대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 3, 239-259. Aug 2011

초등학생들의 범자연수 연산의 성질에 대한 이해 분석[1)]

최 지 영[*] · 방 정 숙[**]

본 연구는 초등학생들의 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력의 실태를 알아보고자, 연산의 성질 이해 과제로 구성된 검사 도구를 이용하여 2학년 648명, 4학년 688명, 6학년 751명의 반응을 분석하였다. 분석 결과, 상당수의 학생들이 문제 상황에 포함된 연산의 성질을 제대로 파악하지 못하였고, 연산의 성질을 적용하여 문제를 해결하는 데 많은 어려움을 겪는 것으로 드러났다. 연산의 성질별로는 교환법칙 과제에서는 저학년에서부터 높은 성공률을 보인 반면, 결합법칙과 분배법칙에서는 고학년에서도 매우 낮은 성공률을 보였다. 문제 상황별로는 특히, 결합법칙 및 분배법칙 과제의 경우 구체적인 수 상황에서의 성공률이 임의의 수 상황에서의 성공률에 비해 상대적으로 더 낮게 나타났다. 이러한 결과들을 토대로 본 논문은 초등학교에서의 대수 지도 방안에 대한 시사점을 제공하였다.

I. 서론

현대 사회는 모든 사람들에게 수학적 힘을 지닌 유능한 사고자가 될 것을 요구하고 있다. 유능한 사고자가 되고자 할 때, 대수를 이해하고 활용할 수 있는 능력은 필수적이다(Chazan, 2008). RAND 연구소(Research ANd Development [RAND])에서 발표한 수학 연구 패널 보고서는 “많은 직업 상황에서 뿐만 아니라 일상생활의 정보를 해석하고 처리하는 데 있어서도, 대수적 표기법, 대수적 사고와 개념이 중요하다”고 진술하면서 대수가 모든 사람들에게 유용함을 강조하고 있다(RAND Mathematics Study Panel, 2003, p. 47). 대수의 중요성은 학교수학에서도 꾸준히 강조되어 왔다. 수학교육 연구자들과 학교 교육과정 개발자들은 오랫동안 대수를 학교수학에서의 주요한 핵심 주제로 다루어 왔다.

그러나 대수의 중요성에도 불구하고, 상당수의 중·고등학생들이 대수 학습에서 많은 어려움을 겪는 것으로 드러났다(Carraher & Schliemann, 2007). 이러한 대수 학습상의 어려움의 원인으로, Filloy와 Rojano(1989)는 대수라는 학문이 수학의 역사상 최근에서야 체계화되었다는 역사적 경향을 들었다. 즉, 수학이라는 학문이 산술적인 사고로부터 발생하여 서서히 발달되어 가다가 추상화 과정을 거치면서 대수적인 사고로 진화해 왔듯이, 학생들도 충분하게 인지 발달이 이루어진 후에만 대수 학습이 가능하다는 것이다. Herscovics와 Linchevski(1994) 역시, 학생들의 불충분한 인지 발달이 대수 학습에서 어려움을 야기하게 된다고 설명한다.

이에 반해, Booth(1988)는 학생들이 대수 학습에서 겪는 어려움의 원인을 초등학교에서 수학

* 서울대동초등학교, ji2006@empal.com
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr
1) 본 논문은 제1저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 바탕으로 하고 있음.

이 도입되는 방식으로 설명하였다. 즉, 학생들이 초등학교에서 수학을 폭넓고 깊이 있게 이해하지 못한 채, 중·고등학교에서 대수를 배우기 때문에 대수 학습에서 어려움을 겪게 된다고 보았다. Kaput(1998) 역시, 대수를 초등학교에서 배우던 수학의 형태와 전혀 다른 형식적이고 기호적인 형태로 중등학교에서 갑작스레 도입하기 때문에 학생들에게 개념적으로 이해되지 못하고 인지적인 부담과 장애를 유발하게 된다는 것을 지적하며 산술과 대수를 이분법적으로 분리하여 초등학교와 중등학교 과정으로 구분하여 지도하는 접근방식 자체가 대수 학습에서의 근본적인 어려움을 야기한다고 주장한다. 이들은 대수가 학교 교육과정 전반에 걸쳐 필수 요소로서 다루어 질 때, 학생들의 대수 개념이 의미 있게 점진적으로 발달할 수 있다고 보았다.

학교 교육과정의 초기 단계에서부터 대수를 가르쳐야 한다는 초기 대수(early algebra) 교육이 국제적인 공감을 얻으면서(NCTM, 2000; RAND Mathematics Study Panel, 2003), 초등학생들에게 적절한 대수의 내용과 범위는 무엇이며 초등학교에서 대수를 어떻게 다룰 것인가를 탐구하는 데 관심이 모아지고 있다(Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008). 최근 우리나라에서도 초기 대수 교육을 진작하기 위한 노력의 일환으로 초등학생들의 대수적 사고를 촉진하기 위한 방안들이 연구되고 있다(김성준, 2004; 이화영 · 장경윤, 2010; 최지영 · 방정숙, 2008). 그러나 대수적 추론 능력과 관련하여 우리나라 초등학생들의 전반적인 이해 수준과 어려움 등을 체계적으로 분석한 연구는 찾아보기 어렵다.

이러한 연구 배경과 필요성을 바탕으로 본 연구에서는 초등학교에서 가장 핵심이라 할 수 있는 수와 연산 영역과 관련하여 전국 초등학교 저 · 중 · 고학년 학생들을 대상으로 연산의 성질에 대한 이해 실태를 조사하였다. 구체적으로 덧셈 및 곱셈에서의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 관련하여 학생들이 구체적인 수가 주어졌을 때 연산법칙이 성립한다는 것을 이해할 수 있는지, 임의의 수 상황에서 연산법칙을 일반화할 수 있는지, 그리고 연산 법칙을 적용하여 미지의 값을 구할 수 있는지를 자세하게 분석하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 대수적 추론의 본질

초기 대수의 중요성을 강조했던 Kaput(2008)은 대수적 추론의 본질을 두 가지 핵심 양상과 세 가지 요소로 설명한다. 그는 <표 Ⅱ-1>에 제시된 바와 같이, 대수적 추론은 의미 있는 일반화를 제공하는 기호화 활동과 기호화된 일반화를 가지고 추론하는 활동이라는 두 가지 양상을 띠며, 이러한 대수적 추론은 다루는 내용에 따라 크게 세 가지 요소로 구성된다고 보았다(Kaput, 2008. p.11). 특히, 그는 대수적 추론의 주요 요소로 '계산과 관계로부터 추상화된 구조와 체계를 연구하는 것으로서의 대수'를 그 첫 번째로 들었다. 이는 구체적으로 산술적인 연산 및 연산 성질을 일반화하는 활동 혹은 더욱 일반적인 관계에 대해 추론하는 활동 및 형식을 의미하며, 많은 선행 연구들이 대수의 핵심적인 활동으로 간주했던 일반화된 산술로서의 대수를 포함한다. Blanton과 Kaput(2005)에 의하면, 일반화된 산술로서의 대수적 추론은 대수적 추론의 유형 중 하나로서, '산술 즉, 수 체계 및 연산의 구조와 성질을 등을 대상으로 일반화를 구성하고 표현하는 일련의 사고 과정'

<표 Ⅱ-1> 대수 및 대수적 추론의 핵심 양상과 요소

두 가지 핵심 양상
(A) 규칙성과 제약의 일반화를 체계적으로 기호화하는 것으로서의 대수
(B) 전통적인 기호 체계로 표현된 일반화에 관한 구문론적으로 안내된 추론과 활동으로서의 대수
세 가지 요소에 포함된 핵심 양상 A와 B
1. 계산과 관계로부터 추상화된 구조와 체제의 연구로서의 대수 ; 산술(일반화된 산술로서의 대수)에서 그리고 양적 추론에서 발생하는 것을 포함
2. 함수, 관계 그리고 이변량 변수에 관한 연구로서의 대수
3. 수학의 안팎에서 일련의 모델링 언어를 적용하는 것으로서의 대수

이라고 정의할 수 있다. 예를 들면, 덧셈의 항등원인 0의 성질 혹은 덧셈의 교환법칙 등을 발견하고 일반화하는 활동 등과 같이 산술의 구조로부터 대수의 구문론적 관점을 형성하는 과정 등이 핵심적인 연구의 초점이 된다. 일반화된 산술로서의 대수적 추론은 학교 수학에서 주요하게 다루어져야 할 대수적 추론 중 하나로서, 어린 학생들도 접근 가능하며 유망하다는 측면에서 특히, 초기 대수에서 중요하게 다룰 필요가 있다(Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2008). 이에 본 논문은 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력을 중심으로 학생들의 이해 실태를 알아보고자 한다.

2. 초등학교에서의 수와 연산의 성질

수와 연산은 초등학교 수학 교육과정에서 가장 핵심이 되는 영역으로 수와 연산의 성질을 이해하고 일반화하는 경험은 산술을 더욱 깊게 이해하도록 도울 뿐 아니라 산술과 대수 사이의 자연스러운 연결을 가능하게 한다(Lannin, 2003). Warren(2004)은 대수의 기본이 되는 아이디어는 상당히 산술에 의존하고 있으며, 초등학교에서부터 산술적 사고와 대수적 사고를 함께 가르쳐야 한다고 주장한다. 그러나 일반적으로 초등학교에서는 수와 연산의 성질과 관련하여 암묵적으로 지도하는 경우가 많다. 이에 따라 학생들은 수와 연산의 성질에 대하여 암묵적인 지식은 가지고 있지만, 자신의 사고를 분명하게 할 기회를 갖지 못하게 된다. 그리고 결국 학생들은 중·고등학교에서 대수를 배울 때, 산술과 전혀 별개의 지식으로 인식하게 된다. 이에 반해, 초등학교에서 학생들에게 수와 연산의 성질에 대하여 추측해보게 하고, 다른 상황에서도 항상 참이 되는지를 탐구하고 일반화해보도록 하는 활동은 학생들의 수학적인 사고를 더욱 분명하게 할 수 있다(Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007). 더불어 Bastable과 Schifter(2008)는 초등학교에서 산술에 대해 탐구하고 정당화하는 과정을 통해서도 자연스럽게 일반성을 탐구할 수 있다고 논의한다.

