

# 매트릭스 펜슬 방법의 데이터 불균형 제거 기법

정회원 고진환\*, 준회원 쉬샤오웬\*,  
 학생회원 류병주\*, 이제훈\*, 이정섭\*

## Data De-weighting in Matrix Pencil Method

Jinhwan Koh\* *Regular Member*, Xiaowen Xu\* *Associate Member*,  
 Beongju Ryu\*, Jaehun Lee\*, Jungsup Lee *Student Members*

### 요 약

잘 알려진 매트릭스 펜슬 방법은 정적이지 않은 환경 및 주파수가 같은 다중경로 신호가 존재 할때도 동작하는 입사각 추정방식이다. 매트릭스 펜슬방식은 기존의 공분산행렬을 사용한 방식보다 더 좋은 분해능을 보여 줄 뿐 아니라 계산량의 측면에서도 매우 효과적이다.

본 논문에서는 매트릭스 펜슬 방식의 계산 과정에서 발생하는 데이터의 가중치가 균형이 맞지 않음으로써 생기는 영향에 대해 기술한다. 데이터의 균형이 맞는 새로운 방식의 매트릭스 펜슬 방식을 제안하고 데이터의 불균형을 해소할 수 있음을 보여주었다.

**Key Words** : DOA Estimation, Matrix Pencil, data balance, complex weighting effect

### ABSTRACT

Matrix Pencil method is one of the promising method to estimate DOA in non-stationary, multi-path coherent environment. Not only the Matrix Pencil Method offers better resolution than the conventional approach using covariance matrix, but also it is computationally very efficient.

In this paper, we presented an effect of unbalanced data weighting in the formulation of the Matrix Pencil method. A new formulation has been suggested to mitigate the effect of unbalanced data weighting. Numerical simulation demonstrated that the proposed method can successfully eliminate the problem of unbalanced data weighting.

### 1. 서 론

많은 종류의 입사각 추정 알고리즘들이 정확도를 늘리고 또한 계산량을 줄이고자 개발 되었다. MUSIC (Multiple Signal Classification), Root-MUSIC 그리고 ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) 과도 같은 방법들은 입력신호의 공분산행의 고유치 문제에 기반을 둔 입사각 추정 방법들이다.

Schmidt가 제안한 MUSIC 알고리즘<sup>[1]</sup>은 입력 공분산 행렬(input covariance matrix)의 고유구조(eigen structure)를 이용한 고 정밀 다중신호 분류법(high resolution multiple signal classification technique)이다. 또한 MUSIC은 입사신호의 수, 각 신호의 입사각, 입사신호간의 크기와 상호상관, 잡음전력에 관한 정보를 제공하는 신호파라미터 추정 알고리즘이다. 이 방법은 희망신호에 의한 고유벡터(eigenvector)와 잡음신호에 의한 고유벡터가 서로 직교한다는 성질을 이

\* 본 연구는 2009년도 경상대학교연구재단연구교수 연구지원비 및 지식경제부 및 정보통신 산업진흥원의 대학 IT연구센터 육성지원 사업의 연구결과로 수행되었음(NIPA-2011-C1090-1131-0007)

\* 경상대학교 전자공학과 AWC 연구실(jikoh@gnu.ac.kr), 공학연구원

논문번호 : KICS2011-04-167, 접수일자 : 2011년 4월 5일, 최종논문접수일자 : 2011년 8월 3일

용하여 전 방위각에 대한 MUSIC 스펙트럼을 구성하고, 이를 최대로 하는 방위각을 구하여 입사각 추정을 한다.

Barabell이 제안한 Root-MUSIC 알고리즘<sup>[2]</sup>은 MUSIC 스펙트럼에 대응하는 MUSIC 다항식의 근을 구하여 입사각을 추정한다. Root-MUSIC 알고리즘은 MUSIC 알고리즘의 방위 분해능을 향상시키지만 어레이 센서의 개수 두배 정도의 차수를 갖는 다항식의 해를 구하기 때문에 센서의 개수가 많은 경우 MUSIC 알고리즘보다 많은 계산 시간이 요구된다.

