을 해석하였다. Mack's 2차 모드는 고마하수의 초음속 경계층에서 가장 큰 증폭을 나타내는 2차원 교란으로써, 오랜 기간 동안의 안정성 연구들로부터 그 근원 및 특성이 매우 잘 알려져 있다[2,4].

$F=220$, 온도 교란의 초기 진폭이 10%인 Mack's 2차 모드를 $R=700$ 에서부터 $M=5$, $N=0$ 으로 해석하였다. 표면에서의 평균 유동의 온도는 단일 조건을 적용하였다. 그림 7은 레이놀즈수에 따른 주요 모드의 최대 온도 교란의 크기를 나타내었으며, 주요 모드에 대한 Pruett et al.[11]의 NPSE 및 DNS 결과를 함께 나타내었다. 기존의 결과들과 잘 일치함을 확인 할 수 있으며, 초기의 높은 모드들에서 관찰되는 일정 차

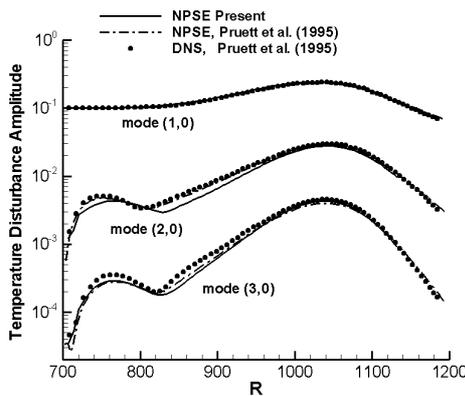


그림 7. Maximum amplitude of temperature fluctuation

이는 사용한 초기 조건 차이에 따른 과도 구간의 차이이다. 그림 7의 결과로부터 해석 코드의 압축성 해석능력을 확인 할 수 있다.

2.2.4 초음속 경계층에서의 경사 붕괴

마하수 4이하에서 가장 큰 불안정성을 나타내는 교란은 점성 불안정성에 근원을 둔 first 모드 중에서 3차원($\beta \neq 0$)의 경사파임이 안정성 이론으로부터 잘 알려져 있다[4-5]. 이에 근거하여 한 쌍의 경사파가 1차 파로써 증폭되고 이들 자체의 비선형 상호작용이 빠른 붕괴 및 천이를 유발한다는 경사 붕괴 메커니즘이 제안되었다[20,31]. 높지 않은 마하수의 초음속 경계층에서, 경사 붕괴는 subharmonic 붕괴 및 fundamental 붕괴와 같은 2차 불안정성에 의한 붕괴보다도 천이를 발생시킬 가능성이 높은 메커니즘으로 주목 받고 있다[13,24].

경사 붕괴의 해석에는 3차원 교란의 포함에 따른 폭방향 방정식과 압축성 해석에 따른 에너지 방정식이 결합되어 모두 관여한다. 검증의 마지막 단계로써 경사 붕괴 해석을 수행하였다. 마하수 2, 단일 조건의 평판 경계층에서 $f^* = 12kHz$, $\lambda_z^* = 2\pi/\beta^* \pm 8mm$ 이고 초기 진폭이 1%인 한 쌍의 경사파를 $R=1500$ 부터 해석하였다. 그림 8은 $M=4$, $N=4$ 로 하여 얻은 계산 결과에서 모든 모드의 주유동 방향 속도 진폭들을 보여준다. 기본 모드인 경사파 (1,1)과 주유동 방향 와류 모드 (0,2)에 대한 Chang[22]의 결과를 함께 나타내었으며 두 결과가 잘 일치함을 다시 확인 할 수 있다. 초기에는 기본 모드를 제외한 모든 모드들의 진폭이 매우 작으나, 하류로 갈수록 모두 급격하게 증폭되는 것을 볼 수 있다. 모드들이 일제히 비슷한 수준으로 증폭되는 것은