미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])에서 제시한 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서는 모든 학생들이 대수 학습을 통해 도달해야 할 목표 중 하나로 "대수기호를 이용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석할 수 있어야 한다"는 것을 강조하고 있다(NCTM, 2000, p.37). 또한, K-2학년에서는 "교환법칙과 같은 연산의 일반적인 원리나 성질을 특정한 수를 활용하여 예시할 수 있어야 한다"는 것((NCTM, 2000, p.90)과, 3-5학년에서는 "교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 알고 범자연

수 연산에 활용할 수 있어야 한다"는 것(NCTM, 2000, p.158)을 학년군별 목표로 명시함으로써, 초등학교에서 연산의 성질을 이해하고 적용할 수 있는 기회와 경험을 제공할 것을 권고하고 있다.

한편, 우리나라 교육과정에서는 초등학교 수학 교과의 목표 중 하나로 "생활 주변에서 일어나는 현상을 수학적으로 관찰하고 조직하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하는 능력을 길러야 한다"는 것을 명시하며 초등 수학의 목표가 단순히 계산 능력의 숙달에 있는 것이 아님을 밝히고 있다(교육과학기술부, 2008, p.51). 또한, 교육과정 해설서를 통해, 범자연수 체계 및 범자연수 범위에서의 사칙연산이 완성되는 시기인 4학년에서는 "수들 사이의 관계나 교환성, 결합성, 분배성과 같은 연산의 성질을 이용하여 여러 가지 방법으로 계산하게 할 수 있다"는 것을 언급하며 4학년 수준에서는 연산의 성질을 활용할 수 있기를 기대하고 있다(교육과학기술부, 2008, p. 96). 본 연구는 연산의 성질을 중심으로 우리나라 저·중·고 학년별 학생들의 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 실태를 알아봄으로써 성공적인 대수 교수-학습 방향을 탐색하기 위한 시사점을 도출할 수 있을 것으로 기대된다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 우리나라 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 대수적 추론 능력을 조사하고자 전국 초등학교를 표집대상으로 하였으며, 교육과학기술부에서 제시한 2009년 전국 초등학교 주소록을 표집틀로 사용하였다. 본 연구는 지역에 따른 학생들의 능력 차이를 비교하기 보다는 우리나라 초등학생들의 전반적인 경향을 파악하는 데 관심을 두었고, 모집단의 구성원인 학생을 직접 추출하는 것이 아니라 학교와 학급을 표집 단위로 하는 2단계 군집 표집의 방법을 사용함으로써 표본 추출의 시간적 경제적 비용을 최소화하고자 했다. 2009년 10월에 발표된 교육통계연보에 따르면 전국의 초등학교 수는 총 5,829개로 본 연구에서는 전국 초등학교의 0.67%에 해당하는 39개 학교를 표집하였다.

표집된 39개 초등학교에 우편을 이용하여 검사지를 전달하고 협조를 요청한 결과 32개 학교가 본 검사에 참여하였고, 검사 결과지도 성공적으로 회신해 주었다. 그러나 이 중 2개 학교에서 학교 행사 등의 이유로 2, 4, 6학년이 모두 검사에 참여하지는 못했다. 이에 따라 2개 학교를 제외한 30개 초등학교 학생들의 반응을 분석하였는데, 이는 본 연구의 표집 학교 중 약 76.9%에 해당한다.

한편, 30개 학교의 2, 4, 6학년 한 개 학급 학생들 중에서 검사에 응시하지 않거나 특수아인 경우는 분석 대상에서 제외하였다. 따라서 본 연구에서 최종적으로 선정된 분석 대상은 2학년 648명, 4학년 688명, 6학년 751명으로 총 2087명이다.

2. 연구 방법 및 검사 도구

본 연구는 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 검사지를 통해 초등학교 2학년, 4학년, 6학년 학생들의 대수적 추론 능력이 어떠한지를 파악하는 데 초점을 두기 때문에 조사 연구 방법을 적용하였다. 검사 도구는 초등학생들의 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력을 알아보기 위한 목적으로, 우리나라 수학과 교과용 도서에 제시된 대수적 추론 관련 내용, Blanton과

Kaput(2005)이 초등학생들에게 적절한 것으로 제안한 대수적 추론의 유형, Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, 그리고 Battey(2007)의 연구에서 사용한 검사 문항, Beatty와 Moss(2007)의 연구에서 다룬 대수적 추론의 요소들을 참고하여 개발하였다.

개발된 검사 도구의 타당도를 높이고, 문항의 난이도와 적절성 등을 제고하기 위해 총 3회에 걸쳐 예비 검사를 실시하였고, 문항수의 조절, 문항 진술상의 문제점 수정, 난이도 조정 등을 거친 후 전문가 1인과 교사 7인의 검토를 받았다. 최종적인 검사 도구는 <표 Ⅲ-1>에 제시된 바와 같이, 덧셈의 교환법칙, 덧셈의 결합법칙, 곱셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙의 5가지 과제로 구성되었고, 과제별로 3문항씩 총 15문항으로 구성되었다. 특히, 연산의 성질에 대한 학생들의 이해가 3가지 문제 상황('구체적인 수 상황에서 알맞은 식을 찾을 수 있는가?', '연산법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는가?', 그리고 '임의의 수 상황에서 알맞은 식을 구할 수 있는가?')에 따라 차이가 있는지를 비교분석하기 위해, 분배법칙의 경우 '$(a\times b)+(a\times c)=a\times(b+c)$'와 같은 한 가지 형태만을 일관성 있게 사용하였다. 검사 도구는 2학년용과 4·6학년용의 두 가지로 구분하여 작성하였다. 각 문항은 모두 동형이지만, 교육과정 내용을 감안하여 2학년의 경우 나눗셈 대신 동수누감의 개념을 사용하였고, 4·6학년의 경우 2학년보다 더 큰 수를 사용하였다. 검사지의 신뢰도를 알아보기

<표 Ⅲ-1> 연산의 성질 과제의 검사 내용

검사 항목	검사 내용	문항 번호
덧셈의 교환법칙	구체적인 수를 예로 들어, 두 수의 순서를 바꾸어 더하여도 결과는 같다는 것을 알고, 문제 상황에 알맞은 식을 찾을 수 있는가?	1
	덧셈의 교환법칙을 적용하여 식에서 □의 값을 구할 수 있는가?	2
	임의의 수가 주어졌을 때, 덧셈의 교환법칙을 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?	3
곱셈의 교환법칙	구체적인 수를 예로 들어, 두 수의 순서를 바꾸어 곱하여도 결과는 같다는 것을 알고, 문제 상황에 알맞은 식을 찾을 수 있는가?	4
	곱셈의 교환법칙을 적용하여 식에서 □의 값을 구할 수 있는가?	5
	임의의 수가 주어졌을 때, 곱셈의 교환법칙을 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?	6
덧셈의 결합법칙	구체적인 수를 예로 들어, 세 수의 순서를 바꾸어 더하여도 결과는 같다는 것을 알고, 문제 상황에 알맞은 식을 찾을 수 있는가?	7
	덧셈의 결합법칙을 적용하여 식에서 □의 값을 구할 수 있는가?	8
	임의의 수가 주어졌을 때, 덧셈의 결합법칙을 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?	9
곱셈의 결합법칙	구체적인 수를 예로 들어, 세 수의 순서를 바꾸어 곱하여도 결과는 같다는 것을 알고, 문제 상황에 알맞은 식을 찾을 수 있는가?	10
	곱셈의 결합법칙을 적용하여 식에서 □의 값을 구할 수 있는가?	11
	임의의 수가 주어졌을 때, 곱셈의 결합법칙을 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?	12
덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙	구체적인 문제 상황에서 전체의 개수를 덧셈식과 곱셈식을 이용하여 바르게 나타낸 식을 찾을 수 있는가?	13
	분배법칙을 적용하여 식에서 □의 값을 구할 수 있는가?	14
	임의의 수가 주어졌을 때, 분배법칙을 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?	15
총 문항의 수		15

위해 Cronbach의 Alpha값을 구한 결과 2학년 0.740, 4학년 0.751, 6학년 0.720으로 신뢰할 수 있는 것으로 밝혀졌다.

3. 자료의 수집 및 분석

본 검사는 학급 담임교사가 직접 실시하도록 안내하였고, 검사 시간은 40분으로 답안 작성은 학생들이 검사지에 직접 기술하도록 하였다. 학생들의 반응은 정답, 오답, 무응답으로 구분하고 각각의 빈도수와 백분율을 조사하였다. 이를 토대로 2087명 학생들의 정답률을 학년별, 과제 유형별, 문제 상황별로 각각 정리하여 학생들의 대수적 추론 능력을 살펴보았다. 특히, 학년별로 유의한 차이가 있는지를 알아보기 위해 유의수준 0.05에서 분산분석을 실시하였다. 분산분석을 통해 학년 간에 유의한 차이가 있다고 밝혀진 경우, 구체적으로 어느 학년 사이에 유의한 차이가 있는지를 자세히 살펴보기 위해 사후검증(Post-Hoc Test)을 실시하였는데, 이 때 집단 간에 사례수가 다르므로 Scheffé test를 이용하였다(성태제, 2007).

