韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 08. 제 50권, 제 3호, 355-365.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2011, Vol. 50, No. 3, 355-365.

# 호도법에 관한 교수학적 고찰

강 미 광 (동의대학교)

## Ⅰ. 서론

삼각함수는 수학의 실용적 측면을 잘 보여주고 있는 개념으로, 사람이 직접 잴 수 없는 두 지점사이의 거리 측정에서 소리와 빛의 파동, 열전도 및 온도변화, 포식자와 먹이 개체 변화에 이르기까지 거의 모든 분야에 활용되고 있다. 주기적 현상을 나타낼 때의 삼각함수는 주로 단위원의 호를 이용하여 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수로 정의하고 있는 반면, 우리나라 중등교육과정에서는 삼각함수를 각에 관한 함수로 다루고 있다.

직각삼각형을 이용해 정의된 삼각비는 예각에서만 정의 가능하므로 모든 각을 대상으로 해야 하는 삼각함수를 정의하기 위해서는 적절한 수학적 영역이 필요하다. 원은 모든 각을 표현할 수 있으면서도 직각삼각형을 내포하고 있기 때문에 삼각비 개념을 삼각함수로 일반화시키기에 좋은 수학적 제재이다. 그뿐 아니라 원은 자체가 무한히 반복되는 성질을 가지고 있으므로 주기함수를 표현하기에 적절한 정의역이다. 우리나라 고등학교 교육과정에서도 모든 각을 원위에서 나타내고 일반각 개념을 도입한 다음, 삼각함수를 일반각에서 정의하고 있다. 또한 삼각함수를 각에 대한 함수뿐만 아니라 다양한 변수에도 응용 가능하도록 새로운 각의 측도 라디안을 도입하여 실수에 대한 함수가 되게 한다. 일련의 이러한 과정은 형식 불역의 원리에 따른 수학적 개념의 일반화 과정을 논리적으로 잘 보여주고 있으며, 합리성을 추구하는 수학적 정신을 잘 반영하고 있다고 할 수 있다. 이처럼 삼각비와 삼각함수는 실세계와 자연현상을 모델링하는 실용적 가치뿐만 아니라 수학교육적인 측면에서도 중요한 가치를 지니고 있는 개념이므로 학생들이 교육과정에서 유의미하게 학습해야 할 중요한 개념이다.

그러나 실제로 삼각함수는 학생들이 가장 어려워하고 학업성취도도 가장 낮은 단원이며, 교사들도 가르치기가 가장 까다롭다고 여기는 단원이다(김은실, 2007; 임재훈 외 2004). 삼각함수 학습에 대한 이러한 어려움은 교수-학습상의 측면뿐만 아니라(손혜경, 2009; 송은영, 2008) 교과서나 편제와 같은 교육환경의 측면에도 그 원인이 있다(장영수, 2006; 이상원 외, 2004). 삼각함수단원에 대한 효과적인 지도를 위해서 교수학적 측면으로는 그래프나 수학사, 교수학적 상황론을 활용한 수업 등이 제시되기도 하고(김소정, 2009; 노아림, 2007; 심현주, 2007; 조영제, 2002), 인지적 측면에서는 호도법에 대한 오개념 분석과 라디안의 본질에 대한 교수학적 분석에 관한 연구(김완재, 2009; 남진영외, 2008; 김현웅, 2001)등이 이루어지고 있다.

삼각함수를 제대로 이해하기 위해서는 호도법과 일반각에 대한 개념 이해가 선행되어야 한다. 그러나 실제 수업은 라디안 도입의 필요성이나 개념자체의 이해보다는 삼각함수 값을 구하고 여러 가지 계산이나 공식 유도에 치중하고 있다. 그리고 대부분의 교과서는 '각을 라디안으로 나타내어 단위를 생략하면 삼각함수는 실수로부터 실수로의 함수가 된다.' 라는 방식으로 전개하고 있으나(김수환 외, 2009) 왜 그렇게 되는지에 대한 설명은 생략되어 있다. 이는 각의 크기를 다른 측도로 나타내더라도 단위를 생략하면 성립하는 성질로써, 원래는 라디안이 가지고 있는 특성을 부각시켜 도입의 필요성을 말하려는 의도였겠지만 그 의미가 전혀 제대로 전달되고 못하고 있다. 오히려 학생들에게 '호도법이란 단위를 생략하여 각의 크기를 나타내는 방법'이라는 오개념만 형성시키고 있다.

본 논문의 목적은 교사가 삼각함수와 호도법에 관한

* 접수일(2011년 7월 29일), 수정일(2011년 8월 9일), 게재확정일(2011년 8월 12일)
* DM분류 : G64
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 삼각함수, 호도법, 라디안, 측도함수, 원함수
* 이 논문은 2011학년도 동의대학교 교내연구비에 의해 연구되었음(2011AA089).

수업준비를 할 때 생겨날 수 있는 의문점에 대해, 가능한 한 고등학교 교육과정의 범주 안에서 해결할 수 있는 방안을 제시하는 것으로, 학교수학에서 제시된 호도법과 라디안에 대한 교수학적 지식들에 대해 수학적 정당성을 부여하고 학문적 지식과의 공극을 메우고 연결시키기 위한 작업의 일환이다. 삼각함수의 첫 관문에서는 왜 호도법과 라디안을 먼저 다루며, 꼭 필요한 개념인지? 호도법[1]의 단어자체의 의미는 호의 측도인데 왜 각의 측도로 언급되는지? 삼각함수는 각의 함수인데 왜 라디안으로 표현하면 실수로부터 실수로의 함수라고 하는지? 와 같은 의문에 대해, 삼각함수는 각에 대한 함수뿐만 아니라 포괄적인 실변수 함수로 정의되기 위해 각의 측도에 호의 길이를 이용한 호도법을 도입한다는 관점으로 그 해답에 접근하고자 한다.

