韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2011. 08. 제 50권, 제 3호, 309-327.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2011, Vol. 50, No. 3, 309-327.

유한소수에서의 나눗셈 알고리즘(Division algorithm)

김 창 수 (경상대학교 사범대학 부설중학교)
전 영 배 (경상대학교)
노 은 환 (진주교육대학교)†

Ⅰ. 서론

현행 교육과정[1]에서 '나머지(remainder)'는 초등학교 3학년과 6학년에서 수와 연산 단원에서 학습하게 되며, 3학년에서는 자연수 나눗셈에서의 '나머지'를, 6학년에서는 유한소수 나눗셈에서의 '나머지'를 다루고 있다. 하지만 '나머지'의 의미가 무엇인지, '나머지'의 개념이 무엇인지에 대한 언급과 관심은 보이지 않으며, '몫(quotient)'과 '나머지'를 구하는 방법, 즉 나눗셈의 계산 방법에 대해서만 강조하여 가르치고 있는 실정이다. 더욱이 나누어떨어지지 않는 나눗셈의 경우에는 '몫'의 자리수를 제한(예, 자연수 부분까지 혹은 소수 첫째자리 등)하여 '나머지'를 구하게 하면서도 왜 '나머지'를 구하기 위해 '몫'의 자리를 제한해야 하는지에 대한 명확한 설명은 이루어지지 않고 있다.

이러한 지도 방법은 계산력을 기르기 위해 정수에서의 나눗셈 알고리즘(division algorithm)을 그대로 적용하여 학생들의 계산력 향상에 주목하기 때문으로 판단된다. 이런 계산력 향상의 의도는 수학과 2007 개정 교육과정 <6학년> 소수(decimal)의 나눗셈 부분에서 "나누는 수가 소수인 나눗셈의 의미와 계산 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다(교육인적자원부, 2007)"라는 데서 분명히 드러나고 있다. 하지만 실제 생활에서 '나머지'가 발생되는 상황을 쉽게 접할 수 있다는 점을 감안한다면, 단순히 계산력 향상을 위한 '나머지'의 지도는 지양되어야함을 알 수 있다.

수학 학습에서 알고리즘은 수학의 교수・학습에서 필수적이며 아주 유용하게 사용되고 있다. 우정호(1998)는 알고리즘이 수학의 본질적인 요소로서 수학 학습에 있어서 중요한 부분을 차지한다고 하였으며, Usiskin(1998)은 수학 학습에서 알고리즘은 강력하고, 신뢰할 만하며, 정확하고, 빠르며, 정신적 이미지를 형성시키며, 정보와 답 사이에 통찰력을 가지는 등 많은 장점을 가지고 있음을 강조하였다. 하지만 Usiskin(1998)는 알고리즘이 내포하고 있는 문제점으로 결과의 맹목적 수용과 지나친 적용을 들고 있으며, 백선수(2002)는 기존의 알고리즘 지도가 공식을 암기하거나 지나치게 기계적인 훈련에 치중하게 되므로 빠르고 정확하게 답을 구하는 것만 가치 있게 여기게 되었다고 지적하고 있다. 또 Tabitha & Richard (1998)는 교사가 문제마다 효과적인 알고리즘을 가르쳐 주기 때문에, 학생들은 그보다 더 나은 문제해결 방법은 없다고 생각하거나 생각할 필요조차 느끼지 않는다고 하였다. 특히, 나눗셈의 알고리즘을 이용한 학습이 왜 그렇게 되는지에 대한 이해보다는 암기위주의 학습으로 흐르고 있음을 많은 연구에서 지적하고 있다(민인영, 2003; 송정화, 2005).

이러한 이유로 정수에서의 나눗셈 알고리즘을 유한소수에서도 별 다른 고려 없이 소수점의 위치를 옮겨 정수화(整數化) 하여 적용하려고 하는 시도에는 지양해야할 부분이 많다고 판단된다. 현재 초등학교에서 다루는 나눗셈과 최근의 나눗셈에 대한 많은 연구들(박교식・송상헌・임재훈, 2003; 김명운, 2009 등)은 정수에서 연구된 나눗셈 알고리즘에 기초하고 있지만 나눗셈 알고리즘에

* 접수일(2001년 7월 15일), 수정일(2011년 8월 8일), 게재확정일(2011년 8월 15일)
* ZDM분류 : F43, F93
* MSC2000분류 : 97D30
* 주제어 : 유한소수, 나눗셈 알고리즘, 나머지, 측정단위

1) 2010년 12월 현재, 초등학교는 7차 교육과정, 2007 개정 교육과정, 2009 개정 교육과정이 혼재하고 있어 하나의 교육과정으로 표기하는 데는 어려움이 있음.

대한 의미를 찾아보기는 어렵다.

'나머지'는 일상용어이면서 동시에 수학용어이다. 일상용어의 입장에서 보면 피자 7판을 2사람이 나누어 먹을 때, 1판씩 먹고 5판을 남길 경우, 2판씩 먹고 3판을 남길 경우, 3판씩 먹고 1판을 남길 경우, 남은 각각의 5판, 3판, 1판 모두를 '나머지'라고 할 수 있다. 이러한 '나머지'에 대한 생각을 본 연구에서는『나머지』[2]와 '남은 양'으로 용어를 다음과 같이 구분하여 다루고자 한다. 나눗셈 계산의 결과로 남는 양을 '남은 양'이라 하고, '남은 양'이 어떤 조건에 의해 유일하게 결정될 때『나머지』라고 하자. 잘 알려져 있는 것과 같이 정수에서는 '남은 양' 중에서 0 이상이면서 제수보다 작은 것이『나머지』가 되며, 이 조건에 의해 유일하게 결정된다. 위의 경우에서 보면 5판, 3판 1판은 모두 '남은 양'이 되며 그 중 1판이『나머지』가 된다.

그럼, 7.51을 2.8로 나누었을 때『나머지』는 다음 중 무엇인가?

$$7.51 = 2.8 \times 2 + 1.91$$
$$7.51 = 2.8 \times 2.6 + 0.23$$
$$7.51 = 2.8 \times 2.68 + 0.006$$
$$\cdots$$

1.91, 0.23, 0.006 … 모두는 정수에서의『나머지』를 결정하는 조건을 만족하고 있지만 유일하지 않기 때문에『나머지』가 아니라 '남은 양'일 뿐이다. 이러한 이유로 유한소수에서의 '남은 양' 중 어떤 조건이『나머지』를 결정하게 되는지를 살펴볼 필요성이 제기 된다.

'나머지'를 구할 때 주어진 수가 어떤 수 체계에 속하는지, 그 수 체계 속에서 '나머지'의 의미는 무엇인지에 대한 고민 없이 습관적으로 정수에서의 나눗셈 알고리즘을 유한소수[3]에서도 그대로 적용하려는 시도 때문에, 유한소수에서의 '나머지'는 간과하고 넘어가는 문제였다고 생각된다. 이런 생각의 연장에서 유한소수에서의『나머지』에 대한 연구는 결국 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘에 대한 연구와 맥을 같이하게 된다.

나눗셈에서 무엇을 '몫'으로 하고 '나머지'로 해야 할지에 대한 문제는 '몫'과 '나머지' 두 가지를 결정하여야 하는 것처럼 보이나 사실 곱셈과 덧셈의 성질에 의해 '나머지'가 결정되면 '몫'은 '나머지'에 의해 결정되고, '몫'이 결정되면 '나머지'가 결정되므로 '몫' 혹은 '나머지' 하나의 결정에 관한 문제로 볼 수 있다.

따라서 본 연구에서는 '나머지'를 중심으로 탐구하여[4] 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘 정리를 완성하고자 하며, 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 유한소수에서의『나머지』의 조건은 무엇인가?

둘째, 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘의 증명은 어떻게 이루어지는가?

셋째, 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘은 어떤 의미를 가지는가?

Ⅱ. 이론적 배경

본 장에서는 나눗셈의 의미와 초등학교 교육과정에 대해 분석하고자 한다.

1. 나눗셈의 의미

이제 유한소수에서의『나머지』를 결정하는 조건은 어떤 것이 가장 합당한지를 알아보기 위해, 나눗셈에 사용되는 수와 측정단위에 대해 알아본 후, 나눗셈의 의미를 살펴보겠다.

가. 나눗셈에서의 수 개념

수는 하나의 개념으로 규정하기 어려운 매우 복합적인 개념이다. 이런 이유로 수 개념에 대한 여러 학자들의 다양한 논의가 지금까지도 계속되고 있다. 그들의 논의를 간략히 살펴보면 다음과 같다.

Freudenthal(1973)은 수 개념을 셈수, 개수, 측정수, 계

---

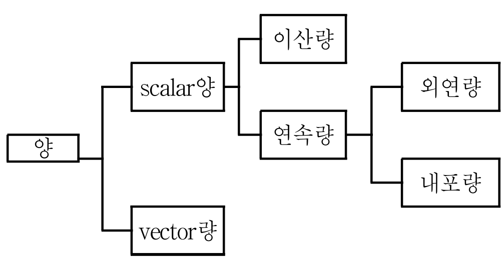
2) 기존의 나머지와 구분하기위해 본 논문에서 정의한 나머지는『나머지』로 표기함.

3) 본 연구에서는 양의 정수와 양의 유한소수 전체를 유한소수라고 함.

4) '몫'을 우선하여 '나머지'를 다룰 경우, '몫'은 나눗셈 맥락에 따라 제수와 피제수와는 다른 종류의 측정수가 될 수 있다(예, 길이를 나타내는 두 수의 포함제 나눗셈에서 '몫'은 셈수 임). 그러므로 '몫'을 우선하면 '몫'의 측정방법을 모색해야 하지만, '나머지'를 우선하면 '나머지'는 피제수와 같은 종류의 측정수가 되므로, 새로운 측정방법의 모색 없이, 제수와 피제수만으로 '나머지'와 '몫'을 다룰 수 있게 된다.

산수로 구분하였고, Confrey는 집합(기수)개념, 순서수 개념, 비 개념, 무한 소수개념, 점-수 대응 개념, 조작적 수 개념으로 제시하였다(최애리, 2010, pp. 21-25, 재인용). 또 Thorndike는 수 개념을 계열로서의 의미, 집합으로서의 의미, 비로서의 의미, 관계로서의 의미로 구분하였다. Piaget는 수를 기수와 순서수가 종합된 조작으로 보았으며(고정화, 2005, pp. 58-76, 재인용), Dewey & Mclellan(1895)은 수를 객관적인 지식으로 생각하지 않고 측정이란 인간 활동의 소산이라고 생각하였다. Dewey에게 수는 구체물의 성질이 아니라 측정 활동의 결과이므로 수 개념은 측정 활동을 통해 파악되는 전체량과 단위량 사이의 비인 측정수라고 하였다(최애리, 2010). Davydov 또한 측정수의 개념으로 수를 정의하였으며(최애리, 2010), Stevine은 수를 양의 측정 활동으로 정의하고 양의 개념은 측정활동과 함께 드러나는 것이며 측정활동과 무관하게 혹은 선행해서 파악될 수 없는 것이라고 하였다(강흥규 · 고정화, 2003).