Ⅳ. 결과 분석

1. 연산의 성질에 대한 이해 개관

연산의 성질에 대한 이해는 덧셈의 교환법칙, 덧셈의 결합법칙, 곱셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙의 다섯 가지 연산 법칙을 중심으로 구체적인 수 상황에서 알맞은 식을 찾을 수 있는지, 연산법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는지, 그리고 임의의 수 상황에서 알맞은 식을 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 통해 알아보았다. 분석 대상은 2, 4, 6학년 학생 총 2087명으로, 본 개관에서는 연산의 성질에 대한 학생들의 전반적인 이해와 경향을 중심으로 분석하였다. 특히, 분석 결과는 학년별 연산의 성질에 대한 이해 분석과 문제 상황별 연산의 성질에 대한 이해 분석으로 구분하여 제시하였다.

가. 학년별 연산의 성질에 대한 이해

검사지를 학년별로 분석한 결과 정답의 빈도수와 평균 정답률은 <표 Ⅳ-1>과 같다. 먼저 2학년 학생들의 반응을 분석하면, 전체 평균 정답률은 51.56%로 연산의 성질에 관하여 전반적으로 낮은 이해도를 보였다. 연산법칙별로는 덧셈의 교환법칙 65.8%, 덧셈의 결합법칙 44.0%, 곱셈의 교환법칙 70.7%, 곱셈의 결합법칙 36.3%, 분배법칙 41.0%로 나타났으며 높은 순으로 정리하면 곱셈의 교환법칙> 덧셈의 교환법칙> 덧셈의 결합법칙> 분배법칙> 곱셈의 결합법칙으로 나타났다. 특히, 곱셈의 교환법칙에서의 정답률은 덧셈의 교환법칙에서의 정답률보다 4.9% 포인트 더 높게 나타났는데, 덧셈에 비해 곱셈은 1년 늦은 시기인 2학년에서 도입된다는 측면에서 특이할 만하다. 한편, 곱셈의 교환법칙에서의 정답률은 곱셈의 결합법칙에서의 정답률보다 34.4% 포인트 더 높게 나타났는데, 동일한 연산 내에서의 차이라는 측면에서 주의를 기울일 필요가 있다.

4학년 학생들의 반응을 살펴보면, 전체 평균 정답률은 68.14%로 2학년에 비해 약 15% 포인트 더 높은 정답률을 보였다. 연산의 성질별 평균 정답률은 덧셈의 교환법칙 83.8%, 덧셈의 결합법칙 60.4%, 곱셈의 교환법칙 82.4%, 곱셈의 결합법칙 57.8%, 분배법칙 56.3%로 나타났으며 높은 순으로 정리하면, 덧셈의 교환법칙> 곱셈의 교환법칙> 덧셈의 결합법칙> 곱셈의 결합법

<표 Ⅳ-1> 연산의 성질 과제에서 학년별 정답의 빈도와 평균 정답률

구 분		덧셈의 교환법칙	덧셈의 결합법칙	곱셈의 교환법칙	곱셈의 결합법칙	분배법칙	합 계
2학년 (N=648)	정답 빈도수	1280*	856	1374	706	798	5014
	평균 정답률	65.8%	44.0%	70.7%	36.3%	41.0%	51.56%
4학년 (N=688)	정답 빈도수	1730	1247	1700	1193	1162	7032
	평균 정답률	83.8%	60.4%	82.4%	57.8%	56.3%	68.14%
6학년 (N=751)	정답 빈도수	2065	1786	2119	1842	1691	9503
	평균 정답률	91.7%	79.3%	94.1%	81.8%	75.0%	84.38%
전 체 (N=2087)	정답 빈도수	5075	3889	5193	3741	3651	21549
	평균 정답률	81.1%	62.1%	82.9%	59.8%	58.3%	68.84%

* 2학년 학생 648명의 검사지를 분석한 결과 덧셈의 교환법칙과 관련된 3개 문항에서의 정답 빈도수는 각각 469, 353, 458이었으며, 이 세 수의 합인 1280을 표에 제시함.

칙> 분배법칙으로 나타났다. 특히, 덧셈에서의 결합법칙, 곱셈에서의 결합법칙, 그리고 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙에 대한 평균 정답률은 약 60% 수준에 머무르는 것으로 나타났는데, 4학년이 자연수 범위에서의 사칙연산이 완성되는 시기라는 점을 감안하면 기대 수준 보다 낮은 이해도를 보인다고 할 수 있다.

6학년 학생들의 전체 평균 정답률은 84.38%로 전반적으로 높은 성공률을 보였다. 연산의 성질별 평균 정답률은 덧셈의 교환법칙 91.7%, 덧셈의 결합법칙 79.3%, 곱셈의 교환법칙 94.1%, 곱셈의 결합법칙 81.8%, 분배법칙 75.0%로 나타났으며 높은 순으로 정리하면 곱셈의 교환법칙> 덧셈의 교환법칙> 곱셈의 결합법칙> 덧셈의 결합법칙> 분배법칙으로 나타났다. 특히, 6학년은 구체적인 수 상황에서 연산 법칙을 다루는 마지막 학년이라는 측면을 고려할 때, 결합법칙과 분배법칙에서의 정답률이 교환법칙에서의 정답률에 비해 10% 포인트 정도 더 낮게 나타났고, 평균 정답률이 80% 수준에 그쳤다는 점은 주의를 기울일 필요가 있다.

연산의 성질 이해 과제에서의 학년별 정답률을 분석한 결과 각 학년이 공통적으로 교환법칙 이해 과제에서는 높은 성공률을 보인 반면, 결합법칙과 분배법칙 이해 과제에서는 낮은 성공률을 보였다. 즉, 학생들은 교환법칙 이해 과제에서는 2학년에서 이미 60%이상의 정답률을 보이기 시작하여 6학년에서는 90%이상의 정답률을 보이는 것으로 나타났다. 이에 반해, 결합법칙 및 분배법칙 이해 과제에서는 4학년에 가서야 약 60% 정도의 정답률을 보이기 시작하고 6학년에 가서도 정답률이 82% 수준을 넘지 못하는 것으로 드러났다. 이러한 결과는 덧셈이나 곱셈에서의 교환법칙에 관한 이해는 상대적으로 더 이른 시기에 발달하기 시작하여 초등학교 기간 내에 비교적 탄탄한 개념적 기초를 형성하는 반면, 결합법칙이나 분배법칙에 관한 이해는 발달 시기도 늦고 이해 수준도 낮아 상대적으로 더 많은 주의가 필요하다고 할 수 있다.

한편, 각 연산의 법칙별로 학년 간 반응의 차이가 통계적으로 유의미한지는 학년별 분산분석 및 사후검정(Scheffe test)을 통해 알아보았다. 유의수준 0.05에서 분석한 결과 다섯 가지 연산 법칙 모두에서 2, 4, 6학년 간 성취 정도에 유의미한 차이가 있는 것으로 드러났다.

나. 문제 상황별 연산의 성질에 대한 이해

문제 상황별로 평균 정답률을 살펴보면,

<표 Ⅳ-2> 문제 상황별 정답의 빈도와 평균 정답률

구 분 (N=2087)		덧셈의 교합법칙	덧셈의 결합법칙	곱셈의 교환법칙	곱셈의 결합법칙	분배법칙	합 계
구체적인 수 상황에서 알맞은 식 구하기	정답 빈도수	1720*	1026	1851	1060	998	6655
	평균 정답률	82.4%	49.2%	88.7%	50.8%	47.8%	63.8%
임의의 수 상황에서 알맞은 식 구하기	정답 빈도수	1735	1297	1573	1183	1116	6904
	평균 정답률	83.1%	62.1%	75.4%	56.7%	53.5%	66.2%
연산법칙을 적용하여 □의 값 구하기	정답 빈도수	1620	1566	1769	1498	1537	7990
	평균 정답률	77.6%	75.0%	84.8%	71.8%	73.6%	76.6%
전 체	정답 빈도수	5075	3889	5193	3741	3651	21549
	평균 정답률	81.1%	62.1%	82.9%	59.8%	58.3%	68.84%

* 2, 4, 6학년 학생 총 2087명의 검사지를 분석한 결과 덧셈의 교환법칙 과제 중 구체적인 수 상황에서 알맞은 식 구하기 문항에서의 정답자 수는 1720명으로 나타남.

<표Ⅳ-2>에서와 같이 구체적인 수 상황에서 알맞은 식을 구하는 문항에서의 정답률은 63.8%, 임의의 수 상황에서 알맞은 식을 구하는 문항에서는 66.2%, 연산법칙을 적용하여 □의 값을 구하는 문항에서는 76.6%로, 연산법칙을 적용하여 □의 값을 구하기> 임의의 수 상황에서 알맞은 식을 구하기> 구체적인 수 상황에서 알맞은 식을 구하기의 순으로 높게 나타났다. 여기서 특히, 구체적인 수 상황에서의 정답률이 다른 문제 상황에서의 정답률에 비해 가장 낮게 나타났다는 사실에 주의를 기울일 필요가 있다. 물론 임의의 수 상황의 과제가 연산법칙을 증명하거나 높은 수준의 정당화를 요구하는 것이 아니라 연산 법칙을 암묵적으로 이해하고 있는지를 파악하는 기초적인 문항이었다. 그러나 그렇다 하더라도 구체적인 수 상황에서의 정답률이 임의의 수 상황에서의 과제에 비해 더 저조하게 나타난 점은 매우 주목할 만하다. 이러한 결과는 초등학생들이 연산의 법칙을 성공적으로 일반화할 수 있는 가능성은 높은 편이나, 실제 초등 수업에서 학생들이 연산의 법칙을 이해하고 탐구할 수 있는 기회와 경험은 충분히 제시되지 못하고 있다는 사실을 단편적으로 보여준다고 할 수 있다.