Roy가 제안한 ESPRIT 알고리즘<sup>[3,4]</sup>은 MUSIC 알고리즘의 계산과 저장상의 조건을 크게 감소시키고 입사각을 판별하기 위해 스티어링 벡터로 전역 탐색을 하지 않는다. 그리고 MUSIC 알고리즘과 달리, ESPRIT 알고리즘은 어레이 매니폴드 벡터를 정확히 알 필요가 없다. ESPRIT 알고리즘은 안테나 어레이가 서로 직선(fixed translational) 거리만큼 떨어진 두 개의 서브어레이(subarrays)의 해당소자들로 구성된 크기가 같고 동일한 두 서브어레이로 분해할 수 있는 구조를 가지게 하면 효과적인 장점을 살릴 수 있다. 즉, 어레이가 변위 불변성을 가져야 하고 안테나들은 동일한 거리에 찍지어 있어야 한다. 결국 ESPRIT 알고리즘의 핵심은 안테나 어레이의 직선 변위 불변성(translational invariance)으로 야기된 신호부분공간(signal subspace)의 회전 불변성(rotational invariance)을 이용한 것이다.

매트릭스 팬슬을 이용한 알고리즘은 복소 지수들(complex exponentials)의 합으로 나타내어지는 신호 파라미터들의 추정과 입력되어지는 매트릭스 팬슬의 고유치분해를 이용한다. "Pencil"의 어원은 1960년도에 Gantmacher에 의해 정의되었다<sup>[5]</sup>. Sarkar 등은<sup>[5-8]</sup>는 최초로 이 수학적 모델을 MPM(matrix pencil method) 라는 방법으로 복소함수의 지수를 구하는데 사용하였다. 매트릭스 팬슬을 이용한 대표적인 Sarkar의 이 방법은 신호의 고유치를 이용하여 지연을 고려함으로써 잡음 성분을 널스페이스(Null space)로 매핑하는 방식이다. 즉, 매트릭스 팬슬 방법은 공분산행렬이 아닌 Pencil 행렬을 고유치 분해를 사용하여 복소함수의 파라미터들을 구하는 방법이다. 이 방식은 환경이 정적이지 않고, 주파수가 같은 다중경로 환경에서도 잘 동작하고 또한 계산과정도 경제적이므로 다른 방식들에 비하여 우위에 있다고 할 수 있다.

본 논문에서는 매트릭스 팬슬 방식의 계산 과정에서 발생하는 데이터의 가중치가 균형이 맞지 않음으로써 생기는 영향에 관해 기술한다. 데이터의 균형이

맞는 새로운 방식의 매트릭스 팬슬 방식을 제안하고 데이터의 불균형을 해소할 수 있음을 보여주었다. 2장에서는 매트릭스 팬슬 방법의 유도과정이 간단히 기술되어 있으며 3장에서는 데이터의 불균형 가중치를 해결하는 방법에 대해 소개한다.

## II. Matrix Pencil 방법

배열안테나에 입사되는 신호의 지연시간 모델을 나타내면 다음과 같다.

$$x(n) = \sum_{k=1}^K R_k e^{i\omega_k n T_s} = \sum_{k=1}^K R_k z_k^n \quad (1)$$

여기서  $R_k$ =residues or complex amplitudes,

$\omega_k$ =Angular frequencies,

$e^{i\omega_k T_s} = z_k$  for  $k = 1, 2, \dots, K$ ,

$N = 0, 1, \dots, N-1$

$\omega_k$ 는 입사각성분이 포함되고, 신호의 주파수  $f$ 와 광속  $c$ 에 의한 신호의 파장이  $\frac{c}{f}$ , 안테나 사이의 간격이  $d$ 인  $\frac{2\pi f}{c} d \cos \phi_k$ 이다. 따라서 각  $\omega_k$ 를 구함으로써 신호의 입사각을 찾을 수 있다. 여기서, 댐핑 팩터(damping factor)는 중요하지 않기 때문에 고려하지

$$Y = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K R_k & \sum_{k=1}^K R_k z_k & \dots & \sum_{k=1}^K R_k z_k^L \\ \sum_{k=1}^K R_k z_k & \sum_{k=1}^K R_k z_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^K R_k z_k^{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K R_k z_k^{N-L-1} & \sum_{k=1}^K R_k z_k^{N-L} & \dots & \sum_{k=1}^K R_k z_k^{N-1} \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)}$$

$$Y_a = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \dots & x(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L}$$

$$Y_b = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ x(2) & x(3) & \dots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (2)$$

않았고,  $K$  는 안테나에 입사하는 신호의 수,  $N$  은 안테나 수이다. (1)의 모델로부터 우리가 추정해야 할 파라미터는  $K$ 와  $R_k, z_k$ 이다.