'나눗셈'에 사용되는 수를 좀 더 구체화 해보기 위해 '양(量)'이란 무엇인지 살펴보자. '양(量)'이란 어떤 사물의 크기라는 관점에서 관찰할 때, 관측자로 하여금 대소의 차이를 느끼게 하는 추상 개념으로 설명되고 있다. 또 '양(量)'은 더 이상 분할 할 수 없는 독립된 개체의 수를 나타내는 이산량과, 분할 가능한 연속량으로 나누어지고 있으며 이산량의 수치화 과정을 '센다(counting)'라고하며, 연속량을 수치화 하는 과정을 '측정(measurement)'이라고 한다(김수환 외, 2009). 하지만 '측정(measurement)'이라는 것이 '단위 수'에 대한 주어진 크기를 구하는 것이라는 입장에서 보면 '세기(counting)' 또한 큰 범주의 '측정(measurement)'으로 볼 수 있다. 이와 같은 '양(量)'을 서성보(2000)는 다음 <그림 1>과 같이 분류하고 있다.



<그림 1> 양의 분류(서성보, 2000, p. 336)

'나눗셈'에서의 수는 어느 개념으로 보는 것이 타당한가? 최근 들어 유리수의 지도는 양(量)의 측정으로서의 수로 받아들여지는 경향이 강하며(강흥규 · 고정화, 2003; 정윤희, 2009; Davydov. V. V. & Tsvetkovich, H. Z., 1991 등), 이러한 실생활에서의 측정활동과 연관한 유리수 지도에 대한 연구들(방정숙 · 이지영, 2009; 김명운, 2009; 박교식 · 송상헌 · 임재훈, 2004; 전평국 · 박혜경, 2003)이 계속해서 발표되고 있다. 더욱이 현재 교육과정에서 초등학교의 수 개념의 도입을 위한 설명은 모두 실생활에서 측정의 결과인 수를 통해 이루어지고 있으므로, '나머지'를 고려하는 '나눗셈'에서 수는 '양(量)'의 측정의 결과인 측정수로 보는 것은 자연스러운 일이다.

나. 측정의 단위

양의 측정에서 자연수와 분수 개념은 '전체량과 단위량 사이의 비'로서 동일하며 다만 차이점이라면 분수는 자연수보다 정확한 측정과정을 나타낸다는 것뿐이다. 사회의 발달은 인간에게 측정이 보다 정교해질 것을 요구하고, 이러한 필요성에 의해서 단위는 등분할 되며, 정교한 단위를 통한 측정을 나타내는 것이 분수라고 하였다(강흥규 · 고정화, 2003). 유한소수는 분수 중 특별한 경우에 해당하므로 단위를 생각할 수 있으며, 단위를 통한 측정수로 보는 것은 당연하다.

Davydov & Tsvetkovich(1991)는 양의 측정을 통한 분수의 도입과 지도가 여러 가지 장점이 있으며, 그들의 방법은 자연수 도입에서와 마찬가지로 '대상-단위-수'라는 측정의 세 요소 사이의 상호관계를 중심으로 하며, 특히 측정이 보다 정교해지는 과정 속에서 일어나는 단위의 변화가 주목의 대상이라고 하였다. 그러므로 '나머지'를 고려하는 나눗셈에서의 수는 측정의 결과의 수이므로 반드시 측정의 단위를 고려해야 함을 알 수 있다.

다. 나눗셈의 의미

본 연구는 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘 정리를 증명하는데 그 목적이 있으므로, '나머지'를 구하기 위한 '나눗셈'의 의미를 고려해야한다. '나머지'란 '나눗셈'의 결과로 나타나며 유한소수는 분수의 한 부분이므로, 일반적으로 알려진 분수 나눗셈의 의미를 통해 '나머지'를 고려한 유한소수에서의 나눗셈의 의미를 살펴보자.

분수 나눗셈은 Ma(1999)가 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘곱과 인수 모델’의 세 가지로 나눈 것을, Sincrope, Mick & Kolb(2002)가 Ma(1999)의 세 가지 분류를 포함하면서도 좀 더 정교하게 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘단위비율 결정’, ‘곱셈의 역’, ‘카테시안 곱의 역’으로 분류하였다. 이 다섯 가지가 분수 나눗셈의 일반적인 의미로 받아들여지고 있으므로 이 다섯 가지를 기준으로 유한소수에서의 나눗셈의 의미를 살펴보자.

1) 포함제(측정 모델) 맥락

포함제는 주어진 양과 같은 종류의 양으로 나누는 경우에 해당하는 것으로, 나눗셈의 일반적인 상황과 같은 경우를 이른다. Ma(1999)에 따르면, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 포함제 상황은 “$1\frac{3}{4}$안에 포함된 $\frac{1}{2}$의 개수 알아내기” 또는 “우유 $1\frac{3}{4}$L 있습니다. 한 사람이 $\frac{1}{2}$L씩 마신다면 모두 몇 사람이 마실 수 있습니까?”나 “모래가 $1\frac{3}{4}$kg이 있다. 이 모래를 $\frac{1}{2}$kg씩 나누어 담으면 몇 봉지가 나오는가?”와 같은 상황이다. 결국 포함제 맥락은 한 수에 다른 수가 몇 번 들어있는지를 알아보는 상황이며, 몇 개, 몇 번, 몇 사람과 같이 ‘몫’이 이산량으로 주어지면 분수 나눗셈의 계산 결과와 일치하지 않는 상황이 발생할 수 있게 된다(박교식 · 송상헌 · 임재훈, 2004).

2) 등분제(분할 모델) 맥락

등분제는 주어진 양을 그 양과는 다른 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. Ma(1999)는 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 예로 “어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이 되는 그 어떤 수 알아내기”라고 하였다. 또 다른 예로는 “우유 $\frac{3}{2}$L를 6명에게 나누어 줄 때 몇 L씩 나누어 주어야 하는지”를 구하는 상황이다. 백수진(2009)은 등분제에서 제수의 수로 똑같이 나누는 것에 주목하는 것 대신 1인당 얼마를 주어야 하는가에 주목하면 등분제는 한 단위에 해당하는 양을 결정하는 ‘단위 비율의 결정’의 한 부분으로 생각할 수도 있다고 하였다.

3) 단위 비율의 결정 맥락

포함제는 같은 종류의 양을 비교하는 확률이나 타율에서와 같이 ‘율(率)’이라는 이름을 붙일 수 있는 상황이고 등분제는 다른 종류의 양을 비교하는 속도나 밀도에서와 같이 ‘도(度)’라는 이름을 붙일 수 있는 곳이나 단가를 구하는 상황에 해당한다(박교식 · 송상헌 · 임재훈, 2004). 단위 비율의 결정 맥락은 불특정한 비율(분수)로 주어진 값을 기본 단위에 해당하는 값으로 환산한 양을 구하는 경우이다. Ma(1999)에 제시된 것과 같이 “어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이 되는 그 어떤 수 알아내기”라고 할 수 있다. 예를 들면, “무게가 $1\frac{3}{4}$kg인 철봉의 길이를 재어 보았더니 $\frac{1}{2}$m이었다. 이 철봉 1m의 무게는 몇 kg인가?”나 “벼락에 맞아 높이가 반으로 쪼개어진 은행나무의 한 도막의 높이가 $1\frac{3}{4}$m라고 한다면 원래 나무의 높이는 몇 m인가?”가 될 수 있다.

4) 곱셈의 역 맥락

곱셈의 역 맥락은 곱셈의 역 조작으로서의 나눗셈하기를 의미한다. Ma(1999)가 ‘곱과 인수의 모델’이라고 부르는 것을 Sinicrope, Mick & Colb(2002)는 ‘곱셈의 역 맥락’과 ‘카테시안 곱의 역 맥락’으로 구분하였다. Sinicrope, Mick & Colb(2002)는 곱셈의 역 맥락으로 “피자를 좋아하는 아동은 48명이다. 이것은 샐러드를 좋아하는 아동의 수의 $1\frac{1}{2}$배이다. 샐러드를 좋아하는 아동은 몇 명인가?”와 같은 예를 들고 있다. 이와 같이 곱셈의 역 맥락은 배(培)의 상황의 역을 의미하는 것으로 보고 있다. Ma(1999)는 곱셈의 역 맥락으로 다음과 같은 예를 들고 있다. “어떤 인수와 $\frac{1}{2}$을 곱한 값 $1\frac{3}{4}$이라면, 그 인수는 얼마인가?” 방정숙(2008)은 곱셈의 역 맥락은 뺄셈이 덧셈의 역연산인 것처럼 나눗셈은 곱셈의

역연산임을 이용하는 것을 의미한다고 하였다.

5) 카테시안 곱의 역 맥락

양과 양의 곱 또는 차원과 차원의 곱은 동수누가나 배와는 구분이 되는 상황으로, 카테시안 곱의 맥락에 해당한다. '카테시안 곱의 역 맥락'은 바로 이러한 상황의 역을 말한다. 직사각형의 넓이를 나타내기 위한 상황, 밑넓이와 높이의 관계를 통해 부피를 구하는 상황, 시간과 거리의 관계를 이용한 속력을 구하는 상황, 농도 등이' 카테시안 곱의 역 맥락'으로 제시될 수가 있다. 박교식・송상헌・임재훈(2004)은 그 예로 "넓이가 $1\frac{3}{4}$ ㎡인 직사각형의 가로의 길이가 $\frac{1}{2}$m일 때, 세로의 길이는 몇 m인가?" 또는 "$1\frac{3}{4}$㎞의 거리를 가는데 $\frac{1}{2}$시간 걸렸을 때, 속력을 구하라"의 경우를 들고 있다.

위의 다섯 가지 분수 나눗셈 맥락 중 '나머지'를 고려한 나눗셈은 어떤 맥락과 잘 맞는지 생각해보자. 먼저 '곱의 역 맥락'과 '카테시안 곱의 역 맥락'은, 분수 나눗셈의 의미를 곱셈 연산의 역연산으로 생각하고 있는데, 이는 '나머지'가 발생되는 나눗셈에는 곱셈 연산 외에도 덧셈 연산이 사용되어야 하므로 알맞은 맥락을 찾기란 쉽지 않다. 또 '단위 비율의 결정 맥락'은 제수를 기본 단위의 양으로 바꾸었을 때의 피제수의 양을 구하는 맥락이므로, 나누어떨어지는 나눗셈에서 '몫'의 의미는 잘 드러나지만, 나누어떨어지지 않는 나눗셈, 즉 '나머지'가 발생되는 나눗셈은 다루기 어렵다. 이에 반해 '나머지'를 고려하는 나눗셈 $9 \div 2$의 맥락으로 "9개의 사탕이 있습니다. 2개씩 포장하여 선물 하려고 합니다. 포장할 수 없는 사탕은 몇 개 입니까?' 와 '9개의 사탕이 있습니다. 2사람에게 공평하게 나누어 주려고 합니다. 나누어줄 수 없는 사탕은 몇 개 입니까?"의 상황을 생각할 수 있다. 이 두 가지의 예는 포함제와 등분제 맥락이며, 포함제와 등분제 맥락은 '나머지'를 고려하는 나눗셈에서 쉽게 다룰 수 있는 이점이 있다. 그러므로 본 연구에서는 나눗셈의 의미를 포함제와 등분제 맥락으로만 다루고자 한다.

2. 교육과정 분석

현재 초등학교 2007 개정 교육과정에서 나눗셈과 관련된 내용을 살펴보면 초등학교 3학년에서 처음으로 (몇십) ÷ (몇)의 나눗셈을 학습하고, 5학년에서는 (자연수) ÷ (자연수), (분수) ÷ (자연수), (소수) ÷ (자연수)의 나눗셈을, 6학년에서의 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈, 분수와 소수의 혼합계산 순으로 학습하게 되어있다. 각 학년 별로 수와 연산 단원의 구체적인 내용을 살펴보면 다음 <표 1>과 같다.