구체적인 수 상황에서 알맞은 식을 구하는 문항에서의 정답률을 자세히 살펴보면, 덧셈의 교환법칙 82.4%, 덧셈의 결합법칙 49.2%, 곱셈의 교환법칙 88.7%, 곱셈의 결합법칙 50.8%, 분배법칙 47.8%로, 곱셈의 교환법칙> 덧셈의 교환법칙> 곱셈의 결합법칙> 덧셈의 결합법칙> 분배법칙의 순으로 높게 나타났다. 특히, 덧셈 및 곱셈의 교환법칙에서는 80%이상의 성공률을 보인 반면, 덧셈 및 곱셈의 결합법칙과 분배법칙에서의 정답률은 약 50% 수준으로 매우 낮은 성공률을 보였다. 연산의 법칙에 상관없이, 구체적인 수가 주어진 상황에서는 직접 계산을 통해 연산 법칙이 성립하는지를 확인할 수 있다는 점을 감안할 때, 결합법칙 및 분배법칙에서의 정답률이 교환법칙에서 보다 30% 포인트 이상 더 낮게 나타난 점은 주목할 만하다.

임의의 수 상황에서 알맞은 식을 구하는 문항에서의 정답률은, 덧셈의 교환법칙 83.1%, 덧

셈의 결합법칙 62.1%, 곱셈의 교환법칙 75.4%, 곱셈의 결합법칙 56.7%, 분배법칙 53.5%로, 덧셈의 교환법칙> 곱셈의 교환법칙> 덧셈의 결합법칙> 곱셈의 결합법칙> 분배법칙의 순으로 높게 나타났다. 특히, 덧셈 및 곱셈의 교환법칙에서는 75%이상의 성공률을 보였는데, 구체적인 수가 주어져있지 않아 직접 계산하여 확인할 수 없기 때문에 문제를 해결하기 위해서는 연산의 법칙이 성립하는지를 예상해 보아야 한다는 측면에서 학생들이 보인 성공률은 꽤 고무적이라고 할 수 있다.

연산 법칙을 적용하여 □의 값을 구하는 문항에서의 정답률을 살펴보면, 덧셈의 교환법칙 77.6%, 덧셈의 결합법칙 75.0%, 곱셈의 교환법칙 84.8%, 곱셈의 결합법칙 71.8%, 분배법칙 73.6%로, 곱셈의 교환법칙> 덧셈의 교환법칙> 덧셈의 결합법칙> 분배법칙> 곱셈의 결합법칙의 순으로 높게 나타났다. 특히, 모든 연산의 법칙에서 70% 이상의 정답률을 보인 것은 매우 주목할 만하다. 그러나 학생들이 연산의 법칙을 적용하지 않고 단순히 직접 계산을 통해 □의 값을 구했을 가능성을 완전히 배제할 수는 없기 때문에 본 문제 상황에서의 정답률이 전적으로 연산 법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는 학생의 비율을 드러낸다고 해석하기에는 무리가 있다. 그러나 이런 점을 감안하더라도 본 문제 상황에서의 정답률은 학생들의 연산의 성질에 대한 이해 정도를 파악하기 위한 하나의 지표로서 역할을 한다고 볼 수 있다.

2. 교환법칙에 대한 이해

가. 덧셈의 교환법칙에 대한 이해

덧셈의 교환법칙에 대한 학생들의 반응을 자세히 분석해 보면 다음과 같다. <표 Ⅳ-3>에 제시된 바와 같이, 1번 문항은 구체적인 수 상황에서 덧셈의 교환법칙을 이해하고 있는가를 알아보기 위한 것으로, 두 수의 순서를 바꾸어 더해도 결과가 같다는 것을 이해하고 두 식 ① 375+9248과 ② 9248+375를 모두 선택할 수 있는지를 묻는 문항이다. 1번 문항에서의 오답 반응으로는 ①번만 정답으로 선택한 학생의 비율이 2, 4, 6학년 각각 13.0%, 6.1%, 4.9%로 가장 높게 나타났다. 이러한 학생들은 문제 상황에서 두 수를 언급하는 순서와 동일하게 덧셈식에서도 375를 먼저 9248을 나중에 제시한 375+9248만을 바른 식으로 답했다. 두 번째로 높은 오답 반응으로는 ②번만 정답으로 선택한 경우였는데, 2, 4, 6학년 각각 3.7%, 4.4%, 3.5%의 반응 비율을 보였다. 이러한 학생들은 문제 상황에서 두 수를 언급하는 순서와 반대인 덧셈식을 선택했는데, 9248을 먼저 제시하고 375를 나중에 제시하여 9248+375만을 바른 식으로 답하였다. 이처럼 덧셈의 교환법칙을 인식하지 못하고 ①번과 ②번 중 어느 한 가지 식만 선택하는 학생들의 경향은 학년이 올라갈수록 다소 낮아지기는 하나 고학년의 경우에도 완전히 개선되지는 않는 것으로 나타났다.

2번 문항은 덧셈의 교환법칙을 적용하여 □의 값을 구하는 문항으로 2학년에서 54.5%의 매우 낮은 성공률을 보였지만, 6학년에서는 95.5%로 다른 문항에 비해 꽤 높은 성공률을 보였다. 2번 문항에서 가장 많은 학생들이 보인 오답으로는 ③번을 선택한 경우로, 2학년의 38.9%, 4학년의 16.6%, 6학년의 4.1%가 덧셈의 교환법칙에 대한 인식 없이 두 수의 덧셈 결과를 답으로 택했다. 이는 특정한 수를 활용하여 덧셈의 교환법칙을 표현하거나 덧셈의 교환법칙을 적용하여 문제를 해결하기 위해서는 등호에 대한 관계적 이해가 바탕이 되어야 함을 단편적으로 보여준다.

3번 문항은 임의의 수 상황에서도 덧셈의 교

<표 Ⅳ-3> 덧셈의 교환법칙 과제에 대한 학생들의 반응

문 항	구분		2학년		4학년		6학년	
			빈도수	응답률	빈도수	응답률	빈도수	응답률
1. 빨간색 사과가 375개, 파란색 사과가 9248개 있습니다. 사과가 모두 몇 개인지를 구하려고 할 때, 식을 바르게 나타낸 것을 <u>모두</u> 고르시오. ❶ 375 + 9248 ❷ 9248 + 375 ③ 375 × 9248 ④ 9248 − 375	정답	❶, ❷	469	72.4%	588	85.8%	663	88.3%
	오답	❶	84	13.0%	42	6.1%	37	4.9%
		❷	24	3.7%	30	4.4%	26	3.5%
		❶, ③	13	2.0%	6	0.9%	1	0.1%
		❶, ❷, ③	20	3.1%	0	0%	1	0.1%
		기타	34	5.3%	19	2.7%	21	2.8%
		계	175	27.0%	97	14.1%	86	11.55
	무응답		4	0.6%	3	0.4%	1	0.1%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
2. □안에 알맞은 수는 어느 것입니까? 2738 + 346 = □ + 2738 ❶ 346 ② 2738 ③ 3084 ④ 5822	정답	❶	353	54.5%	550	79.9%	717	95.5%
	오답	②	12	1.9%	9	1.3%	2	0.3%
		③	252	38.9%	114	16.6%	31	4.1%
		④	19	2.9%	11	1.6%	1	0.1%
		계	283	43.7%	134	19.5%	34	4.5%
	무응답		12	1.9%	4	0.6%	0	0%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
3. 오른손에는 ○개의 구슬이 있고, 왼손에는 △개의 구슬이 있습니다. 양손에 있는 구슬의 총 개수를 바르게 나타낸 것을 <u>모두</u> 고르시오. ① ○ ② △+△ ❸ ○+△ ❹ △+○	정답	❸, ❹	458	70.7%	592	86.0%	685	91.2%
	오답	❸	121	18.7%	62	9.0%	47	6.3%
		❹	38	5.9%	14	2.0%	11	1.5%
		기타	24	3.9%	16	2.1%	8	1.1%
		계	183	28.2%	92	13.4%	66	8.8%
	무응답		7	1.1%	4	0.6%	0	0%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%

환법칙이 성립한다는 것을 이해하고 두 식 ③ ○+△과 ④ △+○를 모두 선택할 수 있는지를 묻는 문항이다. 이 때, 1번 문항과는 달리 문제 상황에 제시된 임의의 두 수를 직접 계산해 볼 수 없기 때문에, ○+△과 △+○이 서로 같다는 것을 판단하기 위해서는 암묵적으로라도 덧셈의 교환법칙에 대한 이해가 바탕이 되어야 한다. 그러나 1번과 3번 문항의 정답률을 비교하면, 2학년 72.4%와 70.7%, 4학년 85.8%와 86.0%, 6학년 88.3%와 91.2%로 2학년의 경우에만 임의의 수 상황에서의 정답률이 구체적인 수 상황에서의 정답률에 비해 다소 낮게 나타났을 뿐 4, 6학년의 경우 오히려 임의의 수 상황에서의 정답률이 더 높은 것으로 나타났다. 즉, 학생들은 구체적인 수 상황 못지않게 혹은 그 이상으로 임의의 수 상황에서도 두 수의 합을 a+b와 b+a의 두 가지 형태로 표현할 수 있음을 이해하는 데 성공적이었다. 이러한 결과는 매우 주목할 만한 것으로, 이를 통해 학생들이 임의의 수 상황에서의 문항을 특별히 더 어려워하지는 않는다는 사실과 초등학생들도 충분히 덧셈의 교환법칙에서 임의의 수를 다룰 수 있다는 가능성을 알 수 있었다.