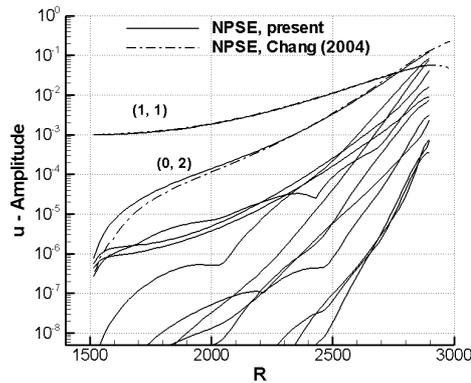


그림 8. Evolution of disturbance amplitude for Mach 2 flat plate under oblique breakdown

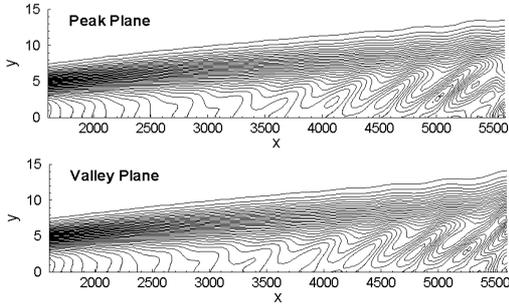


그림 9. Instantaneous spanwise vorticity contours under oblique breakdown

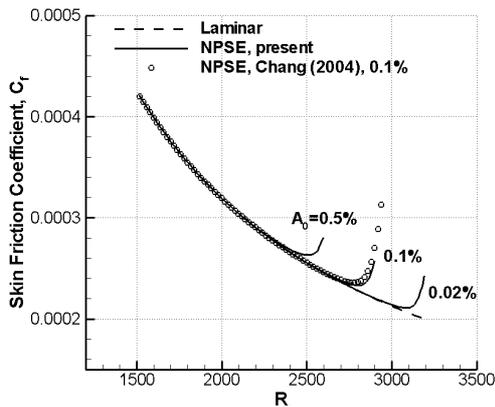


그림 10. Skin friction coefficient versus R under oblique-breakdown

천이과정에서 관찰되는 스펙트럼 broadening에 대한 타당한 설명을 제공해 준다.

스펙트럼 broadening은 그림 9의 폭방향 와류 분포에서도 쉽게 확인할 수 있는데, 하류로 진행하면서 높은 파수 모드들의 증폭에 따른 복잡한 구조가 형성됨을 알 수 있다. 그림 9는 폭 방향으로의 다른 두 위치에서 특정 순간의 폭 방향 와류를 나타낸 것이다.

그림 10은 경사 붕괴에 의해 변형된 평균 유동장의 표면 마찰 계수를 보여준다. 초기에는 층류의 값과 잘 일치하지만 하류로 갈수록 상대적으로 큰 값을 나타내기 시작하고, 그 차이가 점점 커진다. 이것은 평균 유동 변형의 성장을 의미한다. 수렴된 해가 얻어지는 영역의 끝 부분에서는 천이 직전의 전형적인 현상과 같이 마찰계수가 급격히 증가하는 모습을 보인다. 하지만 이후에는 더 이상 수렴된 해가 얻어지지 않는데, 이것은 교란 진폭이 커질수록 수렴된 해를 얻기 어려워지는 NPSE의 기본 성질에 따른 것이다 [22]. 물리적으로는 유한개의 이산화 된 주파수와

파수의 조합만으로는 이후 영역에서의 유동 및 교란 구조를 충분히 분해 할 수 없기 때문이다.

초기 경사파의 진폭이 0.02%, 0.5%인 경우의 해석 결과를 함께 나타내었다. 세 경우를 비교해 보면 초기 진폭이 클수록 붕괴가 상류에서 일어남을 확인 할 수 있으며 이것은 천이에 대한 직관과도 잘 일치한다.

2.2.5 파라미터 연구로의 적용 예

NPSE는 경계층 안정성에 대한 다양한 파라미터 연구에 활용 가능하다. 하나의 예로, 표면 가열 및 냉각이 초음속 경계층의 경사 붕괴에 미치는 영향을 파악하였다. 앞서 다루었던 마하수 2의 평판에서 단일 조건($T_w = T_{ad}$) 대신 표면 온도 T_w 가 각각 $T_w = 1.2T_{ad}$, $T_w = 0.8T_{ad}$ 인 경우를 고려하였다. 동일하게 진폭이 1%이고 $f^* = 12kHz$, $\beta^* = \pm 8mm$ 인 한 쌍의 경사파를 $R = 1500$ 에서의 초기조건으로 하였다.