잡음이 없는 데이터로부터,  $N$ 개 안테나의 신호 데이터를 이용한  $(N-L) \times (L+1)$  데이터를 행렬  $Y$  와 행렬  $Y$  에서 마지막 열과 처음 열을 제거한  $(N-L) \times L$  행렬  $Y_a, Y_b$ 은 다음과 같이 구성할 수 있다.

여기서  $L$ 은 펜슬 파라미터이며  $N/3$ 과  $N/2$  사이의 값으로 결정된다. 펜슬 파라미터  $L$ 은 데이터에 포함하고 있는 잡음에 대해서 매우 효과적인 측정을 하기 때문에 잡음이 포함된 데이터를 다룰 때 중요성을 알 수 있다.

$Y_a$ 와  $Y_b$ 를 하나씩 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$Y_a = Z_a R_0 Z_b \tag{3}$$

$$Y_b = Z_a R_0 Z_0 Z_b \tag{4}$$

여기서,

$$Z_a = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_2 & \cdots & z_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_K & \cdots & z_K^{(N-L-1)} \end{bmatrix}_{(N-L) \times K}$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{(L-1)} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_K & \cdots & z_K^{(L-1)} \end{bmatrix}$$

$Z_0 = \text{diag}[z_1, z_2, \dots, z_K], R_0 = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_K]$ 이다.

이제 매트릭스 펜슬 파라미터를 고려해서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Y_b - \lambda Y_a = Z_a R_0 [Z_0 - \lambda I] Z_b \tag{5}$$

여기서  $\lambda = z_k$ , for  $k = 1, 2, \dots, K$ 일 때, 변수  $z_i$ 는 행렬 쌍인  $[Y_b]; [Y_a]$ 의 일반적인 고유값들로 찾을 수 있다.  $z_k$ 의 해는 순차적인 고유값 문제로 풀 수 있다.

$$Y_b - \lambda Y_a \tag{6}$$

$$Y_a^+ Y_b - \lambda I \tag{7}$$

여기서  $Y_a^+$ 는  $Y_a$ 의 More-Penrose Pseudo-inverse 이다.

$$\text{즉, } Y_a^+ = (Y_a^H Y_a)^{-1} Y_a^H$$

여기서 윗첨자  $H$ 는 공액복소 전치행렬을 의미한다.

결국  $\lambda = z_k$ 로 추정되면, 주파수 성분은 다음과 같은 식을 통해서 알아 낼 수 있다.

$$w_k = \text{Imag}[\ln(z_k)] / T_S \tag{8}$$

여기서 신호에 얼마나 많은 주파수 성분이 포함되어 있는지 모르기 때문에  $K$ 를 결정하기 위해 다음과 같이  $Y$  행렬을 singular-value decomposition(SVD)하면

$$Y = U \Sigma V^H \tag{9}$$

이고,  $U$ 와  $V$ 는 unitary 행렬이고,  $Y Y^H$ 와  $Y^H Y$ 의 고유벡터들을 만들면,  $\Sigma$ 는  $Y$ 의 singular value를 포함하는 대각 행렬이 된다.

$$U^H Y V = \Sigma \tag{10}$$

변수  $K$ 를 선택하는 것은 이때에 이루어진다. singular values의 가장 큰 값을 보면, 일반적으로  $K$ 를 넘어서면 singular values의 값은 0(zero)에 근접한다. 여기서 변수  $K$ 를 선택한다. Singular value  $\sigma_c$ 를 고려하자면,

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{\max}} \approx 10^{-p} \tag{11}$$

이다.  $p$ 는 정해진 신호의 중요한 임계값이다.