이 논문의 Ⅱ장에서는 호도법을 단어 자체의 뜻에 더 합당하도록 호의 측도로 보는 관점을 취하여 호도법이 각의 측도로써 수학적으로 정당한 측도임을 증명하였고, 각의 측도에 호도법을 차용하는 과정에서 라디안 단위 개념이 생겨날 수밖에 없음을 보였다. 그리고 라디안이 가진 각의 측도이자 호의 측도인 양면성을 이용해 교과과정에서 '각을 라디안으로 나타내어 단위를 생략하면 삼각함수는 실수로부터 실수로의 함수가 된다.'라고 말할 수 있는 근거를 제시하였다. Ⅲ장에서는 고등학교과정에서 처음 도입되었다고 생각되는 라디안 개념이 사실은 교육과정에서 내면적으로는 호의 길이라는 이름으로 전개되어 온 개념이므로 이를 표면화시켜 라디안 개념과 연결시키는 교수방안을 제시하였다.

## Ⅱ. 각의 측도

### 1. 교육과정에서의 각과 각의 측도

각의 측도는 각이 가지고 있는 어떤 내적 성질의 크기를 결정하는 것이기 때문에 각의 본질을 어떻게 해석하느냐에 따라 달라진다. 각을 보는 관점에 따라 역사적으로 각의 본질은 직진과 꺾이는 성질, 두 직선 사이의 관계, 회전량으로 파악되기도 하고 세 가지 측면을 다 가진 것으로 파악되었다(이무현, 1999). 또한 각은 정적인 측면에서는 두 반직선에 의해 만들어진 점들의 집합이나 두 반평면으로 교집합으로 볼 수 있고 동적인 측면에서는 그것을 만들고 있는 두 반직선을 일치시키고자 할 때 돌려야 하는 반직선의 회전량으로 볼 수 있다(이종희, 2001). 현재 학교수학과 유클리드 기하학에서는 각의 본질을 회전량으로 파악하고 두 각의 합동은 각의 크기가 같을 때로 정의하고 있다.

이와 같이 각의 측도에 사용되는 내적 성질은 각의 회전량이다. 각의 측도로는 직각, 육십분법, 호의 길이, 현의 길이와 RPM(revolution per minute) 등이 사용되고 있으며 국제단위계(SI 유도단위계)에서는 라디안을 각의 단위로 채택하고 있다.

우리나라 학교수학에서는 초등학교 3학년 도형단원에서 각을 '한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형'으로 정의한 후, 색종이를 두 번 접는 활동을 통해 한 바퀴 회전량의 1/4를 직각으로 도입한다(교육인적자원부, 2009). 초등학교 4학년 측정단원에서 $1^\circ$은 직각 크기의 1/90로 정의하고 고등학교 1학년에서 라디안 단위가 정식으로 정의되기 전까지는 모든 각의 크기에 도(degree)를 사용한다. 삼각함수를 다루기 위해서는 모든 각의 크기에 대해 정의할 수 있는 방법을 모색해야 하므로, 고등학교에서는 원을 이용하여 각의 동경이 시초선에서 꼭짓점 둘레를 회전한 양에 따라서 $360^\circ$보다 큰 각의 크기를 재고 회전 방향에 따라 양, 음이 정해지도록 각의 개념을 확장한다. 그리고 호의 길이와 중심각의 크기가 비례하는 성질을 이용하여 호의 길이가 반지름의 길이와 같을 때의 중심각의 크기를 1라디안으로 정의한다. 라디안을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법으로 부르고 각도를 호도법으로 나타낼 때는 관습상 단위를 생략한다고 언급하고 있다(우정호 외, 2009; 김수환 외, 2009). 삼각함수는 호도법으로 나타낸 일반각을 이용하여 각의 크기가 $\theta$라디안인 동경이 주어졌을 때, 반지름이 $r$인 원과 동경과의 교점 $(x,y)$를 이용하여 $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$로 정의한다. 실제로 삼각함수에서 정의역의 실수는 라디안으로 측정한 각의 크기에서 단위를 제외한 값이고 치역에서의 실수는 길이의 비로 나타나는 실수이다.

[1] 이 논문에서는 호도법이란 단어의 의미에 충실하고자 호의 크기를 나타내는 호의 측도를 의미한다.

2. 호도법의 수학적 정당화

이 절에서는 호도법이 각의 측도로서 수학적으로 정당화될 수 있음을 보이고자 한다. 각의 측도가 되기 위해서는 모든 각에 대해 정의될 수 있어야 하고 각의 회전량에 대한 정보를 수치로써 표현해야 하므로 각의 측도는 모든 각의 집합 $\Sigma$를 정의역으로 가지는 실수값 함수 $m : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 로 해석할 수 있다. $m$이 각의 측도로서의 역할을 하려면 적어도 다음의 조건을 갖추어야 한다(Barra, 1981; Wikipedia).

(a) 모든 각의 크기를 표현할 수 있어야 한다.

(b) 두 각 $A_1$, $A_2$이 합동이면, $m(A_1) = m(A_2)$이 성립하여야 한다.

(c) $m(A) \geq 0$

(d) $m(\varnothing) = 0$

(e) 서로 소인 각의 열 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대해

$m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$이 성립한다.

조건 (a)와 (b)는 함수가 되기 위한 조건이고 (c), (d), (e)는 측도가 되기 위한 조건이다. 우리는 다음과 같은 논리적 절차로 각의 크기를 반지름이 $r$로 주어진 원주상의 호의 길이로 재는 호도법이 수학적으로 정당함을 보이고자 한다. 여기서 $\Omega$는 반지름이 $r$인 원주상의 호의 집합이고 $\Pi$는 수직선상의 구간들의 집합으로 둔다.

(i) 모든 각 $A$은 반지름이 $r$인 원주상의 호 $\lambda_A$와 일대일 대응한다.

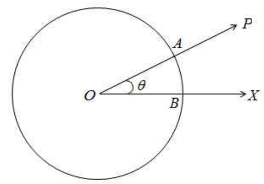
(ii) 원주상의 호 $\lambda$는 같은 길이를 가지는 수직선의 구간 $I_\lambda$와 일대일 대응한다.

(iii) 구간 $I$에 대해 $m_2(I) = (I$의 길이$)$로 정의된 $m_2$는 $\Pi$의 측도함수임을 이용해 각 $A \in \Sigma$에 대해 $m(A) = m_1(\lambda_A) = m_2(I_{\lambda_A})$로 정의하면 $m$도 $\Sigma$상의 측도함수가 된다.

(여기서 $m_1(\lambda_A)$는 호$\lambda_A$의 길이를 의미한다.)