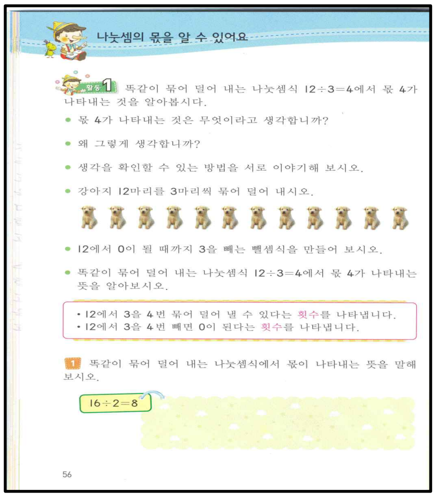
<표 1> 수와 연산과 관련된 학년별 내용 체계

영역 \ 학년	3학년	5학년	6학년
수와 연산	・1000까지 수 ・네 자리 수의 덧셈과 뺄셈 ・곱셈 ・나눗셈 ・분수 ・소수의 이해	・약수와 배수 ・약분과 통분 ・소수와 분수 ・분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈 ・분수의 곱셈과 나눗셈 ・소수의 곱셈과 나눗셈	・분수의 나눗셈 ・소수의 나눗셈 ・분수와 소수의 혼합 계산

3학년 2학기에서는 나눗셈을 다루면서 처음으로 '나머지'라는 용어와 '나누어떨어진다.'라는 용어를 사용하고 있지만 <그림 3>에서와 같이 "13을 5로 나누면 '몫'이 2이고 3이 남습니다. 이때, 3을 13 ÷ 5의 나머지라고 합니다."로 간략히 언급하고 있는데, 이는 정수에서의 나눗셈 알고리즘에서 정의된 '나머지'의 정의를 그대로 언급한 것이다. 이러한 '나머지'의 설명이 학생들에게 어떤 의미로 받아들여지며, '나머지'의 의미가 무엇인지 알 수 있을지가 의문이다.

이에 반해 '몫'은, 3학년 1학기에서 '몫'이라는 용어를 처음 사용하면서 "똑같이 묶어 들어내는 나눗셈 식에서 '몫'이 나타내는 뜻을 말해보시오."와 "똑같게 나누는 나눗셈 식에서 '몫'이 나타내는 뜻을 말해보시오." 등의 물

음을 <그림 2>와 같이 제시하고 있다. 이것은 '몫'은 '나머지'와 달리 의미가 강조되어 지도되고 있음을 보여주는 것이다.


나눗셈의 몫을 알 수 있어요

활동 1 똑같이 묶어 덜어 내는 나눗셈식 12÷3=4에서 몫 4가 나타내는 것을 알아봅시다.

- 몫 4가 나타내는 것은 무엇이라고 생각합니까?
- 왜 그렇게 생각합니까?
- 생각을 확인할 수 있는 방법을 서로 이야기해 보시오.
- 강아지 12마리를 3마리씩 묶어 덜어 내시오.
- 12에서 0이 될 때까지 3을 빼는 뺄셈식을 만들어 보시오.
- 똑같이 묶어 덜어 내는 나눗셈식 12÷3=4에서 몫 4가 나타내는 뜻을 알아보시오.

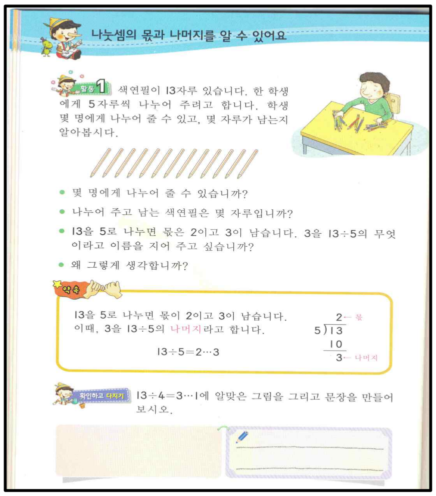
• 12에서 3을 4번 묶어 덜어 낼 수 있다는 횟수를 나타냅니다.
• 12에서 3을 4번 빼면 0이 된다는 횟수를 나타냅니다.

1 똑같이 묶어 덜어 내는 나눗셈식에서 몫이 나타내는 뜻을 말해 보시오.

16÷2=8

56

<그림 2> 초등학교 3-1 '몫'의 지도내용
(교육과학기술부, 2010, pp. 56)


나눗셈의 몫과 나머지를 알 수 있어요

활동 1 색연필이 13자루 있습니다. 한 학생에게 5자루씩 나누어 주려고 합니다. 학생 몇 명에게 나누어 줄 수 있고, 몇 자루가 남는지 알아봅시다.

- 몇 명에게 나누어 줄 수 있습니까?
- 나누어 주고 남는 색연필은 몇 자루입니까?
- 13을 5로 나누면 몫은 2이고 3이 남습니다. 3을 13÷5의 무엇이라고 이름을 지어 주고 싶습니까?
- 왜 그렇게 생각합니까?

약속

13을 5로 나누면 몫이 2이고 3이 남습니다.
이때, 3을 13÷5의 나머지라고 합니다.

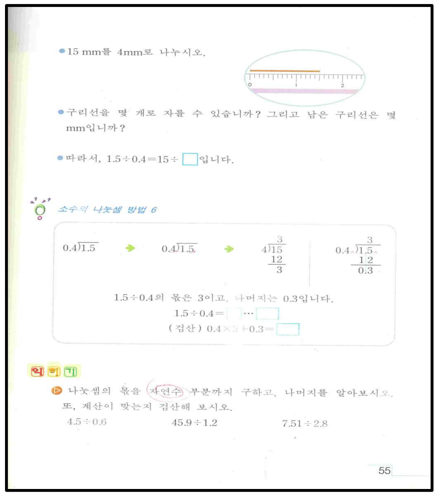
13÷5=2…3

2← 몫
5)13
10
3← 나머지

확인하고 다지기 13÷4=3…1에 알맞은 그림을 그리고 문장을 만들어 보시오.

<그림 3> 초등학교 3-2 '나머지'의 지도내용
(교육과학기술부, 2010, p. 54)

또 6학년 2학기에서는 <그림 4>와 같이 소수의 나눗셈을 다루면서 "나눗셈의 '몫'을 자연수 부분까지 구하고, 나머지를 알아보시오." 라는 문제를 제시하고 있다. 이 문제에서는 '나머지'가 무엇인지에 대한 고려는 전혀 보이지 않으며, 더욱이 '몫'을 제한하여 나머지를 구하라는 것은 '몫'에 종속되는 나머지를 생각하라는 것이다. 이렇게 '몫'을 자연수까지 혹은 소수 몇 째 자리까지로 제한하여 구한 나머지를 과연 우리는 나머지라고 할 수 있을지가 의문이다. 본 연구에서는 이러한 나머지는 '남은 양'으로 정의하였으며, 김명운(2009)은 수학에서 나머지는 정수환(整數環)에서 정의되는 것이지 유리수체(有理數體)에서는 언급 될 수 없다고 하면서 '나머지'라는 용어 대신에 '남은 양'이라는 용어를 사용하여야 한다고 하였다.


- 15 mm를 4mm로 나누시오.
- 구리선을 몇 개로 자를 수 있습니까? 그리고 남은 구리선은 몇 mm입니까?
- 따라서, 1.5÷0.4=15÷□입니다.

소수의 나눗셈 방법 6

0.4)1.5 → 0.4)1.5 → 4)15 | 0.4)1.5

1.5÷0.4의 몫은 3이고, 나머지는 0.3입니다.
1.5÷0.4=□…□
(검산) 0.4×3+0.3=□

익히기

나눗셈의 몫을 자연수 부분까지 구하고, 나머지를 알아보시오. 또, 계산이 맞는지 검산해 보시오.

4.5÷0.6 45.9÷1.2 7.51÷2.8

55

<그림 4> 초등학교 6-나 '몫'을 제한하여 '나머지'를 구하는 교과서 내용(교육과학기술부, 2010, pp. 55)

이러한 것들은 모두, 학생들에게 나눗셈을 지도하면서 '나머지' 보다는 '몫'을 더 중시하여 지도해 오고 있으며, '몫'을 구하기 위한 계산력 향상에만 집중되고 있음을 보여주는 것들이다. 물론 나눗셈의 계산에서 '몫'이 정해지면 '나머지'는 저절로 정해지므로 '나머지'의 강조는 별 의미 없어 보이기도 하지만 정수가 아닌 더 확장된 수 체계에서 '몫'을 강조하여 '나머지'를 구하는 것과 '나머지'를 강조하여 '몫'을 구하는 것은 전혀 달라질 수 있음에 주지해야 한다. '몫'을 우선하여 '나머지'를 다룰 경우 나눗셈 맥락에 따라 '몫'은 제수나 피제수와는 다른 종류

의 측정수가 될 수 있다. 예를 들어 “13.6㎝에는 6.2㎝가 몇 번 들어가는가?”를 묻는 포함제 맥락에서 ‘몫’은 몇 번을 나타내는 수가 된다. 이러한 ‘몫’은 길이를 나타내는 13.6㎝과 6.2㎝와는 다른 종류의 측정수이다. 제수와 피제수와는 다른 새로운 측정단위를 갖는 ‘몫’은 과연 어느 단위까지 측정하여야 하는가하는 새로운 문제를 야기시킨다. 심지어 ‘몫’의 단위를 충분히 작게 잡아줄 경우 ‘나머지’는 항상 0으로 만들 수 있게 되므로, ‘몫’에 따르는 ‘나머지’는 그 가치 또한 의심 받게 될 것이다. 하지만 ‘나머지’를 우선하여 ‘몫’을 다루게 되면, ‘나머지’는 항상 피제수와 같은 종류의 측정수가 되므로 주어진 제수와 피제수의 측정단위만으로도 충분히 ‘나머지’와 ‘몫’을 다룰 수 있게 된다. 이런 이유로 본 연구에서는 유한소수에서 ‘나머지’를 우선하여 ‘몫’을 다루어 보고자 한다.

Ⅲ. 유한 소수에서의 나눗셈 알고리즘

우선『나머지』는 어떤 의미를 가져야 하는지 살펴보고, 나눗셈 맥락에서 ‘나머지’와, 유한소수에서의 ‘나머지’가 발생되는 맥락을 통해 유한소수에서의『나머지』는 어떤 조건으로 유일하게 정할 수 있는지 살펴본 다음, 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘을 증명하고자 한다.

1.『나머지』의 의미

‘나머지’는 일상용어뿐만 아니라 수학용어이므로, 수학에서 사용하기 위해서는 좀 더 엄밀하게 고려되어야할 필요가 있다. 일상용어로 사용되는 ‘나머지’를 수학용어로 그대로 사용한다면 나눗셈의 결과로 나타나는 ‘나머지’라는 대상은, 나눗셈이 발생되는 상황이나 나누는 사람의 의도에 따라 아주 다양하게 나타날 수 있다. 다양한 ‘나머지’가 존재한다면 ‘나머지’는 수학에서 다루기 어려울 것이며, 나눗셈의 의미마저 받아들이기 어려워지게 될 것이다. 때문에 ‘나머지’에 대한 생각을 본 연구에서는『나머지』와 ‘남은 양’이라는 용어를 서론에서 정의한 바와 같이 구분하여 사용하고자 한다. 따라서 제수를 a, 피제수를 b라 할 때, $b=a\times q+p$이라는 식이 만족되는 상황에서 ‘남은 양’은 곱셈과 덧셈 연산에 의해 가부(可否)가 판단될 수 있으며,『나머지』는 ‘남은 양’ 중에서 주어지는 조건에 의해 가부(可否)가 판단될 수 있다.