### III. Matrix Pencil 방식의 데이터의 불균형

식(3)에서 보면  $Y_a$ 를 구성할 때 사용되는 데이터는  $x(0), x(N-2)$ 이 1회  $x(1), x(N-3)$ 이 각각 2회,  $x(2), x(N-4)$ 가 각각 3회로 어레이의 중간부로 갈수록 참조의 회수가 높아짐을 관찰할 수 있다. 마찬가지로 식(4)의  $Y_b$ 를 구성할 때 사용되는 데이터는  $x(1), x(N-1)$ 이 1회  $x(2), x(N-2)$ 이 각각 2회,  $x(3), x(N-3)$ 가 각각 3

회이다. 이것은 의도하지 않은 삼각 윈도우(triangular window)가 데이터에 추가된 것으로 볼 수 있다. 즉, 어레이의 끝부분 데이터와 중간부분 데이터는 서로 다른 가중치를 가지게 되므로 데이터의 불균형이 일어난다. 이러한 의도하지 않은 데이터 불균형의 영향을 확인하기 위하여 그림 1과 같은 21개의 센서를 가지는 어레이를 고려한다. 각 센서의 거리는 반파장이며 파필드 신호로 간주된 입사각은  $\theta = 60^\circ$  로 설정하였다. 어레이의 중앙부에서 입력되는 데이터는 가장 자리의 데이터보다 더욱 많이 참조 되어 데이터의 불균형을 초래한다. 이 불균형적인 데이터 가중치의 영향을 보여주기 위하여 그림 2와 같은 분산 $\sigma^2$ 을 가지는 가우시안 잡음을 추가 하였다. 가우시안 복소 랜덤 변수  $z$ 는 식(12)로 정의되었다.

$$z = N(x + iy)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}, \quad (12)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2},$$

$N$ =잡음의 크기,

여기서  $f_X(x), f_Y(y)$  는 각각 독립인 랜덤변수  $x$  와  $y$ 의 확률밀도함수이다.

입사각은  $\theta = 60^\circ$ 인 하나의 입력신호 만 고려하므로 입력신호  $x(n)$ 는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$x(n) = e^{i2\pi 0.5n \cos(\frac{\pi}{3})} + noise \quad (13)$$

여기서  $noise$  는 랜덤변수  $z$  가 발생하는 신호이다. 그림2에서 표시된 'Noise 의 크기-(a)' 의 모양은 삼각윈도우의 모양을 가정하였다. 삼각윈도우는 중간 데이터의 가중치가 높은 경우로써 <그림2>의 'Noise 의 크기-(b)' 의 모양은 그의 쉬프트와 같다. 두 개의 윈도우는 전력이 같음을 쉽게 관찰 할 수 있다. 만일 데이터의 비대칭적 가중치에 따른 영향이 없다면 (a)

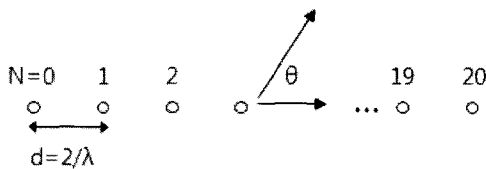


그림 1. Array의 구조

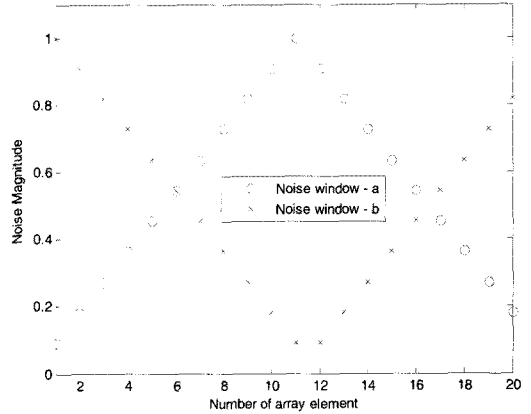


그림 2. 각 센서에 적용된 잡음의 가중치

와 (b) 두 경우 모두 유사한 성능을 보여 줄 것이다.

그림 3은 매트릭스 팬슬 방식을 사용하였을 경우 그림 2의 잡음을 입력신호에 추가하여 입사각 추정 오차를 그림 그림이다. 오차는 평균자승오차값(RMS)으로 계산 되었다. 그림 3에서 보논바와 같이 SNR이 변함에 따라 그림 2의 잡음윈도우-(a)가 잡음윈도우-(b)보다 적은 오차를 보여줌을 알 수 있다. 그림 2의 (a)와 (b) 입력 잡음의 크기는 같지만, 어레이의 불균형적인 가중치가 더해짐으로써 그림 3과 같이 다른 오차값을 가진다.