3번 문항에서의 오답 반응으로는 ③번만 정답으로 선택한 학생의 비율이 2, 4, 6학년 각각 18.7%, 9.0%, 6.3%로 가장 높게 나타났다. 이러한 학생들은 문제 상황에서 임의의 두 수를 언급하는 순서와 동일하게 덧셈식에서도 ○를 먼저 △를 나중에 제시한 ○+△만을 바른 식으로 답했다. 두 번째로 높은 오답 반응으로는 ④번

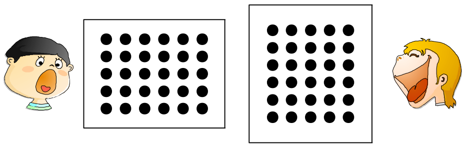
만 정답으로 선택한 경우였는데, 2, 4, 6학년 각각 5.9%, 2.0%, 1.5%의 반응 비율을 보였다. 이처럼 임의의 수 상황에서도 덧셈의 교환법칙을 인식하지 못하고 ③번과 ④번 중 어느 한 가지 식만 선택하는 학생들의 경향은 학년이 올라갈수록 다소 낮아지기는 하나 고학년의 경우에도 완전히 개선되지는 않는 것으로 나타났다.

나. 곱셈의 교환법칙에 대한 이해

곱셈의 교환법칙 과제에 대한 학생들의 반응을 자세히 분석해 보면 다음과 같다. <표 Ⅳ-4>에 제시된 바와 같이, 4번 문항은 주어진 문제 상황에 알맞은 식을 구하되, 두 수를 바꾸어 곱해도 결과가 같다는 것을 직관적으로 이해하고 두 가지 형태의 식을 모두 옳은 식으로 판단할 수 있는지를 묻는 문항이다. 오답 반응으로는 ①번을 선택한 학생의 비율이 2, 4, 6학년 각각 12.3%, 6.7%, 2.1%로 다른 오답에 비해 가장 높게 나타났다. 이러한 학생들은 문제 상황에서 앞에 제시된 예인 명수의 방법 '5×6'만을 바른 식으로 답했다. 두 번째로 높은 오답 반응으로는 ②번을 정답으로 선택한 경우였는데, 2, 4, 6학년 각각 6.6%, 2.0%, 0.7%의 반응 비율을 보였다. 이러한 학생들은 문제 상황에서 뒤에 제시된 예인 민기의 방법 '6×5'만을 바른 식으로 답했다. 이처럼 곱셈의 교환법칙을 인식하지 못하고 ①번과 ②번을 선택한 학생들의 경향은 학년이 올라갈수록 눈에 띄게 낮아졌으며, 고학년의 경우 매우 미미하게 나타났다.

5번 문항은 직접적인 계산이 아닌, 두 수의

<표 Ⅳ-4> 곱셈의 교환법칙 과제에 대한 학생들의 반응

문 항	구분		2학년 빈도수	2학년 응답률	4학년 빈도수	4학년 응답률	6학년 빈도수	6학년 응답률
4. 계란 한판에 놓인 계란의 총 개수를 구하려고 합니다. 명수는 5×6으로 값을 구했고, 민기는 6×5로 값을 구했습니다. 바르게 구한 사람은 누구입니까?  <명수의 방법: 5×6> <민기의 방법: 6×5> ① 명수 ② 민기 ❸ 둘다 맞음 ④ 둘다 잘못됨	정답	❸	508	78.4%	621	90.3%	722	96.1%
	오답	①	80	12.3%	46	6.7%	16	2.1%
		②	43	6.6%	14	2.0%	5	0.7%
		④	13	2.0%	5	0.7%	6	0.8%
		계	136	21.1%	65	9.4%	27	3.6%
	무응답		4	0.6%	2	0.3%	2	0.3%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
5. □안에 알맞은 수는 어느 것입니까? $163 \times 24 = 24 \times \boxed{}$ ① 24 ❷ 163 ③ 3912 ④ 3936	정답	❷	468	72.2%	578	84.0%	723	96.3%
	오답	①	58	9.0%	20	2.9%	1	0.1%
		③	76	11.7%	74	10.8%	16	2.1%
		④	29	4.5%	15	2.2%	6	0.8%
		계	163	25.2%	109	15.8%	23	3.1%
	무응답		2	0.3%	1	0.1%	5	0.7%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
6. 순영이는 "어떤 수×56"을 계산해야 하는데, 순서를 바꾸어 "56×어떤 수"를 계산했더니 392가 나왔습니다. 순영이가 순서를 바꾸지 않고 그대로 곱했다면, 답은 어떻게 나왔을까요? ① 392보다 더 큰 수가 나올 것이다. ② 392보다 더 작은 수가 나올 것이다. ❸ 똑같이 392가 나올 것이다. ④ 직접 계산해봐야만 알 수 있다.	정답	❸	398	61.4%	501	72.8%	674	89.7%
	오답	①	76	11.7%	65	9.4%	20	2.7%
		②	103	15.9%	59	8.6%	33	4.4%
		④	60	9.3%	55	8.0%	19	2.5%
		계	239	36.9%	179	26.0%	72	9.6%
	무응답		11	1.7%	8	1.0%	5	0.7%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%

순서를 바꾸어 곱해도 결과가 같다는 곱셈의 성질을 이용하여 □의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다. 5번 문항에 대하여 학년별 정답률은 2학년 72.2%, 4학년 84.0%, 6학년 96.3%로 나타났는데, 이는 임의의 수 상황에서 교환법칙을 이해하는 6번 문항에서의 각 학년별 정답률보다 더 높은 것으로 드러났다. 학생들의 오답 반응으로는 ③번을 선택한 경우의 학생들이 가장 많았는데, 구체적으로 2학년 11.7%, 4학년 10.8%, 6학년 2.1%에 해당하는 학생들이 곱셈의 교환법칙에 대한 인식 없이 두 수의 곱셈 결과를 답으로 택했다는 것을 드러낸다.

6번 문항은 어떤수와 56과의 곱을 ″어떤수×56″으로 구했을 때 392가 나왔다면 ″56×어떤수″로 구했을 때에는 얼마가 나올 것인지를 묻는 문항이다. 이 때, 4번 문항과는 달리 문제 상황에 두 수가 제시되지 않았기 때문에 적절하게 반응하기 위해서는 암묵적으로라도 곱셈의 교환법칙에 대한 이해가 바탕이 되어야 한다. 4번 문항과 6번 문항의 정답률을 비교하면, 2학년 78.4%와 61.4%, 4학년 90.3%와 72.8%, 6학년 96.1%와 89.7%로 학년에 따라 정도의 차이는 있으나, 6번 문항에서의 정답률이 4번 문항에 비해 더 낮은 것으로 나타났다. 특히, 이러한 정답률의 차이는 2학년 17% 포인트, 4학년 17.5% 포인트, 6학년 6.4% 포인트로 저·중학년에서 특히 두드러지게 나타났다.

6번 문항에서의 오답 반응으로는 어떤수와 56과의 곱을 ″어떤수×56″로 구했을 때 392가 나왔을 때, ″56×어떤수″로 구했을 때에는 392보다 더 크거나 혹은 더 작은 값이 나올 것이라고 반응한 학생의 비율이 높게 나타났다. 이러한 결과를 통해 상당수의 학생들이 ″어떤수×56″와 ″56×어떤수″의 값이 서로 다르다는 잘못된 개념을 가지고 있다는 사실과 이러한 오개념은 고학년이 되어서도 쉽게 개선되지 않는다는 사실을 알 수 있었다.

3. 결합법칙에 대한 이해

가. 덧셈의 결합법칙에 대한 이해

덧셈의 결합법칙 과제에 대한 학생들의 반응을 자세히 분석해 보면 다음과 같다. <표 Ⅳ-5>에 제시된 바와 같이, 7번 문항은 세 수의 덧셈에서 뒤에서부터 계산한 수진이의 방법과 앞에서부터 계산한 상화의 방법이 모두 옳다는 것을 알고 있는지를 묻는 문항이다. 7번 문항에서의 오답 반응으로는 앞에서부터 계산한 상화의 방법만을 옳은 방법으로 판단하여 ②번을 선택한 학생들의 비율이 2학년의 43.2%, 4학년의 51.7%, 6학년의 28.4%로 가장 높게 나타났다. 특히, ②번을 선택한 학생들의 비율은 2, 4학년의 경우 정답의 비율보다도 더 크게 나타났다. 이러한 결과는 세 수의 덧셈과 관련하여 상당히 많은 학생들이 앞에서부터 계산하는 방법은 옳고 뒤에서부터 계산하는 방법은 틀린 것으로 잘못 이해하고 있음을 단편적으로 드러내며 이러한 경향은 6학년이 되어서도 쉽게 개선되지 않는 것으로 나타났다.

8번 문항은 직접적인 계산이 아닌, 덧셈의 결합법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문항으로 <표 Ⅳ-5>에 제시된 바와 같이, 학년별 정답률은 2학년에서 52.6%, 4학년에서 77.0%, 6학년에서 92.5%로 7번과 9번 문항에 비해 꽤 높은 성공률을 보였다. 가장 많은 학생들이 보인 오답으로는 ④번을 선택한 경우로, 2학년의 40.0%, 4학년의 14.8%, 6학년의 5.1%가 덧셈의 결합법칙에 대한 인식 없이 등호 앞에 주어진 세 수의 합의 결과를 답으로 택했다. 이는 앞에서 살펴본 덧셈의 교환법칙에서와 마찬가지로, 식 표현을 통해 덧셈의 결합법칙을 적절하게 표현하고 적용할 수 있기 위해서는 등호에 대한 관계적 이해가 선행되어야 함을 보여준다.