물론 정수에서는『나머지』의 조건을 “0 이상이고 제수보다 작은 것”으로 생각하는 것이 보편적이다. 이러한 정수에서의『나머지』의 조건을 그대로 받아들인다고 해도 유한소수의 나눗셈에서『나머지』를 유일하게 결정할 수 있는 조건은 많을 수 있다. 그 조건으로 0 이상이고 제수보다 작은 ‘남은 양’ 중 최댓값 또는 최솟값 등을 생각할 수 있지만, 그 조건들이 정수에서의『나머지』의 의미를 그대로 포함하는지, 일상용어로서의 ‘나머지’의 의미를 최대한 반영하고 있는지는 분명하게 확인해볼 필요가 있다.

『나머지』의 조건은 어떤 의미를 가져야 하는지를 피자 9판을 2사람이 나누어 먹는 경우를 통해 살펴보자. 2사람이 먹기에 피자 9판은 너무 많으므로 각각 1판씩만 먹었다면 남는 양은 얼마인가? 물론 7판이다. 그런데 1명이 배가 고파 2판을 먹고 1명은 1판을 먹었다면 남는 양은 6판이 된다. 여기서의 7판과 6판은 ‘나머지’인가? 수학에서 ‘나머지’를 다루기 위해서 어떤 일을 행한 결과(나누기)가 대상(위 문제의 경우는 사람)에게 어떤 영향을 미치는가(배부름)를 고려할 필요는 없다. 오히려 행한 결과가 공평[5]한지와 공평성을 해치지 않는 상황 하에서 어디까지 그 일을 해야 하는지가『나머지』의 판단 근거가 되어야한다. 7판이 남는 경우 일상생활에서는 나누는 행위가 끝났다고 판단할 수 있을지라도 수학적 관점에서는 나눗셈이 완수[6] 되었다고 볼 수 없으며, 6판이 남는 경우에는 두 사람이 나누어 먹은 것이 공평하지도 않으며 나누어 먹는 것도 완수 되었다고 볼 수 없다. 또 2사람이 각각 4판 반(0.5)씩의 피자를 먹었다면 일상생활에서는 공평하다고 할 수 있을지라도, 정확한 측정단위를 가진 도구 없이 눈대중으로 1판의 피자를 나누어 먹은 게 되므로 수학적 관점에서는 결코 공평하다고할 수 없다. 그러므로 2사람이 각각 4판의 피자를 먹고 1판을 남길 때, 그때의 ‘남은 양’을『나머지』로 받아들이는 게 가장 타당하며 이는 정수에서의 ‘나머지’와 같은 값, 같은

5) ‘공평’은 정확한 측정단위로 똑 같이 나누어 갖는 상태로 정의하여 사용함.

6) ‘완수’는 수에 주어진 측정단위를 고려하여 나눗셈 연산에서 ‘남은 양’이 최소가 되는 나눗셈 상태를 나타냄.

의미를 가진다. 그러므로『나머지』의 조건은 공평해야하며 완수한 결과의 의미를 가지는 것이어야 한다.

2. 나눗셈 맥락에 따른 '나머지'

김명운(2009)은 분수 나눗셈 상황을 다루면서 '양(量)'에 따라 '나머지'가 발생되는 상황을 다음의 <표 2>와 같이 분류하였다. 그는 포함제 나눗셈에서 주어진 '몫'의 양이 이산량이면 '몫'의 단위가 자연수가 되므로 나머지가 발생되며, '몫'이 이산량인 등분제의 경우 '나머지'는 발생되지 않으며 '몫'의 상황이 부자연스럽다고 하였다. 또 '몫'이 연속량일 경우는 '몫'이 분수로 처리되며 포함제와 등분제 맥락 모두에서 '나머지'는 생기지 않는다고 하였다.

<표 2> 분수 나눗셈 상황의 분류(김명운 2009 pp.109)

나눗셈 상황	'몫'인 양(양)의 종류	나머지 발생 유무
포함제	이산량	○
	연속량	×
등분제	연속량	×

포함제 나눗셈에서 '몫'이 이산량인 경우, '몫'이 '세는(counting)' 행위의 측정으로 나온 이산량이며, '제수는 피제수에 몇 번 포함 되는가?'를 묻는 포함제의 성격으로 인해 '몫'이 셈수(counting number), 즉 자연수가 되어야 함은 당연하며, 이로 인해 '나머지'가 발생된다는 것도 쉽게 알 수 있다. 하지만 '몫'이 연속량이면 포함제의 성격인 '몇 번 포함 되는가?'의 '몇 번'의 이산적인 의미와 측정의 단위가 주어지면 언제든지 분할 가능하다는 연속의 의미가 서로 맞지 않으므로 알맞은 '나눗셈' 상황을 찾기도 어렵고 '나머지'를 다루기도 어렵다.

또 김명운(2009)은 '몫'이 연속량인 등분제에서는 몫이 분수로 나오는 특징으로 인해 '나머지'가 존재하지 않으며, '몫'이 이산량인 등분제는 '몫'의 상황이 부자연스럽다고 하였다. 박교식 · 송상헌 · 임재훈(2004)은 '등분'이라는 말은 나누는 수가 자연수인 경우에 잘 어울리지만 나누는 수가 분수인 경우에 잘 어울리지 않으므로 분수로 나누는 경우의 적절한 문장제는 만들 수 없을 것이라고 하였다. 현행 3학년 2학기 수학교사용 지도서(2010)에서는 $13 \div 5$를 설명하는 과정에서 이론적 배경으로 "$13 \div 5 = 2 \cdots 3$을 생각하기 위하여 동수누감 나눗셈으로 생각하여야 한다. 왜냐하면 연필 13개를 5곳으로 똑같이 나눌 수 없기 때문에 등분제 나눗셈을 생각해선 안 된다"라고 하고 있다. 이러한 이유들은 등분제 나눗셈을 '등분할[7]'의 의미로 '등분'에 집착했기 때문으로 판단된다. '등분'에 대한 집착은 나눗셈에서 '나머지'는 고려하지 않은 채 '몫'만 지나치게 강조하는 결과를 낳게 되었고, 결국 등분제 나눗셈은 항상 나누어떨어지는 나눗셈이 되었다. 이 때문에 '몫'이 이산량인 등분제의 '몫'이 부자연스럽다고 생각하고 있는 것 같다.

이러한 주장들은 나눗셈에서의 수는 측정수로 다루어져야 함을 강조하면서도 측정수에는 측정단위가 주어진다는 사실을 간과하였고, 이로 인해 측정단위를 고려한 상태에서 '등분'하여야 한다는 사실을 놓치고 있다. 하지만 측정단위를 고려하여 주어진 수를 생각한다면, 측정단위로 인해 '등분'할 수 있는 '수의 자리[8]'가 제한되며 '나머지'와 '몫'도 충분히 다룰 수 있게 된다.

예를 들어 살펴보자. "15개의 사탕을 2사람에게 골고루 나누어 주려고 합니다. '몫'은 얼마입니까?"의 문제를 해결하라고 하면 자연스럽게 '등분'과 '몫'에 집중하여 '몫'이 7.5개라고 답할 것이다. 그렇다면 '몫' 7.5개가 등분된 양인가? 사탕은 분명 1개 단위(측정단위)로 주어져 있음에도 0.5씩 나누어 갖는다는 것은 측정단위의 고려 없이 눈대중으로 대충 나누어 가진 것이며 이러한 나눗셈은 '공평'하지 못하다. 하지만 이 문제를 "15개의 사탕을 2사람에게 골고루 나누어 주려고 합니다. 몇 개씩 골고루 나누어 가질 수 있으며, 나누어 가질 수 없는 것은 몇 개인가요?"로 고친다면 이 문제는 '몫'이 이산량인 등분제 나눗셈이며, 위의 문제 상황과 일치한다. 이 문제의 일반적인 해는 분명 '몫' 7개와 '나머지' 1개이다. '남은 양' 1개는 측정단위가 1개(사탕 1개) 이므로 나눌 수 없는 양임을 인정한다면 분명 '몫' 7개는 '공평'하게 나누어 가진 것이다. 나눗셈에 사용되는 수에 주어진 측정단위를 가지고는 나눌 수 없는 양이 존재한다는 것을 인지하고, 나눌 수 있는 양이 '공평'한가를 생각해야 공평성을

7) 똑 같은 양으로 균등하게 나누는 것.

8) 소수 첫째 자리, 혹은 소수 둘째 자리 등.

따질 수 있게 되는 것이다. 측정단위를 고려하지 않고 ‘등분’에만 집중하여 나눌 수 없는 양을 계산상으로 나눈 ‘몫’은 ‘공평’하지도 않으며 현실과도 어울리지 않는다. 그러므로 ‘등분’의 사전적 의미에서 벗어나 주어진 양을 그 양과는 다른 종류의 양으로 나누는 등분제 나눗셈의 의미를 그대로 따르면서 측정단위를 고려한다면, 등분제 나눗셈에서도 충분히 ‘나머지’를 생각 할 수 있게 된다.

‘몫’이 연속량인 등분제 나눗셈 맥락의 예로는 다음을 들 수 있다. “세 사람이 공동으로 금광을 운영 하고 있습니다. 이들은 그 날 그 날 채굴한 금을 공평하게 나누어 가지기로 하였습니다. 그런데 그들에게는 금의 무게를 잴 저울로 1g 단위의 눈금이 있는 저울 밖에 없습니다. 그래서 그 저울로 나눌 수 없는 금은 금광 운영 자금으로 사용하기로 했습니다. 오늘 14g의 금을 채굴하였다면 금광 운영자금은 얼마입니까?” 이 맥락에서는 측정단위가 1g 이므로 ‘나머지’는 2g임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 ‘몫’이 연속량인 등분제 나눗셈에서도 충분히 ‘나머지’를 고려할 수 있음을 알 수 있다. 그러므로 ‘몫’이 이산량 이든지 연속량이든지 측정단위를 통해 등분제 나눗셈을 생각하면 ‘나머지’를 다룰 수 있게 됨을 알 수 있다.

이상의 내용을 정리하면 <표 3>과 같다.

<표 3> 나눗셈에서의 나머지 상황의 분류

나눗셈 상황	‘몫’이 갖는 양의 종류	나머지 발생 유무
포함제	이산량	○
	연속량	×
등분제	이산량	○
	연속량	○

3. 나눗셈 맥락을 통한 유한소수에서의『나머지』

본 연구에서의 수는 ‘양의 측정 결과로서의 수’라 생각하므로, 측정단위를 정확히 파악하는 일은 매우 중요한 일이다. 때문에 유한소수의 소수점 자리에 유의하여 수를 표기하도록 하겠다. 예를 들어, 같은 양을 나타내는 수 2와 2.0은 각각 측정단위가 1과 측정단위가 0.1인 도구로 측정된 수를 나타내는 것이다.

본 절에서는 우선 나눗셈 맥락을 통한 유한소수에서 피제수와 제수의 측정단위가 주어질 때,『나머지』의 측정단위는 어떠해야 하는지에 대해 살펴보겠다. 그런 다음 피제수와 제수의 측정단위를 기준으로 측정단위가 같은 경우, 피제수의 측정단위가 제수의 측정단위보다 작은 경우 그리고 제수의 측정단위가 피제수의 측정단위보다 작은 경우로 나누어『나머지』가 가져야할 조건을 살펴보겠다.