본 논문에서는 이러한 불균형을 해소할 수 있는 매트릭스 팬슬 방법을 고안하였다. 식 (3)과 (4)의  $Y_a$ 와  $Y_b$  를 대치하여 다음과 같은 식을 사용 할 수 있다.

$$x' = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \end{bmatrix}_{2(N-1) \times 1} \quad (14)$$

$$x'' = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}_{2(N-1) \times 1} \quad (15)$$

$$Y'_a = \begin{bmatrix} x'(0) & x'(1) & \cdots & x'(L'-1) \\ x'(1) & x'(2) & \cdots & x'(L') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'(2N-L'-2) & x'(2N-L'-1) & \cdots & x'(2N-3) \end{bmatrix}_{(2N-L'-1) \times L'} \quad (16)$$

$$Y'_b = \begin{bmatrix} x''(0) & x''(1) & \cdots & x''(L'-1) \\ x''(1) & x''(2) & \cdots & x''(L') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x''(2N-L'-2) & x''(2N-L'-1) & \cdots & x''(2N-3) \end{bmatrix}_{(2N-L'-1) \times L'} \quad (17)$$

$L'$  은 팬셀 파라미터이며 일반 매트릭스 팬셀 방법과 유사하게 정의할 수 있다. 식 (16)과 (17)에서는 모든 데이터가 동등하게 참조되었다.

$$Y'_b - \lambda' Y'_a = 0 \quad (18)$$

식 (18)은 식(5)와 같은 형태이며 나머지 유도과정은 식(6)-(11) 과 같다.

제안된 알고리즘을 사용하여 식(13)의 신호를 생성하여 입력 SNR에 따라 오차를 계산 하였다. 그림 4는 제안된 알고리즘을 사용 하였을 때 오차를 나타낸다. 그림 2의 잡음 윈도우 (a) 를 사용 하였을 때와 잡음 윈도우(b) 를 사용하였을 때의 오차를 표시한다. 알 수 있다. 그림 4의 차이는 그림 3에서보다 잡음 윈도우의 영향이 확연히 줄어든 것을 알 수 있다.

그림 5는 잡음 윈도우가 없는 경우의 보정된 매트릭스 팬셀 알고리즘과 기존의 매트릭스 팬셀 알고리즘을 비교한 결과이다. 잡음의 윈도우가 없는 경우는 제안된 알고리즘이 기존 알고리즘과 유사한 결과를 주는 것을 보여 준다. 결론적으로, 제안된 알고리즘은 기존의 매트릭스 팬셀방식의 성능은 유지하면서 보다