1) 각과 호의 일대일 대응

모든 각은 유클리드 기하학의 합동공리군의 네 번째 공리[2)]에 의하면, 주어진 임의의 각은 원하는 평면의 원하는 쪽으로 유일하게 옮길 수 있기 때문에 모든 각은 원점 O를 중심으로 하는 중심각으로 생각할 수 있다(홍승표, 2005; Hilbert, 1971).




<그림 1> 원위에서 각과 호의 대응

원점 O에서 시작하는 두 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 이루는 도형인 $\angle\mathrm{XOP}$가 주어져 있다고 하자. 점 O를 중심으로 <그림 1>과 같이 반지름이 $r$인 원을 그리고 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와의 교점을 각각 B, A라 두면 $\angle\mathrm{XOP}$에 대해 호 $\widehat{\mathrm{BA}}$가 결정된다. 이와 같은 대응을 $f$라 두면 $f$는 모든 각의 집합 $\Sigma$에서 반지름이 $r$인 원위에서의 호의 집합 $\Omega$으로 가는 일대일 대응 함수가 된다. 즉, $f$는 다음 세 가지 조건을 만족한다.

(a) $f$의 정의역은 $\Sigma$이다.

(b) 두 각 $A_1$, $A_2$가 합동이면 $f(A_1) = f(A_2)$이 성립한다.

(c) $g \circ f = 1_\Sigma$ 이고 $f \circ g = 1_\Omega$를 만족하는 함수 $g : \Omega \rightarrow \Sigma$가 존재한다.

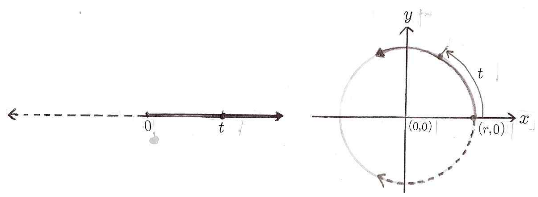
실제로 조건 (a)는 유클리드 기하학의 합동공리군에 의해 임의의 각은 점 O를 꼭지각으로 가지는 각으로 이동할 수 있으므로 성립한다. 조건 (b)는 유클리드 기하학에서 두 각 $A_1$, $A_2$가 합동일 때는 각의 크기가 같을 때이고, 중심각의 크기가 같으면 같은 원위에서 대응하는 두 호 $f(A_1)$와 $f(A_2)$의 길이도 같다. 따라서 두 호는 서로 합동이므로 (b)가 성립한다. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름이 $r$인 원위에서 임의의 호 $\widehat{\mathrm{AB}}$에 대해 $g(\widehat{\mathrm{AB}}) = \angle\mathrm{AOB}$로 정의하면 $g$는 $\Omega$에서 $\Sigma$로 가는 함수가 되고 조건 (c)를 만족하므로 $f$는 전단사 함수가 된다(Pinter, 1971). 이와 같이 모든 각의 집합

2) $\angle(h,k)$를 한 평면 $\alpha$에서의 각이라 하자. $l'$은 평면 $\alpha'$ 상의 영역이라 하고 한 쪽 영역이 지정되어 있다고 하자. $h'$은 $l'$의 반직선으로서 한 점 O$'$에서 방사한다고 하면 $\alpha'$ 상에는 $l'$ 의 지정된 쪽으로 각 $\angle(h,k)$와 합동이 되는 각 $\angle(h',k')$을 만드는 단 하나의 반직선 $k'$가 존재한다.

$\Sigma$은 반지름이 $r$인 원에서의 호의 집합 $\Omega$와 $f$에 의해 일대일 대응되므로 집합적으로 각과 호는 동일시 할 수 있다.

2) 호와 구간의 일대일 대응

먼저, 수직선을 반지름이 $r$인 원위에 배치하는 방법을 생각해 보자. 실수축의 0이 되는 점을 $(r,0)$에 두고 양의 실수축은 반지름이 $r$인 원위에서 반시계방향으로 감고 음의 실수축은 $(r,0)$에서 시계방향으로 원주에 감는다고 하면 모든 실수는 반지름이 $r$인 원위의 점과 대응되고 $\mathbb{R}$상의 구간은 호의 형태로 나타날 것이다. 즉, 임의의 실수 $t$가 $t>0$이면 출발점 $(r,0)$에서 반시계방향으로 호의 길이가 $t$가 되는 단위원 상의 점과 대응할 것이고 $t<0$ 이면 $(r,0)$에서 시계방향으로 호의 길이가 $-t$가 되는 원 위의 점과 대응할 것이다.




<그림 2> 수직선을 반지름인 $r$인 원에 감는 방법

이러한 대응을 수학적으로 표현하기 위해, $\mathbb{R}$을 길이가 $2\pi r$인 구간들 $\{[2n\pi r, 2(n+1)\pi r) \mid n \in \mathbb{Z}\}$로 분할하고, 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 $r$인 원을 회전한 횟수 $n$에 따라 구별하기 위해 극좌표를 이용해 $S_n = \{(r,\theta) \mid 2n\pi \le \theta < 2(n+1)\pi\}$이라 두자. 실수 $t \in [2n\pi r, 2(n+1)\pi r)$에 대해 $p_n(t) = (\cos t, \sin t)$로 정의하면 $p_n$는 구간 $[2n\pi r, 2(n+1)\pi r)$에서 $S_n$으로 가는 함수가 되며 이것이 전단사임은 쉽게 증명되어진다.

$p_n$의 정의역이 서로 소이므로 $p = \cup_{n\in\mathbb{Z}} p_n$이라 두면 $p$는 $\cup_{n\in\mathbb{Z}} [2n\pi r, 2(n+1)\pi r)$에서 $\cup_{n\in\mathbb{Z}} S_n$로 가는 함수가 되며 전단사 성질을 보존한다. 여기서 $\Gamma = \cup_{n\in\mathbb{Z}} S_n$라 두면, $p:\mathbb{R}\to\Gamma$에 의해 유도된 함수[3] $\bar{p}:\wp(\mathbb{R})\to\wp(\Gamma)$는 $p$가 전단사이므로 $\bar{p}$도 전단사함수이다(Pinter, 1971).