<표 Ⅳ-5> 덧셈의 결합법칙 과제에 대한 학생들의 반응

문 항	구분		2학년		4학년		6학년	
			빈도수	응답률	빈도수	응답률	빈도수	응답률
7. 다음은 수진이와 상화가 세 수의 덧셈을 계산한 것입니다. 바르게 계산한 사람은 누구입니까? 67+85+15=67+100=167 (① 85+15, ② 67+100)	67+85+15=152+15=167 (① 67+85, ② 152+15) <수진이의 방법 > <상화의 방법> ① 수진 ② 상화 ❸ 둘 다 맞음 ④ 둘 다 잘못됨	**정답**	**❸**	**235**	**36.3%**	**283**	**41.1%**	**508**	**67.6%**
	오답	①	84	13.0%	32	4.7%	26	3.5%
		②	280	43.2%	356	51.7%	213	28.4%
		④	36	5.6%	12	1.7%	2	0.3%
		계	400	61.7%	400	58.1%	241	32.1%
	무응답		13	2.0%	5	0.7%	2	0.3%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
8. □안에 알맞은 수는 어느 것입니까? 687 + 75 + 25 = □ + 100 ① 887 ② 787 ③ 762 ❹ 687	정답	❹	**341**	**52.6%**	**530**	**77.0%**	**695**	**92.5%**
	오답	①	26	4.0%	24	3.5%	6	0.8%
		②	259	40.0%	102	14.8%	38	5.1%
		③	14	2.2%	28	4.1%	12	1.6%
		계	299	46.1%	154	22.4%	56	7.5%
	무응답		8	1.2%	4	0.6%	0	0%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
9. 삼형제가 가진 돈이 모두 얼마인지 구하려고 합니다. 민수는 첫째와 둘째가 모은 돈을 합한 후, 셋째가 모은 돈을 합하여 5600원을 구했습니다. 경희는 둘째와 셋째가 모은 돈을 먼저 합한 후에, 첫째가 모은 돈을 합해 보았습니다. 경희가 구한 돈은 얼마가 되겠습니까? ① 민수가 구한 5600 원보다 더 큰 값이 나올 것이다. ② 민수가 구한 5600 원보다 더 작은 값이 나올 것이다. ❸ 민수가 구한 것과 똑같이 5600 원이 나올 것이다. ④ 직접 계산해봐야만 알 수 있다.	**정답**	**❸**	**280**	**43.2%**	**434**	**63.1%**	**583**	**77.6%**
	오답	①	165	25.5%	94	13.7%	51	6.8%
		②	87	13.4%	73	10.6%	70	9.3%
		④	102	15.7%	71	10.3%	42	5.6%
		계	354	54.6	238	34.6%	163	21.7%
	무응답		14	2.2%	16	2.3%	5	0.7%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%

9번 문항은 세 수를 앞에서부터 더했을 때 5600이 나왔다면 뒤에서부터 더했을 때에는 얼마가 나올 것인지를 묻는 문항이다. 이 때, 7번 문항과는 달리 문제 상황에 직접 세 수가 제시되지 않았기 때문에 적절하게 반응하기 위해서는 암묵적으로라도 덧셈의 결합법칙에 대한 이해가 바탕이 되어야 한다. 그러나 7번 문항과 9번 문항의 정답률을 비교하면, 2학년 36.4%와 43.2%, 4학년 41.1%와 63.1%, 6학년 67.6%와 77.6%로, 각 학년에서 모두 7번 문항에서의 정답률보다 오히려 9번 문항에서의 정답률이 더 높은 것으로 드러났다.

이러한 결과는 상당수의 학생들이 임의의 수 상황에서는 세 수를 앞에서부터 더한 결과와 뒤에서부터 더한 결과가 서로 같을 것이라고 예상하고 있음에도 불구하고 실제로 구체적인 수를 계산하는 상황에서는 세 수의 합을 앞에서부터 계산하는 것만을 옳은 방법으로 잘못 판단하고 있음을 단편적으로 보여준다고 할 수 있다.

나. 곱셈의 결합법칙에 대한 이해

곱셈의 결합법칙 과제에 대한 학생들의 반응을 자세히 분석해 보면 다음과 같다. <표 Ⅳ-6>에 제시된 바와 같이, 10번 문항은 세 수의 곱셈에서 뒤에서부터 계산한 민지의 방법과 앞에서부터 계산한 경수의 방법이 모두 옳다는 것을 알고 있는지를 묻는 문항으로 2학년의 36.6%, 4학년의 41.7%, 6학년의 71.4%만이 적절한 반응

<표 Ⅳ-6> 곱셈의 결합법칙 과제에 대한 학생들의 반응

<table>
<tr><th rowspan="2">문 항</th><th rowspan="2" colspan="2">구분</th><th colspan="2">2학년</th><th colspan="2">4학년</th><th colspan="2">6학년</th></tr>
<tr><th>빈도수</th><th>응답률</th><th>빈도수</th><th>응답률</th><th>빈도수</th><th>응답률</th></tr>
<tr><td rowspan="7">10. 다음은 경수와 민지가 세 수의 곱셈을 계산한 것입니다. 바르게 계산한 사람은 누구입니까?
14×2×5=14×10=140 ① ②
14×2×5=28×5=140 ① ②
<경수의 방법 > <민지의 방법>
① 경수 ② 민지 ❸ 둘 다 맞음 ④ 둘 다 잘못됨</td><td>정답</td><td>❸</td><td>237</td><td>36.6%</td><td>287</td><td>41.7%</td><td>536</td><td>71.4%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">오답</td><td>①</td><td>70</td><td>10.8%</td><td>42</td><td>6.1%</td><td>10</td><td>1.3%</td></tr>
<tr><td>②</td><td>266</td><td>41.0%</td><td>342</td><td>49.7%</td><td>195</td><td>26.0%</td></tr>
<tr><td>④</td><td>47</td><td>7.3%</td><td>10</td><td>1.5%</td><td>6</td><td>0.8%</td></tr>
<tr><td>계</td><td>383</td><td>59.1%</td><td>394</td><td>57.3%</td><td>211</td><td>28.1%</td></tr>
<tr><td colspan="2">무응답</td><td>28</td><td>4.3%</td><td>7</td><td>1.0%</td><td>4</td><td>0.5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">합계</td><td>648</td><td>100%</td><td>688</td><td>100%</td><td>751</td><td>100%</td></tr>
<tr><td rowspan="7">11. □안에 알맞은 수는 어느 것입니까?
$37 \times 5 \times 2 = \boxed{} \times 10$
① 380 ② 370 ③ 185 ❹ 37</td><td>정답</td><td>❹</td><td>267</td><td>41.2%</td><td>540</td><td>78.5%</td><td>691</td><td>92.0%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">오답</td><td>①</td><td>30</td><td>4.6%</td><td>10</td><td>1.5%</td><td>3</td><td>0.4%</td></tr>
<tr><td>②</td><td>156</td><td>24.1%</td><td>96</td><td>14.0%</td><td>40</td><td>5.3%</td></tr>
<tr><td>③</td><td>175</td><td>27.0%</td><td>36</td><td>5.2%</td><td>12</td><td>1.6%</td></tr>
<tr><td>계</td><td>361</td><td>55.7%</td><td>142</td><td>20.6%</td><td>55</td><td>7.3%</td></tr>
<tr><td colspan="2">무응답</td><td>20</td><td>3.1%</td><td>6</td><td>0.9%</td><td>5</td><td>0.7%</td></tr>
<tr><td colspan="2">합계</td><td>648</td><td>100%</td><td>688</td><td>100%</td><td>751</td><td>100%</td></tr>
<tr><td rowspan="7">12. 미혜는 어떤 수에 15를 먼저 곱한 후 9를 곱하여 1080을 얻었습니다. 수진이는 15에 9를 먼저 곱하여 135를 얻은 후, 어떤 수에 135를 곱했습니다. 수진이가 구한 답은 얼마가 되겠습니까?
① 미혜가 구한 1080 보다 더 큰 값이 나올 것이다.
② 미혜가 구한 1080 보다 더 작은 값이 나올 것이다.
❸ 미혜가 구한 것과 똑같이 1080이 나올 것이다.
④ 직접 계산해봐야만 알 수 있다.</td><td>정답</td><td>❸</td><td>202</td><td>31.2%</td><td>366</td><td>53.2%</td><td>615</td><td>81.9%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">오답</td><td>①</td><td>193</td><td>29.8%</td><td>140</td><td>20.3%</td><td>65</td><td>8.7%</td></tr>
<tr><td>②</td><td>151</td><td>23.3%</td><td>86</td><td>12.5%</td><td>38</td><td>5.1%</td></tr>
<tr><td>④</td><td>77</td><td>11.9%</td><td>74</td><td>10.8%</td><td>26</td><td>3.5%</td></tr>
<tr><td>계</td><td>421</td><td>65.0%</td><td>300</td><td>43.6%</td><td>129</td><td>17.2%</td></tr>
<tr><td colspan="2">무응답</td><td>25</td><td>3.9%</td><td>22</td><td>3.2%</td><td>7</td><td>0.9%</td></tr>
<tr><td colspan="2">합계</td><td>648</td><td>100%</td><td>688</td><td>100%</td><td>751</td><td>100%</td></tr>
</table>

을 한 것으로 나타났다. 10번 문항에서의 오답 반응으로는 앞에서부터 계산한 민지의 방법만을 옳은 방법으로 판단하여 ②번을 선택한 학생들의 비율이 2학년의 41.0%, 4학년의 49.7%, 6학년의 26.0%로 가장 높게 나타났다. 특히, ②번을 선택한 학생들의 비율은 2, 4학년의 경우 정답율보다도 더 크게 나타났다. 이러한 결과는 세 수의 곱셈과 관련하여 상당히 많은 학생들이 앞에서부터 계산하는 방법은 옳고 뒤에서부터 계산하는 방법은 틀린 것으로 잘못 이해하고 있음을 단편적으로 드러내며 이러한 경향은 4학년에서 가장 두드러졌으며 6학년이 되어서도 쉽게 개선되지 않는 것으로 나타났다.