가.『나머지』의 측정단위

다음과 같은 문제 상황을 통해『나머지』의 측정단위는 어떠해야 하는지를 살펴보자. “병우의 멀리뛰기 기록은 1.58m이고, 동생의 기록은 0.9m입니다. 병우의 기록은 동생의 기록의 몇 배가 되며 그러고도 더 뛴 길이는 얼마인가?” 이 문제는 현행(2010년 12월 현재) 6학년 2학기 56페이지에 나오는 문제로 ‘나머지’를 구하는 문제 상황으로 수정한 것이다. 이 문제에서 주어진 측정단위는 0.01m와 0.1m 두 개이다. 하지만 0.1m의 측정단위는 0.01m의 측정단위로 측정이 가능하므로 사실 0.01m의 측정단위만 가지고 있으면 두 개의 측정값은 모두 측정 가능하다. 만약『나머지』가 1m 혹은 0.1m로 측정된 값으로 처리된다면 더 작은 측정단위(0.01m의 단위를 가진 측정도구)가 있음에도 큰 측정단위로만 다룬 것이 되며, 이것은 나누기의 행위가 ‘완수’ 되지 않은 것이 된다. 또 0.001m의 측정단위로『나머지』가 남는다면 문제에서 주어진 측정단위 외에도 0.001m의 새로운 측정단위를 사용한 것이 된다. 이는 문제의 조건에 맞지 않는 새로운 측정단위를 마음대로 사용한 것이므로 ‘공평성’에 위배되며 이러한 나누기는 눈대중으로 대충 나눈 것이 된다. 그러므로『나머지』는 0.01m의 단위로 측정된 값 이어야함을 알 수 있다.

또 다른 예로 수가 이산량으로 주어지는 경우를 살펴보자. “한 봉지에 사탕 열개 들어있는 사탕 3봉지 반(0.5)을 2사람에게 골고루 나눠주려고 한다. 이때의 ‘나머지’는 얼마인가?” 이 문제에서 주어진 측정단위는 사탕 한 개(0.1)와 한 사람(1)이다. 만약 ‘나머지’의 측정단위가 1(한 봉지)이라면-‘나머지’가 1봉지, 2봉지, 혹은 3봉지라면-한 봉지 속에는 10개의 사탕이 들어 있어 두 사람에게 5개씩 나눠 줄 수 있음에도 나누어 주지 않은 것이

된다. 이는 아직 나누기를 '완수' 하지 않은 것이 된다. 만약 『나머지』의 측정단위가 0.01이 되면 주어진 단위 중 가장 작은 사탕의 단위(0.1)보다 더 작은 단위이므로 주어지지 않은 단위를 마음대로 사용한 것이 된다. 결국 이러한 나누기는 사탕을 측정할 수 없는 단위로 잘게 부셔서 나눈 것이 되므로 '공평성'에 위배된다. 따라서 『나머지』의 측정단위는 사탕의 단위 0.1이 되어야 한다.

그러므로 피제수 a의 측정단위를 m이라하고 제수 b의 측정단위를 n이라고 했을 때, 『나머지』의 측정단위는 m과 n의 최솟값 즉, $\min\{m,n\}$으로 추정할 수 있다. 이러한 이유로 본 연구에서는 『나머지』의 측정단위를 다음과 같이 정의하여 사용하겠다.

<정의 1>

『나머지』의 측정단위는 min{제수의 측정단위, 피제수의 측정단위}이다.

나. 제수와 피제수의 측정단위가 같은 경우

피제수와 제수의 측정단위가 같을 경우『나머지』는 어떤 조건을 가져야 하는지에 대해 생각해보자. '몫'이 이산량인 포함제와 '몫'이 이산량 혹은 연속량인 등분제 맥락을 통해 $4.5 \div 2.1$의 '몫'과『나머지』를 살펴보자. 먼저 '몫'이 이산량인 포함제 나눗셈으로는 "한 통에 열 개 들어 있는 껌 4통과 5개의 낱개의 껌을 한 사람당 2통과 1개의 낱개 껌으로 나누어 주고자 한다. 몇 사람에게 나누어줄 수 있으며, 나누어줄 수 없는 양은 얼마인가?"로 생각할 수 있으며, '몫'이 연속량인 등분제 나눗셈 맥락으로 "한 끼의 먹이로 4.5㎏을 두 마리의 어미 개와 강아지 한 마리에게 먹이려고 합니다. 강아지는 아직 어려 어미 개의 0.1 만큼만 먹이면 충분하다고 합니다. 각 개에게 얼마씩 공평하게 나눠 줄 수 있습니까? 그리고 남는 양은 얼마입니까?"를 생각할 수 있겠다. '몫'이 이산량인 등분제 상황으로 생각하면 "A, B, C 세 사람이 돈을 내어 껌 한통에 열 개 들어 있는 껌 4통과 5개의 낱개의 껌을 사왔습니다. 두 사람(A, B)은 돈을 공평하게 내었지만 한 사람(C)은 다른 사람의 0.1배만큼의 돈을 내었습니다. 돈에 따라 껌을 공평하게 나누고자 하는데, 같은 마을에 사는 어린 꼬마가 왔습니다. 그래서 돈에 따라 껌을 공평히 나누고, 나눌 수 없는 껌은 꼬마에게 주기로 하였습니다. 꼬마가 갖게 되는 껌은 얼마인가요?"를 생각할 수 있겠다.

피제수와 제수의 측정단위는 모두 0.1이므로『나머지』의 측정단위는 <정의 1>에 의해 0.1이어야한다. 만약 '몫'의 측정단위가 소수점 아래 자리의 값이라면『나머지』는 소수 둘째 이하의 자리를 갖는 수가 되며 이는『나머지』의 측정단위가 0.1이라는 사실에 모순이다. $4.5=2.1\times2.1+0.09$의 경우가 이러한 예이다. 이러한 사실로『나머지』의 측정단위가 0.1이 되기 위해서 '몫'의 측정단위는 1이 되어야 함을 알 수 있다. '몫'의 측정단위가 1이 되는 경우는 $4.5=2.1\times1+2.3$와 $4.5=2.1\times2+0.3$등을 생각 할 수 있다. 그러나 $4.5=2.1\times1+2.3$의 경우에서는 2.3을 2.1로 한 번 더 나눌 수 있으므로 아직 나눗셈을 '완수'하지 않은 것이 된다. 따라서 구하고자 하는 '몫'과 『나머지』는 $4.5=2.1\times2+0.3$에서와 같이 '몫'은 2이고『나머지』는 0.3이 된다. 그러므로 제수와 피제수의 측정단위가 같은 경우『나머지』의 조건은 제수보다 작고 0 이상이면서, 측정단위는 제수(혹은 피제수)와 같은 수 이어야 함을 알 수 있다. 따라서 이 경우는 정수에서의『나머지』를 찾는 방법과 크게 다르지 않다. 피제수를 제수로 나누어 제수보다 작은 '남은 양' 중에서 측정단위가 제수(혹은 피제수)와 같은 '남은 양'을 찾으면 된다.

이처럼 측정단위가 같을 경우는 '몫'이 자연수로 나타나는 특징으로 인해, 포함제의 상황에서는 '몫'의 의미가 2사람으로 분명하나, 등분제의 경우에서는 '몫'이 이산량이거나 연속량에 상관없이 '몫'의 의미를 파악하기는 쉽지 않다. 때문에 피제수와 제수의 측정단위가 같을 경우는 '몫'이 이산량인 포함제 맥락으로 지도하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

위의 예를 통해서 제수와 피제수의 측정단위가 같을 경우에 대해서 다음과 같은 나눗셈 알고리즘의 형식으로 된 가설을 설정할 수 있다.

<가설 1>

피제수 a를 제수 b로 나누었을 때의『나머지』를 p라 하면, $a=bq+p$이면서,『나머지』p의 측정단위는 제수의 측정단위(또는 피제수의 측정단위)와 같고 $0\leq p<b$인 조건을 만족해야한다.

다. 피제수의 측정단위가 제수의 측정단위보다 작은 경우

피제수와 제수의 측정단위와 같은 경우에 대하여『나머지』는 어떤 조건을 가져야 하는지를 알아보기 위해, 4.4를 3으로 나누었을 때의 '몫'과『나머지』를 구하는 문제 상황으로 접근해보자. 먼저 '몫'이 이산량인 포함제 나눗셈 맥락으로는 "껌 한통에 열 개 들어 있는 껌 4통과 4개의 낱개의 껌을 3통씩 나누어 주고자 한다. 몇 사람에게 나누어줄 수 있으며, 나누어줄 수 없는 양은 얼마인가?" 이며, '몫'이 이산량인 등분제 맥락으로는 "한 통에 열개 들어있는 껌 4통과 4개를 세 봉지에 나누어 담을 때, 나누어 담을 수 없는 양을 구하시오."이다. '몫'이 연속량인 등분제 나눗셈 맥락으로는 "4.4㎝ 길이의 금실을 3명에게 나누어 줄 때, 한 사람에게 돌아가는 금실의 길이와 남는 길이를 구하시오."이다.

이 문제에서 피제수의 측정단위는 0.1이고 제수의 측정단위는 1이다. 따라서『나머지』의 측정단위는 0.1이 되어야 한다. '몫'과 제수의 곱의 결과와『나머지』의 합이 피제수가 되어야 하므로 '몫'의 측정단위를 결정할 수 있다.『나머지』의 측정단위는 0.1이고 제수의 측정단위는 1이므로 '몫'의 측정단위는 0.1이이어야 한다. 만약 '몫'의 측정단위가 0.1보다 작을 경우는 제수와 '몫'의 곱의 측정단위가 0.1보다 작아지므로 피제수의 측정단위가 0.1보다 작아지므로 모순이다. 또 '몫'의 측정단위가 0.1보다 크다면(즉, 1이라면) 제수와 '몫'의 곱의 측정단위는 1이 되므로 측정단위가 0.1인 나머지와의 합이 자연스럽지 못하게 된다.[9] 그러므로 $4.4 \div 3$의 상황으로 생각할 수 있는 경우는 $4.4 = 3 \times 1.0 + 1.4$, $4.4 = 3 \times 1.1 + 1.1$, $4.4 = 3 \times 1.2 + 0.8$, $4.4 = 3 \times 1.3 + 0.5$, $4.4 = 3 \times 1.4 + 0.2$들이 있다. '몫'의 측정단위는 0.1이므로 '몫'은 0.1단위로 변화할 수 있게 되고 제수는 3이므로,『나머지』는 결국 3과 0.1의 곱, 즉 0.3에 의해 판단되게 된다. 결국 '남은 양'이 0.3이상일 경우에는 나눗셈을 '완수'하지 못한 것이 된다. 위의 경우에서 $4.4 = 3 \times 1.4 + 0.2$가 '완수'된 나눗셈이 되며 '몫'은 1.4이고『나머지』는 0.2가 된다.

위의 풀이는 $4.4 = 3 \times (0.1 \times 14) + 0.2$로 고칠 수 있는데, 이것은 '몫'이 0.1 단위로 14가 된다는 말이므로 '몫'의 의미를 파악 할 수 있게 된다. '몫'의 의미를 포함제 나눗셈 맥락에서 살펴보면 1.4명으로 그 의미를 받아들이기 다소 어려우나, 등분제 나눗셈의 맥락에서 살펴보면 껌 14개와 1.4㎝로 의미가 분명히 해석됨을 알 수 있다. 따라서 제수와 피제수의 측정단위가 서로 다를 경우는 '몫'의 의미 파악이 분명한 등분제 맥락으로 지도하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

위의 예를 통해서 피제수의 측정단위가 제수의 측정단위보다 작을 경우에 대해서 다음과 같은 나눗셈 알고리즘의 형식으로 된 가설을 설정할 수 있다.