계산된 표면 마찰 계수를 그림 10의 단일 조건 결과와 함께 그림 11에 나타내었다. 표면 온도가 높은 경우 붕괴가 빠르게 일어나며, 낮은 경우 붕괴가 지연되는 것을 확인 할 수 있다. 이것은 기본 모드인 경사파가 first 모드이기 때문이며, 이 모드가 표면 가열에 의해 불안정해지고 냉각에 의해 안정해지는 특성은 선형 안정성 이론으로부터 잘 알려져 있다[4-5]. 기본 모드의 빠른 선형 증폭은 비선형 상호작용을 보다 상류에서 시작되도록 하며, 반대로 선형 증폭 지연은 붕괴의 지연으로 이어진다.

또한 NSPE는 receptivity 해석[3,33]과 e^N 방법 [34]을 통합하여 천이 지점 예측[35,36]에도 활용 가능하다. 뿐만 아니라 제트 유동의 안정성[37], 제트 유동의 소음 특성 예측[38]을 비롯하여 그 활용성이 크다.

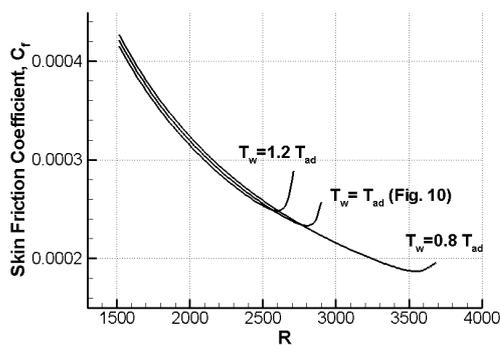


그림 11. Effect of wall temperature on the skin friction coefficient in oblique-breakdown

III. 결 론

본 연구에서는 경계층 비선형 안정성 해석을 위한 NPSE 코드 개발 및 검증을 수행하였다.

비압축성 평판 경계층에서의 T-S 파, subharmonic 2차 불안정성, 마하수 4.5 경계층에서의 Mack's 2차 모드, 마하수 2에서의 경사 붕괴 해석들을 수행하였으며, 기존 문헌 결과들과 정성적, 정량적인 면에서 모두 잘 일치함을 확인하였다. 비선형 상호 작용에 의해 기본 모드의 진폭이 선형 안정성 해석 결과보다 더 크게 증폭되며, 기본 모드의 성장에 따라 다른 모드들도 유도 되어 증폭됨을 확인하였다. 비선형 안정성에 따른 2차 불안정성 및 경사 붕괴 등의 전형적인 특징들을 확인하였다.

본 연구에서 확보한 NPSE 해석 기법은 안정성 문제에 대한 파라미터 연구 및 천이지점 예측에 다양하게 활용될 수 있으며, 국내의 유동 안정성 및 천이 이론 연구의 밑바탕이 될 것으로 판단된다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임 (과제번호 2010-0012834)

참고문헌

- 1) E. Reshotko, "Boundary-Layer Stability and Transition", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol.9, pp. 311-349, 1976.
- 2) A. Fedorov, "Transition and Stability of High-Speed Boundary Layers", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 43, pp. 79-95, 2011.
- 3) W. S. Saric, H. L. Reed, and E. J. Kerschen, "Boundary-Layer Receptivity to Freestream Disturbances", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 34, pp. 291-319, 2002.
- 4) L. M. Mack, "Boundary-Layer Linear Stability Theory", AGARD CP-709, NATO, Belgium, 1984.
- 5) H. L. Reed and W. S. Saric, "Linear Stability Theory Applied to Boundary Layers", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 28, pp. 389-428, 1996.
- 6) J. T. Stuart, "Nonlinear Stability Theory",

- Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol.3, pp.347-370, 1971.
- 7) W. S. Saric, R. B. Carrillo, and M. S. Reibert, "Nonlinear Stability and Transition in 3-D Boundary Layers", *Meccanica*, Vol.33, pp. 469-487, 1998.
- 8) F. P. Bertolotti and T. Herbert, and P. R. Spalart, "Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 242, pp. 441-474, 1992.
- 9) C. L. Chang, M. R. Malik, G. Erlebacher, and M. Y. Hussaini, "Linear and Nonlinear PSE for Compressible Boundary Layers", NASA CR-191537, ICASE Report No. 93-70, 1993.
- 10) R. D. Joslin, C. L. Streett, and C. L. Chang, "Validation of Three-Dimensional Incompressible Spatial Direct Numerical Simulation Code", NASA TP-3205, 1992.
- 11) C. D. Pruett, T. A. Zang, C. L. Chang, and M. H. Carpenter, "Spatial Direct Numerical Simulation of High-Speed Boundary Layer Flows Part I: Algorithmic Considerations and Validation", *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 7, pp. 49-76, 1995.
- 12) L. Jiang, C.-L. Chang, M. Choudhari, and C. Liu, "Instability-wave propagation in boundary-layer flows at subsonic through hypersonic Mach numbers", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 65, pp. 469-487, 2004.
- 13) C. S. J. Mayer, H. F. Fasel, M. Choudhari, and C. L. Chang, "Detailed Comparison of DNS with PSE for Oblique Breakdown at Mach 3", AIAA 2010-4596, 2010.
- 14) Bertolotti, F.P., "Linear and Nonlinear Stability of Boundary Layers with Streamwise Varying Properties", Ph.D.Dissertation, The Ohio State University, 1990.
- 15) N. M. El-Hady, "Nonparallel instability of supersonic and hypersonic boundary layers", *Phys. Fluids A*. Vol. 3, No. 9, pp. 2164-2178, 1991.
- 16) T. Hebert, "Parabolized Stability Equations", AGARD R-793, 1993.
- 17) T. Hebert, "Parabolized Stability Equations", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 29, pp. 245-283, 1997.
- 18) M. R. Malik, "Finite-Difference Solution

of the Compressible Stability Eigenvalue Problem", NASA CR-3584, 1982.

19) C.-L. Chang and M.R. Malik, "Non-Parallel Stability of Compressible Boundary Layers", AIAA 93-2912, 1993.

20) C.-L. Chang and M.R. Malik, "Oblique-mode breakdown and secondary instability in supersonic boundary layers", J. Fluid Mechanics, Vol. 273, pp. 323-360, 1994.

21) M. R. Malik, F. Li, M. M. Choudhari, and C.-L. Chang, "Secondary instability of crossflow vortices and swept-wing boundary-layer transition", J. Fluid Mech, Vol. 399, pp. 85-115, 1999.

22) C.-L. Chang, "Langley Stability and Transition Analysis Code(LASTRAC) Version 1.2 User Manual", NASA TM-2004-213233, 2004.

23) F.Li and M.R.Malik, "On the Nature of PSE Approximation", Theoret. Comput. Fluid Dynamics, Vol. 8, pp. 253-273, 1996.

24) P. Andersson, D. S. Henningson, and A. Hanifi, "On a stabilization procedure for the parabolic stability equations", Journal of Engineering Mathematics, Vol. 33, pp. 311-322, 1998.

25) www.netlib.org/lapack

26) M. R. Malik, "Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability", Journal of Computational Physics, Vol. 86, pp. 376-413, 1990.

27) C.-L. Chang and M. R. Malik, "Compressible Stability of Growing Boundary Layers Using Parabolized Stability Equation", AIAA 91-1636, 1991.

28) T. Herbert "Secondary Instability of Boundary Layers", Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 20, pp. 487-526, 1988.

29) N. M. El-Hady, "Secondary Subharmonic Instability of Boundary Layers With Pressure Gradient and Suction", NASA CR-4112, 1988.

30) Y. S. Kachanov and V. Y. Levchenko, "The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 138, pp. 209-247, 1984.

31) H. Fasel, A. Thumm, and H. Bestek, "Direct numerical simulation of transition in supersonic boundary layer: oblique

breakdown", In Transitional and Turbulent Compressible FLOws, FED 151, pp. 77-92, ASME, 1993.