11번 문항은 곱셈의 결합법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문항으로 학년별 정답률은 2학년에서 41.2%, 4학년에서 78.5%, 6학년에서 92.0%로 나타났다(<표 Ⅳ-6> 참조). 가장 많은 학생들이 보인 오답으로는, 2학년에서는 27.0%가 반응한 ③번으로 등호의 앞에 제시된 세 수 중에서 앞의 두 수의 곱을 답으로 선택한 경우이다. 4, 6학년에서는 각각 14.0%, 5.3%가 반응한 ②번으로 세 수의 곱을 답으로 선택한 경우에 해당한다.

12번 문항은 세 수를 앞에서부터 곱한 결과 1080이 나왔을 때 뒤에서부터 곱한다면 얼마가 나올 것인지를 묻는 문항으로, 문제 상황에 직

접 세 수가 제시되지 않았기 때문에 적절하게 반응하기 위해서는 곱셈의 결합법칙에 대한 이해가 선행되어야 한다. 검사 결과 정답을 선택한 학생의 비율은 2학년의 31.2%, 4학년의 53.2%, 6학년의 81.9%로 나타났다. 이처럼 12번 문항에서의 정답률은 4학년의 경우 10번 문항에서의 정답률에 비해 11.5% 포인트 더 높고, 6학년의 경우 10.5% 포인트 더 높은 것으로 드러났다. 이러한 결과를 통해 상당수의 학생들이 임의의 수 상황에서는 세 수를 앞에서부터 곱한 결과와 뒤에서부터 곱한 결과가 서로 같을 것이라고 예상하고 있음에도 불구하고, 실제로 구체적인 수를 계산하는 상황에서는 세 수의 곱을 앞에서부터 계산하는 방법과 뒤에서부터 계산하는 방법이 모두 옳은가에 관해 적절한 답을 하지 못하고 있음을 알 수 있었다.

한편, 12번 문항에서의 오답 반응으로는 2, 4, 6학년 모두 앞에서부터 곱한 결과 값인 1080보다 더 클 것이라고 반응한 학생이 2학년의 29.8%, 4학년의 20.3%, 6학년의 8.7%로 가장 많았고, 1080보다 더 작을 것이라고 반응한 학생이 2학년의 23.3%, 4학년의 12.5%, 6학년의 5.1%로 그 다음으로 가장 많은 것으로 나타났다.

4. 분배법칙에 대한 이해

분배법칙 과제에 대한 학생들이 반응을 자세히 분석해 보면 다음과 같다. <표 Ⅳ-7>에 제시된 바와 같이, 13번 문항은 주어진 문제 상황에 알맞은 식을 구하는 것으로 32개씩 2봉지와 32개씩 4봉지의 합은 (32×2)+(32×4)로 구할 수도 있지만, 32×6으로도 구할 수 있다는 것을 알고 두 가지 형태의 식 ②와 ③을 모두 찾을 수 있는지를 묻는 문항이다. 검사 결과 정답을 선택한 학생들은 2학년의 33.3%, 4학년의 40.4%, 6학년의 67.0%로 비교적 낮은 성공률을 보였다. 13번 문항에서 가장 많은 학생들이 보인 오답 반응으로는 2, 4, 6학년 모두 ②와 ④를 선택한 경우였는데, 2학년의 15.1%, 4학년의 18.8%, 6학년의 11.5%로 나타났다. 이는 상당수의 학생들이 32개씩 2봉지와 32개씩 4봉지의 합에 대해 '32×6'보다 '32×2×4'를 더 적절한 식으로 판단하고 있음을 보여준다.

14번 문항은 분배법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문항으로 학년별 정답률은 2학년에서 55.6%, 4학년에서 76.2%, 6학년에서 87.0%로 나타났다. <표 Ⅳ-7>에 제시된 바와 같이, 가장 많은 학생들이 보인 오답의 유형은 2학년과 4·6학년이 서로 다르게 나타났다. 2학년에서는 ④번을 선택한 학생이 13.3%로 가장 많았는데, 4·6학년에서는 ④번을 선택한 학생이 각각 3.1%, 1.7%로 비교적 미미하게 나타났다. 즉, 2학년의 경우 상당수의 학생들이 등호의 양변에 제시된 값들을 함께 고려하지 못하고 □의 앞에 제시된 식 (74 × 20)+74에만 주목하는 특징을 보였으며, 이러한 양상은 학년이 올라가면서 현저하게 줄어드는 것으로 드러났다. 한편, 4, 6학년에서 가장 많은 학생들이 선택한 오답은 ②번으로 4학년에서 11.2%, 6학년에서 8.4%에 해당하는 학생들이 분배법칙을 이해하지 못하고, 단순히 등호의 좌변에 제시된 식 74 × 23에서 23을 답으로 판단하는 오류를 보였다. 특히, ②번을 선택한 2학년 학생의 비율은 4학년에서의 비율과 유사한 수치인 11.4%로 나타났는데, 이러한 결과는 등호의 양변에 제시된 값들을 함께 고려하려는 시도는 했지만, 분배법칙을 이해하지 못하는 학생들이 적지 않으며 이러한 양상은 고학년이 되더라고 크게 개선되지는 않는다는 것을 보여준다.

15번 문항은 분배법칙에 대한 이해를 바탕으로 (□×40)+(□×9)의 값이 1862일 때, □×49의 값은 어떻게 나올지를 묻는 문항으로, 검사 결과

<표 Ⅳ-7> 분배법칙 과제에 대한 학생들의 반응

문 항	구분		2학년 빈도수	2학년 응답률	4학년 빈도수	4학년 응답률	6학년 빈도수	6학년 응답률
13. 박하사탕 한 봉지에는 사탕이 32개씩 들어있습니다. 형철이는 어제 2봉지를 샀고, 오늘 4봉지를 더 샀습니다. 형철이가 가지고 있는 사탕의 총 개수를 바르게 나타낸 것을 모두 고르시오.  <어제: 32개씩2봉지> <오늘: 32개씩4봉지 > ① (32 × 2) + 4 ❷ (32 × 2) + (32 × 4) ❸ 32 × 6 ④ 32 × 2 × 4	정답	❷,❸	**216**	**33.3%**	**278**	**40.4%**	**503**	**67.0%**
	오답	①	16	2.5%	5	0.7%	1	0.1%
		❷	57	8.8%	31	4.5%	8	1.1%
		❸	37	5.7%	10	1.5%	9	1.2%
		④	12	1.9%	10	1.5%	5	0.7%
		①,❷	37	5.7%	15	2.2%	7	0.9%
		①,❸	14	2.2%	10	1.5%	3	0.4%
		①,④	27	4.2%	21	3.1%	18	2.4%
		❷,④	98	15.1%	129	18.8%	86	11.5%
		❸,④	39	6.0%	49	7.1%	28	3.7%
		①,❷,④	18	2.8%	14	2.0%	4	0.5%
		❷,❸,④	37	5.7%	102	14.8%	75	10.0%
		기타	16	2.5%	9	1.3%	3	0.4%
		계	408	62.3%	405	58.9%	247	32.9%
	무응답		24	3.7%	5	0.7%	1	0.1%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
14. □안에 알맞은 수는 어느 것입니까? 74 × 23 = (74 × 20)+(74 × $\boxed{}$) ❶ 3 ② 23 ③ 43 ④ 1554	정답	❶	**360**	**55.6%**	**524**	**76.2%**	**653**	**87.0%**
	오답	②	74	11.4%	77	11.2%	63	8.4%
		③	83	12.8%	54	7.8%	16	2.1%
		④	86	13.3%	21	3.1%	13	1.7%
		계	243	37.5%	152	22.1%	92	12.3%
	무응답		45	6.9%	12	1.7%	6	0.8%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%
15. 어떤 수에 40을 곱한 것과 어떤 수에 9를 곱한 것을 더했더니 1862가 되었습니다. 어떤 수에 49를 곱한다면, 답은 얼마가 되겠습니까? ① 1862 보다 더 큰 값이 나올 것이다. ② 1862 보다 더 작은 값이 나올 것이다. ❸ 똑같이 1862 가 나올 것이다. ④ 직접 계산해봐야만 알 수 있다.	정답	❸	**222**	**34.3%**	**360**	**52.3%**	**534**	**71.1%**
	오답	①	197	30.4%	136	19.8%	84	11.2%
		②	110	17.0%	102	14.8%	100	13.3%
		④	75	11.6%	68	9.9%	24	3.2%
		계	382	59.0%	306	44.5%	208	27.7%
	무응답		44	6.8%	22	3.1%	9	1.2%
	합계		648	100%	688	100%	751	100%

정답을 선택한 학생의 비율은 2학년의 34.3%, 4학년의 52.3%, 6학년의 71.1%로 나타났다(<표 Ⅳ-7> 참조). 오답으로는 2, 4학년에서는 1862보다 더 큰 값이 나올 것이라고 반응한 학생이 가장 많았고 6학년에서는 1862보다 더 작은 값이 나올 것이라고 반응한 학생이 가장 많았다. 이처럼 결과값이 1862와 다를 것이라고 판단한 학생은 2학년의 47.4%, 4학년의 34.6%, 6학년의 24.5%로 나타났다. 이러한 결과는 교육과정 해설서를 통해 학생들에게 분배법칙에 대한 이해를 바탕으로 여러

자리 수끼리의 곱셈 원리를 지도할 것을 권고하고는 있으나, 실제 수업에서는 분배법칙을 명확하게 깨닫도록 하는 활동을 충분히 제시하지 않고 있기 때문인 것으로 유추해 볼 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 논의

분석 결과를 바탕으로 초등학교에서의 대수 지도 방안에 대한 시사점을 논의해 보면 다음과 같다. 첫째, 학생들이 연산 법칙을 충분히 이해하고 문제 해결 과정에 적극적으로 활용할 수 있도록, 덧셈 및 곱셈 수업에서 수와 연산의 성질을 보다 강조하여 다룰 필요가 있다. 본 연구에서 성공률이 상대적으로 낮게 나타났던 결합법칙과 분배법칙의 경우, 구체적인 수 상황에서의 정답률이 임의의 수 상황에서의 정답률에 비해 더 낮은 것으로 드러났다. 예를 들어, 덧셈의 결합법칙 과제에서 상당수의 학생들이 임의의 수 상황에서 세 수를 앞에서부터 더한 결과와 뒤에서부터 더한 결과가 서로 같을 것이라고 예상할 수 있음에도 불구하고, 구체적인 수를 대상으로 계산을 실행하는 상황에서는 세 수를 앞에서부터 계산하는 한 가지 방법만을 옳은 방법으로 선택하는 경향을 보였다. 이러한 결과는 초등학생들이 연산의 법칙을 성공적으로 일반화할 수 있는 가능성은 높은 편이나, 그에 비해 실제 학생들이 연산의 법칙을 이해하고 탐구할 수 있는 기회와 경험은 충분히 제시되지 못하고 있다는 사실을 단편적으로 보여준다고 할 수 있다.