$\bar{p}$는 $\mathbb{R}$상의 구간을 길이가 같은 반지름이 $r$인 원주상의 호로 보내므로 정의역을 $\mathbb{R}$상의 구간들의 집합인 $\Pi$로 제한하면 함수 $\bar{p}$는 $\Omega$를 치역으로 가진다. 전단사함수의 $\bar{p}$의 제한함수도 전단사이므로 $\bar{p}:\Pi\to\Omega$ 는 일대일 대응함수가 된다. 따라서 $\bar{p}$의 역함수 $\bar{q}:\Omega\to\Pi$가 존재한다. 여기서 $\bar{q}$는 $p$의 역함수를 $q$라 두었을 때 앞의 과정과 같은 방법으로 유도된 함수와 같으며, 반지름이 $r$인 원주상의 호를 같은 길이를 가지는 실수축 위의 구간과 일대일 대응시킨다.

3) 각의 측도로서의 호도법

모든 각의 집합을 $\Sigma$라 두고 반지름이 $r$인 원상의 호의 집합을 $\Omega$, $\Pi$를 수직선상의 구간들의 집합이라 두면, 앞에서 정의한 함수 $f:\Sigma\to\Omega$와 $\bar{q}:\Omega\to\Pi$는 각각 일대일 대응함수이므로 합성함수 $\bar{q}\circ f:\Sigma\to\Pi$도 일대일 대응함수이다.

수직선상의 구간 $I\in\Pi$에 대해 $m_2(I)$를 구간 $I$의 길이로 정의하면 $m_2:\Pi\to\mathbb{R}$는 조건 (a)~(e)를 만족하므로 $\Pi$상의 측도함수이다(Barra, 1981).

호 $\lambda\in\Omega$에 대해 $m_1(\lambda) = m_2(\bar{q}(\lambda))$로 정의하면 $m_1:\Omega\to\mathbb{R}$은 $\bar{q}$가 일대일 대응함수이고 $m_2$가 측도함수라는 성질 때문에 조건 (a)~(e)를 만족하므로 $\Omega$상의 측도함수가 된다. 여기서 $m_1(\lambda)$는 호 $\lambda$의 길이로, 호의 길이는 호의 측도로써 수학적으로 정당화될 수 있음을 알 수 있다.

또한 각 $A\in\Sigma$에 대해 $m(A) = m_2(\bar{q}\circ f(A))$로 정의하면 $m$은 $\bar{q}\circ f$가 전단사이고 $m_2$가 측도함수라는 성질에 의해 $\Sigma$상의 측도함수가 된다. 여기서 $m(A) = m_2(\bar{q}\circ f(A)) = m_1(f(A))$ 이고 $f(A)$는 반지름이 $r$인 원에서 각 $A$를 중심각으로 가지는 호이므로 $m(A)$는 반지름이 $r$인 원에서 각 $A$를 중심각으로 가지는 호의 길이이다.

---

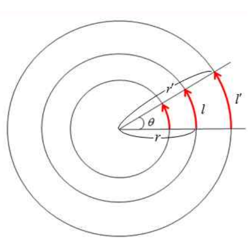
3) 함수 $f:X\to Y$가 주어지고 $X$의 부분집합 $C$ 에 대해 $\bar{f}(C) = \{f(x) | x\in C\}$로 정의하면 $\bar{f}$는 $X$의 멱집합 $\wp(X)$에서 $Y$의 멱집합 $\wp(Y)$으로 가는 함수가 되며 $p$가 전단사이면 $\bar{p}$도 전단사이다.

이와 같이 각 $A$의 측도를 반지름이 $r$인 원에서 $A$를 중심각으로 가지는 호의 길이로 재는 호도법은 수학적으로 정당한 각의 측도임을 알 수 있다. 이때 반지름의 길이는 어떤 양수가 되더라도 각의 측도로서 사용가능하므로 반지름의 길이가 가장 간단한 값인 1을 가지는 경우를 택하는 것이 가장 합리적일 것이다.

3. 라디안 개념의 필요성

1) 라디안의 도입배경

각 $A$의 크기를 반지름이 $r$인 원주상의 호의 길이로 재는 호도법은 수학적으로 정당한 측도이긴 하지만 각의 크기를 호의 측도를 이용해 표현할 때, 문제점이 하나 발생한다. 각의 크기는 반지름의 크기에 영향을 받지 않지만, 각에 대응되는 호의 길이는 원의 반지름의 길이에 따라 변한다는 것이다. 이처럼 호의 측도를 각의 측도로 바로 사용하기에는 부적합하므로 반지름이 서로 다른 원에서도 각의 측도가 변하지 않도록 약간의 조정이 필요하다.




<그림 3> 각의 크기와 호의 길이

<그림 3>과 같이 60분법으로 각의 크기가 $\theta^\circ$인 각이 주어져 있다고 하자. 중심각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로 이들의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다. 각의 크기가 $\theta^\circ$인 중심각의 호의 길이를 $l$이라 하면

$$360^\circ : \theta^\circ = 2\pi r : l$$

$$\theta^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi r} \times l = \frac{360^\circ}{2\pi} \times \frac{l}{r} \text{ 이므로}$$

$$\theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{l}{r} \quad \cdots \quad (*)$$

이 성립한다. 이 식에서 $\theta$는 반지름 $r$과 $l$의 길이에 따라 달라진다. 그러나 각의 크기 $\theta$는 실제로 원의 반지름에 의해 영향을 받지 않아야 하므로 식(*)을 $r$이 소거되는 형태의 식으로 변환시켜야 한다. 식 (*)에서 $\frac{360}{2\pi}$은 상수이므로 분모의 $r$이 소거되기 위해서는 호의 길이 $l$을 $r \times l_0$ 형식으로 표현하는 것이 바람직하다. <그림 3>에서 $\theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{l}{r}$이고 $\theta = \frac{360}{2\pi} \times \frac{l'}{r'}$ 이므로 $\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'}$이라는 관계식을 얻을 수 있다. 여기서 $\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} = l_0$라 두면

$$\theta = \frac{360}{2\pi} \times l_0 \ \cdots \quad (**)$$

이라는 식이 성립하고 식 (**)에서 각의 크기를 나타내는 실수 $\theta$는 더 이상 반지름의 길이에 영향을 받지 않는다. 이처럼 호의 측도인 호도법을 각의 측도로 이용하기 위해서는 호의 길이를 반지름의 길이에 영향을 받지 않도록, 반지름의 길이에 대한 상대적 크기인 $l_0 = \frac{l}{r} = \frac{\text{호의 길이}}{\text{반지름의 길이}}$ 로 나타내야 한다. 이것이 바로 각의 측도 라디안(radian)을 정의하게 된 배경으로, 각의 크기를 육십분법인 degree로 나타내면 $\theta^\circ$이고 라디안으로 나타내면 $l_0 \text{rad} = \frac{\text{호의 길이}}{\text{반지름의 길이}} \text{rad}$이다. 원주의 길이는 $2\pi r$이고 $360^\circ = \frac{2\pi r}{r}\text{rad} = 2\pi\text{rad}$ 이므로

$360^\circ : 2\pi \text{ rad} = \theta^\circ : l_0 \text{ rad}$

이 성립한다. 즉 도(degree)는 한 바퀴의 회전량을 360등분한 $1^\circ$을 단위로 가지는 각의 측도이고 라디안은 한 바퀴의 회전량을 $2\pi$등분한 1rad을 단위로 하는 각의 측도이다.