<가설 2>

피제수 a를 제수 b로 나누었을 때의『나머지』를 p라 하면, $a = bq + p$이면서,『나머지』 p의 측정단위는 피제수의 측정단위와 같고 $0 \leq p < b \times (\text{몫의 단위})$인 조건을 만족해야한다.

라. 제수의 측정단위가 피제수의 측정단위보다 작은 경우

제수의 측정단위가 피제수의 측정단위보다 작은 경우의『나머지』의 조건을 알아보기 위해 8을 3.2로 나누었을 때의 '몫'과『나머지』를 구하는 문제를 통해 살펴보자. 먼저 '몫'이 이산량인 포함제 나눗셈 맥락으로 "껌 한 통에 열 개 들어 있는 껌 8통을 3통과 낱개 껌 2개씩 나누어 주고자 한다. 몇 사람에게 나누어줄 수 있으며, 나누어줄 수 없는 양은 얼마인가?" 이며, '몫'이 연속량인 등분제 맥락으로는 "한 끼의 먹이로 8㎏의 먹이를 세 마리의 어미 개와 강아지 한 마리에게 먹이려고 합니다. 강아지는 아직 어려 어미 개의 0.2 만큼만 먹이면 충분하다고 합니다. 각 개에게 얼마씩 공평하게 나눠 줄 수 있습니까? 그리고 나머지는 얼마입니까?"를 생각할 수 있겠다. 또 '몫'이 이산량인 등분제 상황으로 생각하면 "A, B, C, D 네 사람이 돈을 내어 껌 한통에 열 개 들어있는 껌 8통을 사왔습니다. 세 사람(A, B, C)은 돈을 공평하게 내었지만 한 사람(D)은 다른 사람의 0.2배만큼의

9) 2+2.4의 연산의 결과를 4.4라고 하는 것은, 2를 2.0으로 측정단위를 고쳐 2.0+2.4로 생각한 연산이다. 하지만 $2+\sqrt{3}$과 같이 측정단위가 다른 경우의 덧셈 연산은 이루어지지 않는다.

돈을 내었습니다. 돈에 따라 껌을 공평하게 나누고자 하는데, 같은 마을에 사는 어린 꼬마가 왔습니다. 그래서 돈에 따라 껌을 공평히 나누고, 나눌 수 없는 껌은 꼬마에게 주기로 하였습니다. 꼬마가 갖게 되는 껌은 얼마인가요?"로 생각할 수 있다.

이 문제에서 보면 피제수의 측정단위는 1이고 제수의 측정단위는 0.1이다. 따라서 『나머지』의 측정단위는 0.1이 되며 '몫'은 1의 측정단위를 가져야 한다. 하지만 피제수는 『나머지』를 찾을 때 사용되는 곱셈과 덧셈 연산과는 무관하기 때문에 피제수는 측정단위가 더 작은 제수의 측정단위로 다시 측정하여(8을 8.0으로) 나타내어도 문제에는 아무런 영향을 주지 않게 된다[10]. 피제수의 측정단위를 제수의 측정단위로 고쳐 나타내게 되면, 이 경우는 제수와 피제수의 측정단위가 같은 경우가 됨을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 '몫'과 『나머지』는 $8=3.2\times2+1.6$에서와 같이 '몫'은 2이고 『나머지』는 1.6이 된다.

이 경우에서는 피제수의 측정단위를 제수의 측정단위로 고칠 수 있으므로, 제수와 피제수의 측정단위가 같은 경우의 맥락과 같이 포함제의 맥락으로 설명하는 것이 가장 바람직함을 알 수 있다.

위의 예를 통해서 제수의 측정단위가 피제수의 측정단위보다 작은 경우에 대해서는 다음과 같은 나눗셈 알고리즘의 형식으로 된 가설을 설정할 수 있다.

<가설 3>

> 피제수 a를 제수 b로 나누었을 때의 『나머지』를 p라 하면, $a=bq+p$이면서, 『나머지』 p의 측정단위는 피제수의 측정단위와 같고 $0\leq p<b$인 조건을 만족해야한다.

이상의 <가설 1>, <가설 2>, <가설 3>에서 살펴본 것과 같이 피제수를 a, 제수를 b라 할 때, 유한소수에서의 『나머지』는 측정단위에 따라, 제수와 피제수의 측정단위가 같을 경우에는 $a=bq+p$에서 $0\leq p<b$ 이고 『나머지』 p의 측정단위는 제수의 측정단위(또는 피제수의 측정단위)와 같으며, 피제수 측정단위가 작을 경우에는 $a=bq+p$에서 $0\leq p<b\times(\text{몫의 단위})$이고, 『나머지』 p의 측정단위는 피제수의 측정단위와 같았다. 또 제수의 측정단위가 작을 경우에는 $a=bq+p$에서 $0\leq p<b$ 이고 나머지 p의 측정단위는 제수의 측정단위와 같았다. 하지만 제수와 피제수의 측정단위가 같을 경우와 제수의 측정단위가 작을 경우는 '몫'이 자연수(측정단위는 1)임을 생각한다면, 위에서 다룬 세 경우의 가설을 다음과 같이 하나로 정리하여 나타낼 수 있다.

<가설 4>

> 피제수 a를 제수 b로 나누었을 때의 『나머지』를 p라 하면, $a=bq+p$이면서, 『나머지』 p의 측정단위는 제수와 피제수의 측정단위의 최솟값과 같고 $0\leq p<b\times(\text{몫의 단위})$인 조건을 만족해야한다.

『나머지』의 지도에 있어서 측정단위가 같을 경우와 제수의 측정단위가 작은 경우에서는 포함제 맥락이 좋으며, 피제수의 측정단위가 더 작은 경우에는 등분제 맥락이 더 좋다는 것을 알게 되었다. 이 내용을 표로 나타내면 <표 4>와 같다.

<표 4> 측정단위를 고려한 유한소수 나눗셈 맥락

제수와 피제수의 측정단위	좋은 맥락	나머지의 측정단위	'몫'의 형태
측정단위가 같을 경우	포함제	제수 혹은 피제수의 측정단위	자연수
피제수의 측정단위가 작을 경우	등분제	피제수의 측정단위	유한소수
제수의 측정단위가 작을 경우	포함제	제수의 측정단위	자연수

4. 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘의 증명

앞에서 살펴본 <가설 4>의 증명을 위해 정수에서의

10) 피제수의 측정단위가 제수의 측정단위보다 작은 경우에도 제수의 측정단위를 피제수의 측정단위로 고쳐 나타내는 방법을 생각할 수 있지만, 제수의 측정단위를 고치게 되면 '몫'이 가지는 의미의 해석이 어렵고 '몫'의 측정단위가 변하게 되므로 이 방법은 옳지 않다.

나눗셈 알고리즘을 살펴본 다음, 세 개의 조작(Operation)을 정의하고, 그 정의를 이용하여 <가설 4>를 증명하겠다.

가. 정수에서의 나눗셈 알고리즘

정수에서의 나눗셈 알고리즘은 다음과 같이 제시되고 있다.

임의의 양의 정수 a와 b에 대해, $a=bq+p$이며 $0 \leq p < b$를 만족하는 정수 p와 q는 유일하게 존재한다. 이 때, q를 '몫' 이라하고 p를『나머지』라 한다.

정수에서의 나눗셈 알고리즘에 의해 결정되는 '나머지'는 분명 $a=bq+p$와 $0 \leq p < b$의 조건에 의해 유일하게 결정되므로『나머지』이다. 여기서 $a=bq+p$의 조건은 '남은 양'을 판단하는 조건이며, $0 \leq p < b$의 조건은 '완수'를 판단하는 조건이다. 하지만『나머지』의 의미 중 '공평성'을 판단할 조건은 보이지 않는다. 이는 정수는 모두 측정단위가 1이므로 정수 범위의 나눗셈은 항상 '공평성'을 갖기 때문이다.

나. 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘을 위한 세 정의

<정의 2> 임의의 유한소수 a에 대하여, a의 소수점 아래의 최저자리의 단위 값을 $a^{\odot}$라 한다.

예) 만약 주어진 소수가 4.5이라면 소수 첫째 자리가 소수점 아래의 최저자리이므로 $4.5^{\odot}=0.1$이고, 4.35라면 소수 둘째 자리가 소수점 아래의 최저자리이므로 $4.35^{\odot}=0.01$이다. 그러면 $(2.5\times 2)^{\odot}$는 얼마인가? $2.5\times 2=5$ 이므로 $(2.5\times 2)^{\odot}=1$로 생각할 수 있으나 유한소수에서는 소수점 자리를 고려한 계산이 되어야 하므로 $2.5\times 2=5.0$으로 생각하여야 한다. 따라서 $(2.5\times 2)^{\odot}=0.1$이 된다.

<정의 3> 임의의 유한소수 a에 대하여 $a^{\odot}$의 곱셈에 대한 역원을 $a^{\neg}$라 한다.

예) 주어진 소수가 4.5라면 $4.5^{\odot}=0.1$이므로 $4.5^{\neg}=10$이고, 4.35라면 $4.35^{\odot}=0.01$이므로 $4.35^{\neg}=100$이다.

<정의 4> 임의의 $a^{\odot} \leq b^{\odot}$인 두 유한소수 a, b에 대하여, $b^{\odot}\times k=a^{\odot}$인 k를 $\overline{(a,b)}$라 한다. 특별히 $a^{\odot} < b^{\odot}$인 경우에는 $\overline{(b,a)}=1$이라 약속한다. 이러한 이유는 피제수의 측정단위가 제수의 측정단위보다 클 경우 피제수를 제수의 측정단위로 바꿔 나타낼 수 있으므로 이를 위해 특별한 약속이 필요한 것이다.

예) 0.2 와 0.23이 주어진 두 유한소수라면 $0.2^{\odot}=0.1$, $0.23^{\odot}=0.01$이므로 $\overline{(0.23,0.2)}=0.1$이고 $\overline{(0.2,0.23)}=1$이다. 만약 주어진 두 유한소수가 0.351과 0.2라면 $0.351^{\odot}=0.001$이고 $0.2^{\odot}=0.1$ 이므로 $\overline{(0.351,0.2)}=0.01$이고, $\overline{(0.2,0.351)}=1$이다.

다. '몫'의 측정단위

유한소수에서 '몫'의 측정단위는 어떠해야 하는지를 다음 정리를 통해 살펴보자. 이 정리의 증명을 통해 '몫'의 측정단위는 $q^{\odot}=\overline{(a,b)}$이므로 항상 유한소수가 됨을 알 수 있게 되며, 주어진 두 유한 소수 a, b를 통해 '몫'의 측정단위를 알아낼 수 있는 장점을 가지게 된다.

<정리 1>

임의의 두 양의 유한소수 a, b에 대하여, $0 \leq p < \overline{(a,b)}\cdot b$ 이고 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\}=p^{\odot}$이면서 $a=bq+p$를 만족하는 p와 q에 대해 $q^{\odot}=\overline{(a,b)}$이다.

<증명> a, b를 임의의 양의 유한소수라 하자.