둘째, 교과서에서 덧셈 및 곱셈에서의 결합법칙을 여러 학년에 걸쳐 더욱 명시적이고 지속적으로 다룰 필요가 있다. 초등학교에서 결합법칙을 이해하는 것은 필수적이다. Schifter, Monk, Russell, 그리고 Bastable(2008)은 수학적 분석을 경험할 수 있는 기회와 관련하여 초등 교육과정에서 포함되어야 할 첫 번째로 교환 법칙뿐만 아니라 결합법칙을 들었다. 그러나 본 연구에서 세 수의 덧셈 및 세 수의 곱셈을 계산하는 과정과 관련하여, 많은 학생들이 앞에서부터 차례로 계산하는 한 가지 방법만을 옳은 방법으로 판단하고 있음을 확인하였다. 구체적으로 이러한 학생들의 비율은 세 수의 덧셈에서는 2학년의 43.2%, 4학년의 51.7%, 6학년의 28.4%인 것으로 나타났고, 세 수의 곱셈에서는 2학년의 41.0%, 4학년 49.7%, 6학년 26.0%인 것으로 나타났다. 이처럼 상당수의 학생들이 결합법칙에 대한 인식 없이 앞에서부터 계산하는 한 가지 방법만을 옳은 것으로 잘못 판단하는 경향을 보였다. 이러한 오개념은 특히, 범자연수 범위에서의 사칙 연산이 완성되는 시기인 4학년에서 두드러지게 나타났으며, 고학년이 되어서도 쉽게 개선되지 않는 것으로 드러났다. 이러한 결과는 현행 교과서에서 세 수의 계산을 다룰 때 결합법칙을 강조하기 보다는 혼합계산에서의 혼동을 줄이기 위해 학생들이 계산의 순서를 바꾸면 결과가 달라지는 예를 경험하게 하며 앞에서부터 차례대로 계산하도록 반복하여 강조하는 경향과 무관하지 않다(방정숙 · 최지영, 2011).

셋째, 분배법칙을 보다 체계적이고 집중적으로 지도함으로써 분배법칙에 대한 개념적 이해를 강화할 필요가 있다. 학생들은 5가지 연산의 성질 중 분배법칙에서 가장 낮은 성취율을 보였으며, 특히 구체적인 수 상황에서 분배법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문항에 대해 2, 4, 6학년 학생 모두 매우 낮은 성취율을 나타냈다. 구체적으로, 상당수의 학생들이 문제 상황에 포함된 덧셈에 대한 곱셈의 분배 관계를 제대로 파악하지 못했고, 단순히 문제에서 명시적으로 언급하고 있는 수치에만 지나치게 주목하는 경향

을 보였다. 이처럼 많은 학생들이 분배법칙에 대해 충분히 이해하지 못하고 있었으며 이러한 현상은 고학년으로 가더라도 쉽게 개선되지 않는 것으로 나타났다.

이러한 결과는 학생들이 분배법칙에 대한 개념적 이해가 부족하다는 것과 더 근원적으로는 평소 이러한 관계에 대한 경험이 부족하다는 것을 의미한다. 현행 교과서에서 분배법칙은 분배의 성질 자체에 비중을 두어 다루기보다는 '(두 자리 수)×(한 자리 수)' 이상의 곱셈을 다루는 차시에서 다루어지며, 특히, '여러 자리 수'의 곱셈에서 계산의 기본 원리로서 다소 암묵적으로 다루어지는 경향이 있다(방정숙・최지영, 2011). 이와 관련하여 NCTM(2000)에서 '7×28'을 분배법칙을 활용하여 계산한 학생의 예인 '7×20+7×8', '7×25+7×3', 또는 '7×30-7×2'를 들어, 분배법칙이 곱셈의 기본 원리로서 매우 위력적임을 강조한 것과, 일본 교과서에서 '8×6'을 '5×6'과 '3×6'의 두 부분으로 나누어 계산할 수 있음을 보이며 분배법칙을 한 자리 수의 곱셈에서부터 체계적으로 다루는 방식은 주의 깊게 살펴볼 필요가 있다(변희현, 2011).

마지막으로, 학생들이 임의의 수 상황에서 연산의 성질에 대해 추측하고 정당화할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 학생들은 구체적인 수 상황에서 연산의 성질이 성립한다는 것을 이해한 경우에도 일반화에 대한 경험이 부족하여 임의의 수 상황에서도 성립할지에 대해 적절하게 답하지 못하는 경우가 많았다. 본 연구에서 구체적인 수 상황에서의 정답률이 가장 높게 나타났던 곱셈의 교환법칙을 예로 들면, 구체적인 수 상황에서 '5×6'과 '6×5'가 서로 같은지를 판단하는 문항에서의 정답률은 2학년 78.4%, 4학년 90.3%, 6학년 96.1%로 나타났다. 그러나 임의의 수 상황에서 '(어떤 수)×56'과 '56×(어떤 수)'가 서로 같은지를 판단하는 문항에서의 정답률은 2학년 61.4%, 4학년 72.8%, 6학년 89.7%로 상대적으로 더 낮게 나타났다. 임의의 수 상황에서의 오답 반응으로는 '(어떤 수)×56'이 '56×(어떤 수)' 보다 더 클 것이라고 판단하거나 혹은 더 작을 것이라고 판단한 학생들이 많았는데, 이러한 학생들이 비율은 2, 4, 6학년의 27.6%, 18.0%, 7.1%나 되는 것으로 나타났다. 이처럼 저・중・고 학년에서 공통적으로 임의의 수 상황에서의 곱셈의 교환법칙에 대한 성취율이 구체적인 수 상황에서의 성취율에 비해 더 낮은 것으로 드러났는데, 이는 구체적인 수 상황에서 특정한 수를 예로 들어 연산의 성질이 성립한다는 것을 경험하는 기회 못지않게 임의의 수 상황에서도 연산의 성질이 성립한다는 것을 경험할 수 있는 기회가 충분히 제공되어야 한다는 것을 의미한다.

참고문헌

교육과학기술부(2008). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과.** 서울: 대한교과서.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 박사학위논문.

방정숙・최지영(2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. **수학교육, 50**(1), 41-59.

변희현(2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교분석. **한국초등수학교육학회지, 15**(1), 39-56.

성태제(2007). **알기 쉬운 통계분석.** 서울: 학지사.

이화영・장경윤(2010). 조기 대수(Early Algebra)의 연구 동향과 접근에 관한 고찰. **수학교육학연구, 20**(3), 275-292.

최지영・방정숙(2008). 초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석. **수학교육 논문집, 22**(2),

135-164.

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). New York: Lawrence Erlbaum.

Beatty, R., & Moss, J. (2007). Teaching the meaning of the equal sign to children with learning disabilities: Moving from concrete to abstractions. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott. (Eds.), *The learning of mathematics*. (pp. 27-41). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chazan, D. (2008). The shifting landscape of school algebra in the United States. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 19-33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 2,* 19-25.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithematic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 358-288.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium.* Washington, DC: National Academy Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades.* New York: Lawrence Erlbaum.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics*

Teaching in the Middle School, 8(7), 342-348.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school* mathematics. Reston, VA: Author.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J., & Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 413-447). New York: Lawrence Erlbaum.

Warren, E. (2004). Generalising arithmetic: Supporting the process in the early years. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4,* pp. 417-424.

An Analysis of the Elementary School Students' Understanding of the Properties of Whole Number Operations

Choi, Ji Young (Seoul DaeDong Elementary School)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

This study investigated the elementary school students' ability on the algebraic reasoning as generalized arithmetic. It analyzed the written responses from 648 second graders, 688 fourth graders, and 751 sixth graders using tests probing their understanding of the properties of whole number operations.

The result of this study showed that many students did not recognize the properties of operations in the problem situations, and had difficulties in applying such properties to solve the problems. Even lower graders were quite successful in using the commutative law both in addition and subtraction. However they had difficulties in using the associative and the distributive law. These difficulties remained even for upper graders. As for the associative and the distributive law, students had more difficulties in solving the problems dealing with specific numbers than those of arbitrary numbers. Given these results, this paper includes issues and implications on how to foster early algebraic reasoning ability in the elementary school.

* Key Words : early algebra(초기 대수), algebraic reasoning as generalized arithmetic(일반화된 산술로서의 대수적 추론), properties of whole number operations(범자연수 연산의 성질), generalization(일반화), commutativity(교환성), associativity(결합성), distributivity(분배성)

논문접수 : 2011. 7. 3
논문수정 : 2011. 8. 3
심사완료 : 2011. 8. 19