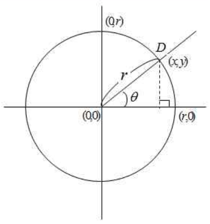
한편, 반지름의 길이에 대한 호의 상대적 크기인 $l_0 = \frac{l}{r}$는 반지름의 길이가 1인 원에서는 크기가 $l_0$rad인 중심각의 호의 길이로 볼 수 있으므로 일반적으로 각의 측도로 사용하는 라디안은 반지름의 길이가 1인 원에서는 호의 측도로 간주될 수 있다.

2) 원함수

여기서는 삼각함수를 각에 대한 함수가 아니라 바로

실변수 실가함수로 정의하는 원함수 정의 방법을 이용해 현재 고등학교에서 정의하는 삼각함수를 왜 각의 크기를 라디안으로 표현하면 ℝ에서 ℝ로 가는 함수라고 말하고 있는지에 대한 수학적 근거를 제시하고자 한다.

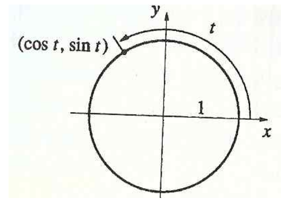
일반적으로 삼각함수를 정의하는 방법은 우리나라 교육과정처럼 각에 대한 함수로 정의하는 방법과 각과 상관없이 실수에 관한 함수로 정의하는 방법이 있다.




<그림 4> 교육과정에서 삼각함수의 정의

<그림 4>는 현행 중등교육과정에서 삼각함수를 정의하는 방법으로, 반지름이 $r$인 원을 이용하여 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$로 정의하므로 독립변수 $\theta$는 각의 차원이고 $\sin\theta$는 $\dfrac{y}{r}$로 무차원인 실수이다. 여기서 $\theta$는 각의 측도에서 단위를 생략한 실수만을 가져왔기 때문에 '각을 라디안으로 나타내어 단위를 생략하면 삼각함수는 ℝ에서 ℝ로 가는 함수이다.'라고 주장할 수도 있겠지만 이는 각의 크기를 도(degree)로 나타내더라도 성립하는 성질이므로 부적절한 설명이다. 실제로 각의 크기를 도로 나타내어 사인함수의 그래프를 그리면 $\theta$가 0에서 360까지 움직이는 동안 $\sin\theta$는 -1과 1사이를 움직이므로 $x$축의 단위길이와 $y$축의 단위길이를 달리할 수밖에 없다(Toeplitz, 2006). 따라서 원하는 정보가 그래프에서 제대로 나타나지 않아 각의 크기를 도로 선택하면 비실용적이다.

삼각함수를 바로 실수에 관한 함수로 정의하는 방법은 주어진 실수 $t$에 대해, 방향을 감안한 반지름이 1인 원에서 원주상의 호의 길이가 $t$인 점의 좌표가 $(x, y)$일 때 $(x, y)=(\cos t, \sin t)$로 정의한다( <그림 5>) (Callahan & Hoffman, 2005; Varberg & Purcell & Rigdon, 2000).




<그림 5> 원함수의 정의

이때 정의되는 사인과 코사인 함수는 각도에 관계없는 실수에 관한 함수가 되며 단위원을 이용해 정의되었으므로 원함수[4]라고 불린다. 원함수는 호의 길이 $t$를 독립변수로 가지고 $\sin t$도 호의 끝점과 $x$축과의 거리이므로 독립변수와 종속변수가 길이 차원으로 동질량이다.

한편, 각의 크기를 호도법을 사용하여 $\theta$ rad으로 나타내면 $\theta$는 반지름이 1인 원에서는 주어진 각의 호의 길이가 $\theta$가 되므로 <그림 4>에서 정의된 삼각함수 값은 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=y$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=x$는 <그림 5>의 원함수로 정의된 $\sin\theta$와 값이 같아진다. 이와 같이 삼각함수를 정의하는 두 가지 방법이 일치하게 되므로, 각을 라디안으로 나타내어 단위를 생략하면 원함수처럼 ℝ에서 ℝ로 가는 함수로 볼 수 있다.

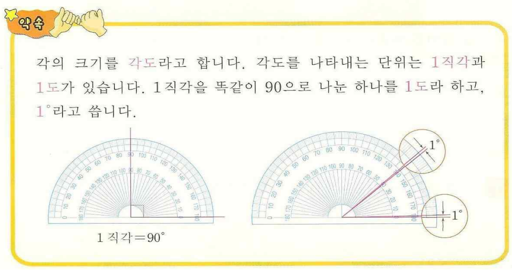
## Ⅲ. 호도법 개념 정립을 위한 교수방안

학교수학에서의 삼각함수는 각의 측정단위를 호도법인 라디안으로 측정하게 되는데, 학생들은 그동안 각도의 크기를 잴 때 60분법의 도(degree)로만 익숙해져 있는 탓에 고등학교에서 새로이 배우는 라디안에 적응하기가 쉽지 않다. 그러나 호도법이란 단어는 고등학교에서 처음 도입되지만 이와 관련된 내용은 실제로 초・중등교육과정에서 호의 길이라는 개념으로 다루어져 왔으므로 그러한 개념들을 배울 때 호도법 개념이 좀 부각되도록 하는 교수방안을 생각해 보기로 하자.