이 때, a를 b로 나눌 때 q와 p이 $a=bq+p$의 식을 만족하면서, $0 \leq p < \overline{(a,b)}\cdot b$와 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\}=p^{\odot}$의 조건을 만족한다고 하자. 이때 p은 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\}=p^{\odot}$ 만족하게 되므로 $(a-p)^{\odot}=(b\cdot q)^{\odot}$이다. 이제 $q^{\odot}\neq\overline{(a,b)}$라고 하자. 그러면 $q^{\odot}>\overline{(a,b)}$ 또는 $q^{\odot}<\overline{(a,b)}$이다.

먼저 $q^{\odot} > \overline{(a,b)}$일 때에 대해 생각하자. $q^{\odot} > \overline{(a,b)}$ 대해 $a^{\odot} \leqq b^{\odot}$와 $a^{\odot} > b^{\odot}$의 경우를 생각할 수 있다. 우선 $a^{\odot} \leqq b^{\odot}$ 이라 생각하자. 이때 $a^{\odot} = 10^{-n}$, $b^{\odot} = 10^{-m}$ $(n \geqq m, n, m \in N \cup \{0\})$이라 두자. 그러면 $\overline{(a,b)} = 10^{-(n-m)}$ 이므로 $q^{\odot} > \overline{(a,b)} = 10^{-(n-m)}$이고 $(b\cdot q)^{\odot} = b^{\odot}\cdot q^{\odot} > \overline{(a,b)}\cdot b^{\odot} = 10^{-n}$ 이다. 그러면 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$ 즉, $10^{-n} = p^{\odot}$ 이므로 $10^{-n} = (a-p)^{\odot}$임을 알 수 있다. 하지만 $(b\cdot q)^{\odot} > \overline{(a,b)}\cdot b^{\odot} = 10^{-n}$ 이라고 했으므로 $(a-p)^{\odot} = (b\cdot q)^{\odot}$라는 사실에 모순이 된다.

이제 $a^{\odot} > b^{\odot}$이라 생각하자. 그러면 $\overline{(a,b)} = 1$이므로 $q^{\odot} > \overline{(a,b)} = 1$이다. 양의 정수의 최저단위의 자리 값은 1이므로 유한소수에서 최저단위의 자리 값이 1보다 크다는 사실은 모순이다.

이제 $q^{\odot} < \overline{(a,b)}$인 경우에 대해 생각하자. 그러면 $q^{\odot} < \overline{(a,b)}$에 대해 $a^{\odot} \leqq b^{\odot}$와 $a^{\odot} > b^{\odot}$의 경우를 생각할 수 있다. 먼저 $a^{\odot} \leqq b^{\odot}$ 이라하자. 이때, $a^{\odot} = 10^{-n}$, $b^{\odot} = 10^{-m}(n \geqq m,\ n, m \in N \cup \{0\}$이라 두면, $\overline{(a,b)} = 10^{-(n-m)}$이므로 $q^{\odot} < \overline{(a,b)} = 10^{-(n-m)}$이고 $(b\cdot q)^{\odot} = b^{\odot}\cdot q^{\odot} < \overline{(a,b)}\cdot b^{\odot} = 10^{-n}$이다.

그리고 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$ 즉 $10^{-n} = p^{\odot}$ 이므로 $10^{-n} = (a-p)^{\odot}$임을 알 수 있다. 하지만 $(b\cdot q)^{\odot} < \overline{(a,b)}\cdot b^{\odot} = 10^{-n}$ 이라고 했으므로 $(a-p)^{\odot} = (b\cdot q)^{\odot}$라는 사실에 모순이 된다.

이제 $a^{\odot} > b^{\odot}$이라 하자. 그러면 $\overline{(a,b)} = 1$이므로 $q^{\odot} < \overline{(a,b)} = 1$이다. 이때 $a^{\odot} = 10^{-n}$, $b^{\odot} = 10^{-m}$ $(n < m,\ n, m \in N \cup \{0\}$이라 두자. 그러면 $\overline{(a,b)} = 1$이므로 $q^{\odot} < \overline{(a,b)} = 1$ 이고 $(b\cdot q)^{\odot} = b^{\odot}\cdot q^{\odot} < \overline{(a,b)}\cdot b^{\odot} = 10^{-m}$ 이다. $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$ 즉, $10^{-m} = p^{\odot}$ 이므로 $10^{-m} = (a-p)^{\odot}$임을 알 수 있다. 하지만 $(b\cdot q)^{\odot} < \overline{(a,b)}\cdot b^{\odot} = 10^{-m}$ 이라고 했으므로 $(a-p)^{\odot} = (b\cdot q)^{\odot}$라는 사실에 모순이 된다.

따라서 임의의 두 양의 유한소수 a, b에 대하여 a를 b로 나눌 때, $0 \leqq p < \overline{(a,b)}\cdot b$ 이고 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$ 이면서 $a = bq + p$를 만족하는 p와 q에 대해 $q^{\odot} = \overline{(a,b)}$임을 알 수 있다. □

라. 유한소수에서의 『나머지』의 존재성

주어진 두 유한소수 a, b로부터 유도되는 측정단위들을 통해 『나머지』의 존재성을 밝히도록 하자.

<정리 2>

임의의 두 양의 유한소수 a, b에 대하여, $0 \leqq p < \overline{(a,b)}\cdot b$ 이고 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$이면서 $a = bq + p$를 만족하는 p와 q는 존재한다.

<증명> a, b를 임의의 양의 유한소수라 하자.

집합 $S = \{a - kb : k$는 유한소수$, 0 \leqq a - kb, \min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = (a-kb)^{\odot}\}$라 하자. 이때 $k = \frac{a}{b} - \overline{(a,b)}$이라하면, $a - kb = a - (\frac{a}{b} - \overline{(a,b)})\cdot b = \overline{(a,b)}\cdot b$이다. 또 $0 < \overline{(a,b)}$, $0 \leqq b$이므로 $0 \leqq \overline{(a,b)}\cdot b$이다.

먼저 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = (a-kb)^{\odot} = (\overline{(a,b)}\cdot b)^{\odot} \cdots$ ①임을 보이자.

주어진 두 유한소수 a, b는 항상 $a^{\odot} \leqq b^{\odot}$ 또는 $a^{\odot} > b^{\odot}$이므로, 두 경우로 나누어 ①이 만족됨을 보이고자한다. 먼저 $a^{\odot} \leqq b^{\odot}$라 하면, $\overline{(a,b)} \leqq 1$ 이므로 $(a - (\frac{a}{b} - \overline{(a,b)})\cdot b)^{\odot} = (\overline{(a,b)}\cdot b)^{\odot} \leqq b^{\odot}$이다. 이때, $a^{\odot} = 10^{-n}$, $b^{\odot} = 10^{-m}(n \geqq m,\ n, m \in N \cup \{0\})$ 이라 하면 $\overline{(a,b)} = 10^{-(n-m)}$이므로 $(\overline{(a,b)}\cdot b)^{\odot} = 10^{-(n-m)-m} = 10^{-n}$이다. 따라서 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = a^{\odot} = (a - (\frac{a}{b} - \overline{(a,b)})\cdot b)^{\odot} = (\overline{(a,b)}\cdot b)^{\odot}$이다. 만약 $a^{\odot} > b^{\odot}$라 하면 $\overline{(a,b)} = 1$이므로 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = b^{\odot} = (a - (\frac{a}{b} - \overline{(a,b)})\cdot b)^{\odot} = (\overline{(a,b)}\cdot b)^{\odot}$임을 알 수 있다. 또 $a - (\frac{a}{b} - \overline{(a,b)})\cdot b = a - \frac{a}{b}\cdot b + \overline{(a,b)}\cdot b$

$=\overline{(a,b)}\cdot b$이므로 $0 \leq a-(\frac{a}{b}-\overline{(a,b)})\cdot b=\overline{(a,b)}\cdot b$ 이다. 따라서 $a-(\frac{a}{b}-\overline{(a,b)})\cdot b \in S$이다.

그러므로 주어진 집합 S는 적어도 하나의 원소를 갖는다. 또 임의의 S의 원소 h는 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=h^{\circledcirc}$이므로 $h\cdot(\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\})^{\neg}$는 음이 아닌 정수가 된다.

$S'=\{h\cdot(\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\})^{\neg} : h \in S\}$이라 하면 Well ordering Principle[11]에 의해 집합 S'는 최소 원을 갖는다. S'의 최소 원을 $r\cdot(\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\})^{\neg}$이라 하면, $(\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\})^{\neg} \geq 1$이므로 r 은 S의 최소원이 된다. 이때 r 은 S의 원소이므로 $a=f\cdot b+r$이 되는 유한소수 f가 존재한다. 만약 $r \geq \overline{(a,b)}\cdot b$라 하면, $0 \leq r-\overline{(a,b)}\cdot b$ 이다. 또 r은 S의 원소이므로 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=r^{\circledcirc}$이다.

①에서 살펴본 것과 같이 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=(\overline{(a,b)}\cdot b)^{\circledcirc}$이므로 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=(r-\overline{(a,b)}\cdot b)^{\circledcirc}$임을 알 수 있다. 그러므로 $r-\overline{(a,b)}\cdot b \in S$ 이고 $r-\overline{(a,b)}\cdot b<r$이므로 r이 S의 최소원이라는 사실에 모순이 된다. 그러므로 $r<\overline{(a,b)}\cdot b$이다. 이때, $q=f$, $p=r$로 잡으면 $a=bq+p$인 p와 q가 존재한다. □

마. 『나머지』의 유일성

이제 '몫'의 측정단위에 대한 정리와 『나머지』의 존재에 대한 정리를 이용하여 '몫'과 『나머지』의 유일성을 보이도록 하자.

<정리 3>

임의의 두 양의 유한소수 a, b에 대하여, $0 \leq p<\overline{(a,b)}\cdot b$ 이고 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=p^{\circledcirc}$이면서 $a=bq+p$를 만족하는 p와 q는 유일하다.

<증명> a, b를 임의의 양의 유한소수라 하자.
위 조건을 만족하는 p, q와 다른 t와 s가 존재한다고 하자. 그러면 $a=bt+s$이고 $0 \leq s<\overline{(a,b)}\cdot b$와 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=s^{\circledcirc}$을 만족한다. 이 식을 이항한 후 정리하면 $b(t-q)=p-s$이다. $0 \leq p<\overline{(a,b)}\cdot b$, $0 \leq s<\overline{(a,b)}\cdot b$ 이므로 $-\overline{(a,b)}\cdot b<p-s<\overline{(a,b)}\cdot b$임을 알 수 있다. 따라서 $-\overline{(a,b)}\cdot b<b(t-q)=p-s<\overline{(a,b)}\cdot b$ 이고 b는 양수이므로 $-\overline{(a,b)}<(t-p)<\overline{(a,b)}$이다. 그러면 <정리 1>에 의해 $t^{\circledcirc}=\overline{(a,b)}=q^{\circledcirc}$ 이므로 $\frac{(t-q)}{\overline{(a,b)}}$는 정수이다. 따라서 $-1<\frac{(t-q)}{\overline{(a,b)}}<1$이므로 이 식을 만족되는 $\frac{(t-q)}{\overline{(a,b)}}=0$이다. 그러므로 $t-q=0$ 이 되므로 $t=q$가 된다. 그러면 곱셈 연산과 덧셈 연산의 성질에 의해 $p=s$이다. 따라서 p와 q는 유일하다. □

11) 공집합이 아니면서 음이 아닌 정수를 원소로 갖는 집합은 최소 원을 갖는다는 공리.

바. 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘 정리의 의미

이상의 <정리 1>, <정리 2>, <정리 3>의 증명들을 종합하면 다음과 같은 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘 정리를 완성할 수 있다.