32) C. S. J. Mayer, D. A. Von Terzi, and H. F. Fasel, "Direct numerical simulation of complete transition to turbulence via oblique breakdown at Mach 3", Journal of Fluid Mechanics, 2011.

33) T. Herbert, "Studies of Boundary-Layer Receptivity with Parabolized Stability Equations", AIAA 93-3053, 1993.

34) A. M. O. Smith and N. Gamberoni, "Transition, Pressure Gradient, and Stability Theory", Rep. No. ES.26388, Douglas Aircr. Co., Inc., 1956.

35) G. Schrauf, T. Herbert, and G. Stuckert, "Evaluation of Transition in Flight Tests Using Nonlinear PSE Analysis", AIAA 95-1801, 1995.

36) C. L. Chang and M. Choudhari, "Boundary-Layer Receptivity and Integrated Transition Prediction", AIAA 2005-0526, 2005.

37) M. R. Malik and C. L. Chang, "Nonparallel and nonlinear stability of supersonic jet flow", Computers & Fluids, Vol. 29, pp. 327-365, 2000.

38) T. Colonius, A. Samanta, and K. Gudmundsson, "Parabolized stability equation models of large-scale jet mixing noise", Procedia Engineering, Vol. 6, pp. 64-73, 2010.

Appendix

$$F^n = (F^n_1, F^n_2, F^n_3, F^n_4, F^n_5)^T$$

$$F^n_1 = -\rho' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \left(u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v' \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w' \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right)$$

$$X_i = i \text{th element of } (x, y, z)$$

$$v_i' = i \text{th element of } (u', v', w')^T$$

$$V_i = i \text{th element of } V = (U, V, W)^T$$

$$j = 2, 3, 4 \quad i = j - 1$$

$$F_j = -\frac{1}{\gamma M^2} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial X_i} T' + \rho' \frac{\partial T'}{\partial X_i} \right) - \bar{\rho} v_k' \frac{\partial v_i'}{\partial X_k} - \rho' \left(\frac{\partial v_i'}{\partial t} + V_k \frac{\partial v_i'}{\partial X_k} + v_k' \frac{\partial v_i'}{\partial X_k} + \frac{\partial V_i}{\partial X_k} v_k' \right)$$

$$+ \frac{1}{R_0} \left[\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial X_k} T' + \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T'}{\partial X_k} \right) \left(\frac{\partial v_k'}{\partial X_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial X_k} + \delta_{ik} l_0 \frac{\partial v_k'}{\partial X_k} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu}{\partial T} T' \left(l_1 \frac{\partial^2 v_k'}{\partial X_i \partial X_k} + \Delta v_i' \right) \right]$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}$$

repeated index k represents summation over 1 to 3

$$F''_5 = -\bar{\rho} \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} + w' \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \\ + (\gamma - 1) M^2 \left(u' \frac{\partial p'}{\partial x} + v' \frac{\partial p'}{\partial y} + w' \frac{\partial p'}{\partial z} \right) \\ - \rho' \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + U \frac{\partial T'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + V \frac{\partial T'}{\partial y} + \right. \\ \left. v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} + W \frac{\partial T'}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + w' \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \\ + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\rho' \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} T' + U \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} T' + \rho' \frac{\partial T'}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. V \left(\frac{\partial \rho'}{\partial y} T' + \rho' \frac{\partial T'}{\partial y} \right) + W \left(\frac{\partial \rho'}{\partial z} T' + \rho' \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{1}{Pr R_0} \left[\frac{\partial k}{\partial T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial T'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial k}{\partial T} \left(\left(\frac{\partial T'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T'}{\partial z} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial k}{\partial T} T' \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$+ \frac{\bar{\mu}(\gamma - 1) M^2}{R_0} \left[l_2 \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. 2 l_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. \left\{ \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 \right\} \right]$$

$$+ \frac{(\gamma - 1) M^2}{R_0} \frac{\partial \mu}{\partial T} T' \left[2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial y} + \right. \\ \left. l_2 \left(\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z} + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right) \right. \\ \left. \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial x} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} + \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial y} + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial v'}{\partial z} + \left(\frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 \right] \right]$$