### 1. 초등교육과정

4) 원함수는 wrapping function이라고도 불리며 이때 사인과 코사인 함수는 각각 ℝ에서 ℝ로 가는 함수로 정의된다. 고등학교과정에서는 원을 매개변수 $t$를 이용하여 $x=\cos t$, $y=\sin t$로 표현한다.

각의 크기를 잴 때 호의 길이를 이용하는 아이디어는 각도 $1^\circ$를 정의하는 초등학교 4학년에서 각도기의 눈금을 자세히 살펴보면 알 수 있다. 직각을 바탕으로 초등학교 4학년에서 $1^\circ$를 직각 크기의 $\frac{1}{90}$로 정의하고 2직각인 평각을 180등분한 각도기를 이용하여 다음과 같이 도입하고 있다(교육과학기술부, 2009).




<그림 6> 직각과 도의 관계

여기서 <그림 6>의 오른쪽에 나타난 각도기의 눈금을 자세히 살펴보면 중심부분은 좁아서 각의 크기의 기본단위인 $1^\circ$를 표현하기 힘들므로 각도기의 가장자리인 반원의 길이를 180등분하여 한 눈금을 $1^\circ$로 한 것임을 알 수 있다. 즉 각도기의 눈금표시에서 각의 크기가 호의 길이와 비례한다는 성질이 암묵적으로 이용되었음을 짐작할 수 있다.

호의 길이에 대한 호도법의 개념은 원주율에서도 찾아볼 수 있다. 초등학교 6학년의 측정영역에서는 병이나 캔과 같은 원 모양을 가진 사물의 지름과 원주를 직접 측정해보는 활동을 통해 원에서 원주와 지름의 길이비가 일정하다는 사실을 인식하게 하고 이를 원주율이라 정의한다. 원주율은 수학적으로는 3.14159⋯이지만 초등학교에서는 보통 3.14로 약속하고 원의 넓이를 구할 때 활용한다. 원주율은 $\frac{\text{원주의 길이}}{\text{지름의 길이}}$로 정의되어 단위나 차원이 없는 실수이지만 지름의 길이가 1인 원에서는 길이 차원을 가지는 원주의 길이로 해석할 수 있다. 그러므로 초등학교에서 원주율을 배울 때, 반지름이 1cm인 원에서 원주의 길이나 반원의 길이를 구하는 문제도 함께 다루어 준다면, 중학교 1학년의 부채꼴 단원에서 호의 길이를 계산할 때 원주율 $\pi$가 나타나는 것을 자연스럽게 받아들일 수 있을 것이다.

2. 중학교과정에서 호도법

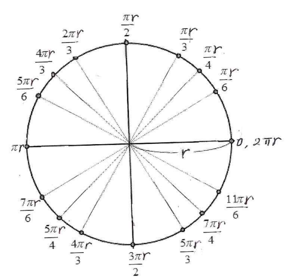
중학교 교육과정에서 호의 길이와 관련된 내용은 1학년 기하영역에서 부채꼴의 중심각과 호의 관계라는 주제로 다루어지며, 바퀴살의 간격이 일정한 수레바퀴를 이용하거나 원을 한 번, 두 번, ⋯ 접어가는 활동을 통해 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이의 관계를 직관적으로 이끌어내고 있다(우정호 외, 2009; 정순영 외, 2009). 이런 직관적인 이해를 바탕으로 중학교 1학년에서는 다음과 같은 내용으로 부채꼴의 중심각과 호의 관계를 학습한다.

(a) 한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이는 같다.

(b) 한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례한다.

(c) 반지름의 길이가 $r$이고 중심각의 크기가 $\theta^\circ$인 부채꼴의 호의 길이 $l$은 $l = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$ 이다.

성질 (c)에서 알 수 있듯이 호의 길이는 원주의 길이 $2\pi r$에서 비롯되므로 대부분 $\pi$와 연관되어 표현된다. 중학교에서 원주율은 문자 $\pi$로 나타내기 때문에 학생들은 $\pi$를 크기를 가진 수가 아니라 기호로만 생각하는 경향이 있다. 호의 길이는 크기를 가늠하는 것이므로 $\pi$를 원주율이라기보다는 숫자라는 측면이 잘 부각될 수 있도록 다루어져야 할 것이다.

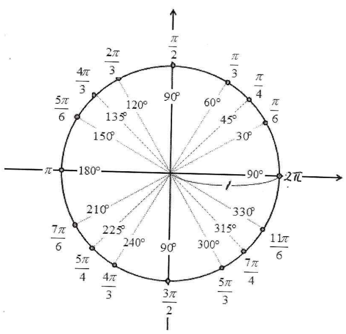



<그림 7> 등분한 호의 길이

예를 들어, 호의 길이를 공식 (c)에 의해서만 구할 것이 아니라 <그림 7>과 같이 원주를 2등분, 3등분, 4등분, ⋯, $n$등분, $\pi$등분하여 분할되는 호의 길이를 구하게 하는 경험을 갖게 된다면, $\pi/3$는 항상 각의 크기라고

생각하는 고등학생들의 오개념을 줄일 수 있을 것이다.

호의 길이에 대한 충분한 학습이 되었다면 호의 길이가 먼저 주어진 경우, 그에 따른 중심각의 크기를 구하게 함으로써, 호의 길이로 중심각의 크기를 의사소통 가능함을 인식할 수 있도록 해야 한다.




<그림 8> 중심각과 호의 길이

반지름이 1인 원에서 호의 길이가 $\pi$인 중심각의 크기는 180 ° 이고 호의 길이가 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$인 중심각의 크기는 각각 90 ° , 60 ° , 45 ° 이라는 것을 인식할 수 있도록 하자는 것이다. 여기서 호의 길이를 $\pi$의 배수만으로 다루면 호도법은 항상 $\pi$가 있어야 한다는 오개념이 형성될 수도 있으므로 호의 길이가 1/2, 1, 2, 3, …일 때도 함께 다루어 주는 것이 좋다.

### 3. 고등학교 과정에서의 호도법

라디안의 개념을 처음 배우는 고등학교 1학년 학생들은 이전까지는 각의 크기를 육십진법인 도(degree)만을 사용해 왔으며 새로운 각의 측도가 생소한데다 재는 관점이 각의 차원이 아니라 길이차원으로 전혀 달라지기 때문에 인지적 장애를 갖기 마련이다. 그러나 라디안은 삼각함수를 다룰 때 각의 측도를 도로 사용하는 것보다 많은 장점을 가지고 있고, 각에 대한 국제단위로도 통용되는 반드시 습득해야 할 개념이므로 라디안의 도입 필요성과 유용성에 관한 측면이 좀 더 학생들에게 드러나도록 다루어져야 할 것이다.