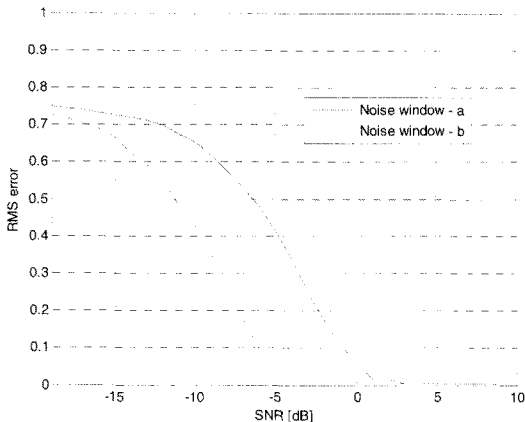


그림 3. Estimation of frequency error as a function of SNR

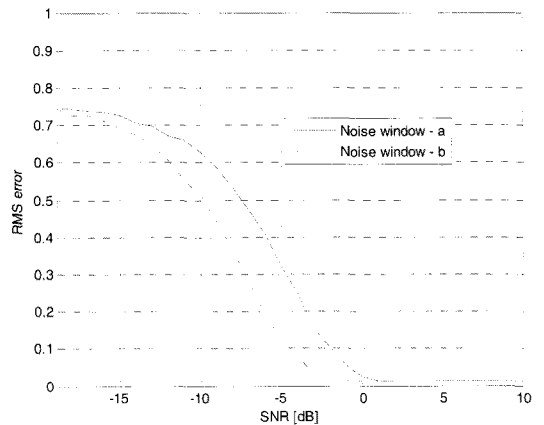


그림 4. Estimation of frequency error using proposed method

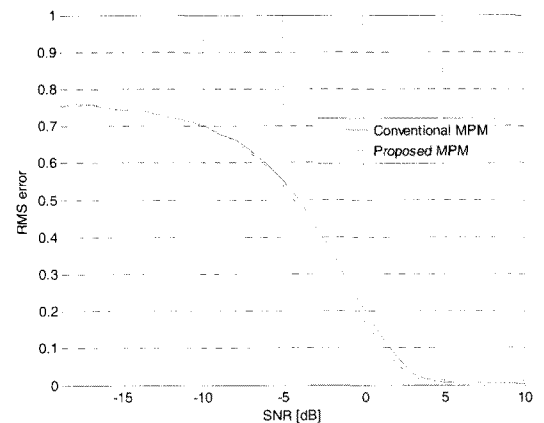


그림 5. 잡음윈도우가 없는 경우의 입사각 추정

데이터를 공평하게 사용할 수 있는 방법이다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 입사각 추정방식으로 좋은 성능을 가진 매트릭스 팬셀 방식의 데이터의 불균형에 관하여 설명 하였다. 데이터의 불균형을 해소하고자 변형

된 매트릭스 펜슬 방식이 제안되었으며 수치해석적 시뮬레이션을 통하여 본 방법의 타당성을 보여주었다. 제안된 알고리즘은 기존의 매트릭스 펜슬방식의 성능은 유지하면서 데이터 불균형의 문제를 해소하고 데이터를 공평하게 사용할 수 있는 방법이다.

using Matrix Pencil Method” IEICE Transactions on Communications Vol.E87-B, No.5, pp.1427-1429, 2004

### 참 고 문 헌

- [1] Schmidt, R. O., “Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation”, IEEE Trans. On Antennas and Propagation, 34, (3), pp.276-280, 1986,
- [2] Barabell, A. J., ‘Improving the Resolution Performance of Eigenstructure-based Direction Finding Algorithm’, Proc. Of the IEEE Int’l Conf. On Acoustics, Speech, and Signal Processing-83, pp.336-339, 1983
- [3] A. Paulraj, R. Roy, and T. Kailath, “Estimation of Signal Parameters vis Rotational Invariance Techniques - ESPRIT,” Proc. of 19th Asilomar Conf, on Circuits and Systems, pp.83-89, 1985.
- [4] R. Roy and T. Kailath, “ESPRIT-Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques,” IEEE Trans, on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.37, pp. 984-995, July 1986.
- [5] Sarkar, T. K. and Pereira, O. ‘Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials’, IEEE Antennas and Propagation Magazine, 37, (1), pp.48-54, 1994
- [6] Hua, Y. and Sarkar, T. K., ‘Generalized pencil-of a function method for extracting poles of an EM system from its transient response’, IEEE trans. on Antennas and Propagation, 37, (2), pp.229-234, 1989
- [7] T.K.Sarkar, S.Park, J.Koh, S.M.Rao, “Application of the Matrix Pencil Method for Estimating the SEM (singularity Expansion Method) Poles of Source-free Transient Responses From Multiple Look Directions”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.48, No.4, pp.612-618, April 2000.
- [8] J.Koh, D.Lim, T.K.Sarkar, “DOA estimation

고 진 환 (Jinhwan Koh)

정회원



1999년12월 시라큐스대학 전기 공학과 박사  
2003년 3월~현재 경상대학교 전자공학과 교수  
<관심분야> 레이더시스템, 전자파측정, 신호처리

쉬 사 오 웬 (Xiaowen Xu)

준회원



2010년 7월 요령과기대학 전자 공학 학사  
2010년 9월~현재 경상대학교 전자공학과 석사과정  
<관심분야> 전자파해석, 레이더시뮬레이션

류 병 주 (Beongju Ryu)

학생회원



2006년 3월~현재 경상대학교 전자공학과 학사과정  
<관심분야> 마이크로파필터, 레이더시스템

이 제 훈 (Jachun Lee)

학생회원



2006년 3월~현재 경상대학교  
전자공학과 학사과정  
<관심분야> 신호처리, 레이더  
시물레이션

이 정 섭 (Jungsup Lee)

학생회원



2007년 3월~현재 경상대학교  
전자공학과 학사과정  
<관심분야> 임베디드시스템, 레  
이더시물레이션