앞에서 언급했듯이 라디안의 개념은 각의 측도를 호의 측도를 이용해 사용하는 과정에서 생겨난 것으로, 각의 크기가 $\theta$라디안이면 반지름이 1인 원에서 이 각에 대한 호의 길이는 $\theta$이다. 그래서 라디안 단위를 생략한 $\theta$는 각의 크기와 호의 길이를 동시에 나타내며, 이러한 양면성 때문에 부채꼴의 호의 길이나 넓이에서 각의 단위를 라디안으로 취하면 식이 간단해진다.

또한 각의 크기를 라디안 단위를 사용하여 $\theta$라디안으로 나타내면 $\theta$는 단위원에서의 각에 대응하는 호의 길이이므로 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$이 성립한다. 이는 삼각함수의 미분정의에서 결정적인 역할을 하는 극한값으로 이로 인해 $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$와 같이 도함수가 간단하게 나타난다. 그러나 각의 측도를 도로 나타내면 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$이므로 도함수는 $(\sin t)' = \frac{\pi}{180}\cos t$ $(\sin t)' = \frac{\pi}{180}\cos t$, $(\cos t)' = -\frac{\pi}{180}\sin t$ 가 되어 식이 복잡해진다. 아래 표에서 첫 번째 열 $x$는 각의 크기를 라디안으로 나타낸 값이고 두 번째 열 $\varphi$은 각의 크기를 도로 나타낸 것이며, 세 번째 열은 $\sin x$의 값이다.

표 1. $x$라디안과 $\sin x$의 비교

| $x$ | $\varphi$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|---|
| 0.000 | 0°00′00.00″ | 0.00000 | 1.00000 |
| 0.001 | 0 03 26.26 | 0.00100 | 1.00000 |
| 0.002 | 0 06 52.53 | 0.00200 | 1.00000 |
| 0.003 | 0 10 18.79 | 0.00300 | 1.00000 |
| 0.004 | 0 13 45.06 | 0.00400 | 0.99999 |
| 0.005 | 0 17 11.32 | 0.00500 | 0.99999 |
| 0.006 | 0 20 37.59 | 0.00600 | 0.99998 |
| 0.007 | 0 24 03.85 | 0.00700 | 0.99998 |
| 0.008 | 0 27 30.12 | 0.00800 | 0.99997 |
| 0.009 | 0 30 56.38 | 0.00900 | 0.99996 |
| 0.010 | 0 34 22.65 | 0.01000 | 0.99995 |
| 0.011 | 0 37 48.91 | 0.01100 | 0.99994 |
| 0.012 | 0 41 15.18 | 0.01200 | 0.99993 |
| 0.013 | 0 44 41.44 | 0.01300 | 0.99992 |
| 0.014 | 0 48 07.71 | 0.01400 | 0.99990 |
| 0.015 | 0 51 33.97 | 0.01500 | 0.99989 |

극한값 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$는 교과서에서는 단위원의 부채꼴의 넓이와 부등식을 이용해 증명하고 있지만 실제로 이와 같이 표도 같이 보여주어 학생들의 직관적인 이해를 돕는다면 논리적인 증명이 더 의미를 가질 수 있을 것이

다.

현재 교과과정은 <그림 4>에서와 같이 반지름이 $r$인 원에서 삼각함수를 $\sin\theta = \frac{y}{r}$,로 정의하기 때문에 독립변수 $\theta$와 함숫값 $\sin\theta$의 의미가 직관적으로 표현되지 않고 그래프와도 직접적으로 연결되지 못하고 있다. 반지름이 1인 원에서 삼각함수를 다룬다면 라디안으로 표시된 $\theta$ 와 $\sin\theta$가 가지는 의미를 보다 직관적으로 알 수 있고 $\sin\theta$의 그래프도 매끄럽게 연결될 수 있으므로 학생들에게 삼각함수 개념과 그래프의 의미를 보다 깊이 이해시킬 수 있다. 또한 대학교에서 주기함수의 하나로 도입되는 삼각함수의 정의방법과도 일치시킬 수 있으므로 삼각함수를 단위원에서 다루는 교수방법을 잘 활용할 필요가 있다.

## V. 요약 및 결론

고등학교에서 1라디안은 반지름의 길이와 같은 호를 가지는 중심각의 크기로 정의하고 호도법은 1rad을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법으로 정의하고 있다. 이미 중학교 교과서에서 $\angle A = 80^\circ$ 와 같이 도형인 각과 실수인 각의 크기를 따로 구별하지 않고 사용하여 온 탓에 고등학교 교사용 지도서의 지도상의 유의점에도 '호도법을 이용하여 각이 실수로 표현됨을 이해하게 한다'라고 적혀있다(김수환 외, 2009). 이처럼 각과 각의 측도가 엄밀히 되어 있지 못하는 풍토에다가 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때는 라디안 단위를 생략한다고 되어 있으니 배우는 학생들의 입장에서는 다양한 오개념을 갖기 마련이다.

학생들 입장에서는 라디안을 처음 도입했을 때는 도(degree)와는 체계가 다른 새로운 각의 측도로 받아들였었는데 어느새 라디안 값은 원에서의 호와 반지름 길이의 비율이기 때문에 무차원인 실수로 받아들여야 한다니 혼란이 일어날 수밖에 없다. 혹자는 라디안의 속성이 원래부터 각의 크기와 동질량의 비라는 두 측면을 가지고 있다는 견해를 가지고 있고(남진영외, 2008), 혹자는 후자의 라디안 개념은 물리학에서 수학적으로 잘못된 개념을 편의성을 위해 무차원 단위로 받아들이고 있다고 반박한다(김완재, 2009). 이처럼 라디안 개념은 속성자체가 논란의 여지를 가지고 있으므로 교사는 라디안에 대한 교수학적 분석을 철저히 하고 학생들이 가질 수 있는 학습장애를 이해하고 적절하게 처방할 수 있어야 한다.

한편, 원은 자체가 순환성을 가지는 도형이므로 정의역을 수직선보다는 주기를 원주의 길이로 가지는 원에서 생각하는 것이 효율적이다. 예를 들어, $x$축을 시간 $t$에 관한 변량으로 잡으면 주기함수의 그래프는 주기 $k$마다 같은 모양으로 반복되므로 먼저 수직선을 함수 $p : \mathbb{R} \to S_r$에 의해 반지름이 $r = \frac{k}{2\pi}$인 원주 상으로 보내면 $p(t) = p(t+nk)$ $(n : \text{정수})$이 성립한다. 우리나라 교과과정에서도 삼각함수가 일반각 $2n\pi + \theta$(단 $n$은 정수)에서 정의하기 때문에 삼각함수는 주기성을 띠게 되는 것으로, 여기서 일반각은 $p(\theta)$에 해당한다. 이처럼 일반각은 삼각함수의 주기성을 나타내는 데 결정적인 역할을 함에도 불구하고 현재의 교과과정에서는 그 의미가 소홀히 다루어지는 경향이 있다. 실제로 2007년 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정의 심화과정에 있던 주기함수로서의 삼각함수의 활용예의 제시가 삭제되었다. 그러나 대학교과정에서 삼각함수는 주기함수의 관점에서 정의되고 활용되고 있으므로 연계성을 감안해서라도 일반각과 삼각함수의 주기적 현상에서의 활용은 좀 더 부각될 필요가 있다고 생각한다.

현재의 교육과정은 라디안을 정의한 다음, 바로 육십분법으로 변환시키는 방법에만 치중하므로 학생들이 라디안의 의미를 깨닫기 힘들다. 실제로 라디안의 본질적 개념은 반지름의 길이를 단위로 하여 호의 길이를 측정하는 방법이고 각은 크기를 나타내는데 그것을 차용해서 쓰고 있는 것이다. 이와 같이 호의 길이로서 각의 크기를 재는 발상인 호도법에 대한 아이디어가 학생들에게 정착화 될 수 있도록 수직선을 원에 감아보는 활동이나 원위에 감긴 선을 직선으로 펼쳐보는 활동 또는 사고실험을 권고하는 바이다. 초・중등 교육과정에서 호도법 개념 정립을 위한 예비 학습으로 제시된 교수방안이 교사들에 의해 학습지도에 실제적으로 실천되고 도움이 되기를 기대해 본다.

## 참 고 문 헌

교육과학 기술부 (2009). 수학3-1, 수학4-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

김소정 (2009). 도형을 이용한 삼각함수 덧셈정리 지도 방안에 관한 연구, 동국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김수환・최영기・이중권・김진호・윤오영・김경현・최현근・이향수・김용준・안미숙 (2009). 고등학교 수학 교사용지도서, 서울: 교학사.

김완재 (2009). 라디안의 속성에 관한 연구 : 1rad은 각인가 실수인가?, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 19(3), 443-459.

김은실 (2007). 삼각함수 단원에 대한 인식 조사 및 학습 자료의 개발, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

김현웅 (2001). 호도법의 주기함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

남진영・임재훈 (2008). 라디안에 대한 교수학적 분석, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 18(2), 263-281.

노아림 (2007). 삼각함수 단원의 수학사적 고찰과 지도 방안 연구, 서강대학교 교육대학원 석사학위 논문.

손혜경 (2009). 교사 지식에 대한 수학과 교사들의 반성적 성찰(10-나 삼각함수 단원에 대한 논의), 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

송은영 (2008). 삼각함수 개념의 지도에 관한 연구, 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

심현주 (2007). 교수학적 상황론에 따른 삼각함수의 지도, 서강대학교 교육대학원 석사학위 논문.

우정호・박교식・박경미・이경화・김남희・임재훈・박인・지은정・신보미・최인선 (2009). 중학교 수학 1, 서울: 두산동아.

우정호・임재훈・박경미・이경화 역, Toeplitz O. (2006). 퇴플리츠의 미분적분학. 서울: 경문사.

이무현 역, Euclid & Heath T.L. (1976) *기하학원론(가 권해설서)*. 서울; 교우사.

이상원・방승진 (2004). 삼각비 단원이 삼각함수 단원에 미치는 영향, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> 18(2), 187-208.

이종희 (2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 3(1), 25-44.

임재훈・이대현・이양락・박순경・정영근 (2004). 수학과 교육내용 적정성 분석 및 평가. 한국교육과정 평가원 연구보고 RRC-2004-1-5.

장영수 (2006). 삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도 방안에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정순영・권혁천・강운중・이환철・신지영・설정수 (2009) 중학교 수학 1. 서울: (주) 두산.

조영재 (2002). 호도법의 효과적인 지도에 관한 연구, 목원대학교 교육대학원 석사학위논문.

홍승표 (2005). 유클리드 기하 개론, 서울: 경문사.

Barra G. (1981). *Measure Theory and Integration*, Ellis Horwood Ltd.

Callahan J. & Hoffman K. (1995). *Calculus in Context*, Five Colleges, Inc.

Hilbert D. (1971). *Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Company.

Pinter C. (1971). *Set Theory*, Addison-Wesley Publishing Company.

Varberg D., Purcell V. & Rigdon S.E. (2000). *Calculus*, Prentice Hall International, Inc.

http://en.wikipedia.org/wiki/Measure_(mathematics).

# A Didactical Analysis on Circular Measure

**Mee Kwang Kang**
Dept. of Mathematics, Dongeui University,Busan 614-714, Korea
E-mail: mee@deu.ac.kr

The purpose of this study is to provide mathematical knowledge for supporting the didactical knowledge on circular measure and radian in the high school curriculum. We show that circular measure related to arcs can be mathematically justified as an angular measure and radian is a well defined concept to be able to reconcile the values of trigonometric functions and ones of circular functions, which are real variable functions. Radian has two-fold intrinsic attributes of angular measure and arc measure on the unit circle, in particular, the latter property plays a very important role in simplifying the trigonometric derivatives. To improve students's low academic achievement in trigonometry section, the useful advantage and the background over the introduction of radian should be preferentially taught and recognized to students. We suggest some teaching plans to practice in the class of elementary and middle school for enhancing teachers' and students' understanding of radian.

---

* ZDM classification : G64
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : trigonometric function, cicular measure, measurable function, radian, circular function
* This work was supported by Dong-eui University Grant(2011AA089).