<유한소수에서의 나눗셈 알고리즘>

임의의 두 양의 유한소수 a, b에 대하여, $0 \leq p<\overline{(a,b)}\cdot b$ 이고 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=p^{\circledcirc}$이면서 $a=bq+p$를 만족하는 p와 q는 유일하게 존재한다. 이때의 p를 『나머지』라 하며 q를 '몫'이라 한다.

유한소수에서의 나눗셈 알고리즘에서 $a=bq+p$의 조건은 '남은 양'을 결정하는 조건이며, 이 조건에 따라 구해진 '남은 양' 중, 『나머지』를 결정하는 조건은 크게 두 가지로 이루어져있다. 하나는 $0 \leq p<\overline{(a,b)}\cdot b$이고, 또 다른 하나는 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=p^{\circledcirc}$ 이다. 주어진 두 조건 모두는 피제수 a와 제수 b의 측정단위로부터 유도되는 측정단위를 기준으로 기술되어 있는데, $\overline{(a,b)}$는 '몫'의 단위를 나타내며 $p^{\circledcirc}$는 『나머지』의 측정단위를 나타내는 것이다. 이는 유한소수에서 『나머지』를 결정할 때 측정단위를 고려해야함을 보여주는 것이다. 이러한 측정단위의 고려한 조건 중 $\min\{a^{\circledcirc}, b^{\circledcirc}\}=p^{\circledcirc}$은 『나머지』가

가져야할 의미 중 '공평성'을 갖게 해주는 조건이다. 또 $0 \leqq p < \overline{(a,b)} \cdot b$는 제수와 '몫'의 측정단위의 곱이 '나머지'의 범위를 제한하는 역할을 한다. 이러한 범위의 제한은 결국 『나머지』가 가져야할 의미 중 '완수'의 의미를 갖게 해주는 조건이다. 이러한 두 조건으로 『나머지』는 유일하게 결정되게 한다. 또, 『나머지』를 구하는 과정에서 '몫'의 측정단위를 고려하므로 '몫' 또한 해석 가능한 의미를 갖게 된다.

또, 유한소수의 나눗셈 알고리즘에서 주어지는 피제수와 제수 a, b가 정수라면, 두 수의 측정단위는 1 이므로, $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot} = 1$ 즉, 『나머지』의 단위는 1이 되고, $\overline{(a,b)} = 1$이므로 $0 \leqq p < \overline{(a,b)} \cdot b$의 조건은 $0 \leqq p < b$로 대체된다. 결국 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘 정리는 정수에서의 나눗셈 알고리즘 정리의 일반화인 것이다. 예를 들어 7을 2로 나누었을 때의 경우를 통해 살펴보자. 이 문제에서 피제수와 제수는 정수이므로 측정의 단위는 모두 1이므로 『나머지』의 단위는 1이고, '몫'의 단위 또한 1이 된다. 그러므로 『나머지』는 0 이상이고 2보다 작으면서 $a = bq + p$의 조건을 만족하는 것을 찾으면 되므로 $7 \div 2 = 3 \cdots 1$된다.

유한소수에서의 나눗셈 알고리즘 정리가 어떻게 사용되는지를 3.68을 2.1로 나누었을 때의 '몫'과 『나머지』를 구하는 문제를 통해 살펴보자.

$3.68^{\odot} = 0.01$, $2.1^{\odot} = 0.1$, $\overline{(3.68, 2.1)} = 0.1$이다. 『나머지』를 p, '몫'을 q라 하면 $0 \leqq p < 0.1 \times 2.1 = 0.21$이고 $\min\{3.68^{\odot}, 2.1^{\odot}\} = 0.01 = p^{\odot}$ 이면서 $3.68 = 2.1q + p$를 만족하는 p, q를 찾으면 되므로 $3.68 = 2.1 \times 1.7 + 0.11$이다. 따라서 구하는 '몫'과 『나머지』는 각각 1.7과 0.11이다. 위식을 $3.68 = (2.1 \times 0.1) \times 17 + 0.11$로 생각하여 제수와 '몫'의 측정단위의 곱으로 나타나는 수를 하나의 단위로 생각하면 3.68은 2.1×0.1을 단위로 17개 있으며 0.11이 남는다는 의미를 갖게 된다. 이러한 해석은 정수에서 나눗셈을 지도하는 한 방법인 제수를 계속해서 줄여가는 '동수누감'의 방법에서, '동수'에 해당되는 수가 단순한 제수가 아니라 제수와 '몫'의 측정단위(정수에서는 1)의 곱으로 받아들인다면 유한소수에서의 나눗셈도 '동수누감'으로 설명이 가능하게 됨을 보여 주는 것이다. 위 문제에서는 3.68은 0.21을 17번 누감하면 0.11이 남는 것이 된다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 나눗셈에서 사용되는 수를 양의 측정의 결과로서의 수로 생각하는 관점에서 출발하여, 현행 초등학교 교육과정과 '나머지'의 의미를 살펴본 후 수학에서는 '나머지'를 '나누기를 공평하게 완수한 후 남는 양'으로 보는 것이 바람직하다는 것과 지금까지 알려진 분수 나눗셈의 개념을 살펴보고, 유한소수에서 '나머지'가 발생되는 나눗셈에서는 제수와 피제수의 측정단위와 '몫'의 단위를 고려해야함을 알 수 있었다. 이러한 결과로 '나머지'는 '몫'의 양이 이산량이면 '포함제'와 '등분제' 맥락으로 설명이 가능하고, '몫'이 연속량이면 등분제 맥락으로 설명 가능하다는 것을 알 수 있었다. 하지만 '몫'의 의미를 쉽게 받아 들이기위해서는 피제수의 측정단위가 제수의 측정단위보다 작을 경우는 등분제 맥락으로, 그 외의 경우는 포함제 맥락으로 지도하는 것이 좋다는 것을 알 수 있었으며, 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘은 다음의 정리로 정수에서 확장 가능함을 알 수 있었다.

임의의 두 유한소수 a, b에 대하여, $0 \leqq p < \overline{(a,b)} \cdot b$ 이고 $\min\{a^{\odot}, b^{\odot}\} = p^{\odot}$이면서 $a = bq + p$를 만족하는 p와 q는 유일하게 존재한다. 이때의 p를 『나머지』라 하며 q를 '몫'이라 한다.

현행 초등학교에서는 정수에서의 『나머지』를 나타내는 방법으로 $a \div b = c \cdots d$ 의 형식을 사용하고 있지만 '$\cdots$' 와 같은 표현은 어색하며 등호를 사용하는 것도 어울리지 않는다. 하지만 대분수의 표현을 빌려 $a \div b = c + \dfrac{d}{b}$ 로 나타내면 좌 우변의 등호가 성립될 뿐만 아니라, '몫' c와 『나머지』 d를 쉽게 파악할 수 있는 이점도 갖게 된다. 이러한 표현 방법을 사용한다면 유한소수에서의 '몫'과 『나머지』의 표현 또한 충분히 가능해 진다. 하지만 『나머지』가 0이 될 경우는 현행 초등학교에서 분자 분모가 모두 자연수라는 분수의 조건 때

문에 분수로 표현하기는 어렵지만, 분자를 자연수뿐만 아니라 0을 포함하는 범 자연수의 범위로 확대하여 지도 한다면 별 문제가 되지 않을 것으로 판단되며 대분수 표현의 가치 또한 훨씬 증가하게 될 것으로 판단된다. 3.68을 2.1로 나누었을 때, 기존의 나머지의 표현 방법은 $3.68 \div 2.1 = 1.7 \cdots 0.11$이지만 대분수의 형식을 빌려 나타내어보면 $3.68 \div 2.1 = 1.7 + \frac{0.11}{2.1}$이 된다. 이러한 표현방법은 기존의 방법과 비교하여 다소 복잡해 보일지는 모르지만, 기호의 사용이 엄격한 수학의 입장에서 보면 등호가 성립된다는 이점을 가지게 된다.

이와 같이 측정단위를 고려하여 『나머지』를 구하게 되면, 보편 단위로 주어지지 않는 나눗셈 상황에서도 쉽게 『나머지』를 구할 수 있는 이점이 있다. 이를 다음의 문제를 통해 살펴보자.

“작은 봉지 두 개를 묶어 큰 봉지 하나로 파는 과자 17.5개를 8명의 학생에게 골고루 나눠줄 때, 몇 개씩 나누어 줄 수 있으며 나누어 줄 수 없는 양은 얼마인가?”

위 문제는 17.5를 8로 나누었을 때, ‘몫’과 『나머지』를 구하는 문제이다. 만약 피제수의 측정단위를 보편단위(0.1)로 생각하여, 해를 구하면 ‘몫’은 2.1이고 『나머지』는 0.7이다. 하지만 위 문제의 피제수의 측정단위는 분명 0.5이고 제수의 측정 단위는 1이다. 따라서 ‘몫’의 단위는 0.5가 된다. 그러므로 『나머지』 p는 $0 \leq p < \overline{(17.5,8)} \cdot 8 = 0.5 \times 8$이고 $\min\{17.5^{\odot}, 8^{\odot}\} = 0.5 = p^{\odot}$이어야 하므로 $17.5 = 8 \times (0.5 \times 4) + 1.5$이다. 따라서 ‘몫’은 2(즉, 작은 봉지 4봉지)이고, 『나머지』는 1.5(작은 봉지 세 개)가 됨을 알 수 있다.

하지만 본 연구의 결과만으로는 유한소수로 표현될 수 없는 측정단위(예, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ 등)로 측정된 수에서 『나머지』를 구하는 데는 아직 한계가 있다. 때문에 유리수에서의 『나머지』는 어떻게 결정해야 하며 유리수에서의 나눗셈 알고리즘 정리는 어떠해야 하는지에 대한 지속적인 연구가 필요하며, 나아가 실수에서의 『나머지』와 나눗셈 알고리즘에 관한 연구가 요구된다. 따라서 양(量)의 측정을 통한 유리수 혹은 실수에서의 『나머지』에 대한 연구는 앞으로 계속 연구되어야 할 과제라고 생각하며, 유한소수에서의 『나머지』를 학교현장에 적용할 방안에 관한 연구 또한 절실히 필요하다고 생각된다.

참 고 문 헌

강홍규 · 고정화 (2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의, 대한수학교육학회지 <학교수학> 5(3), pp. 385-399.

고정화 (2005). 학령 초의 활동주의적 수 개념 구성에 관한 연구. 서울대학교 박사학위논문.

교육과학기술부 (2010). 초등학교 수학 3-1, pp. 56. 서울: 두산동아(주).

__________ (2010). 초등학교 수학 3-2, pp. 54. 서울: 두산동아(주).

__________ (2010). 초등학교 수학 6-나, pp. 55. 서울: 두산동아(주).

__________ (2007). 교육인적자원부고시 제 2007-79호 [별책 8] 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서 주식회사.

김명운 (2009). 맥락화를 통한 정수와 분수의 곱셈 · 나눗셈 지도, 건국대학교 박사학위논문.

김수환 · 박성택 · 신준식 · 이대현 · 이의원 · 이종영 · 임문규 · 정은실 (2009). 초등학교 수학과 교재연구, 파주:동명사.

민인영 (2003). 분수의 나눗셈에서 나타나는 오류 분석, 부산교육대학교 석사학위논문.

박성택 (2006). 수학 학습 심리와 교수-학습 전략, 서울: 경문사.

박교식 · 송상헌 · 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> 6(3), pp. 235-248.

방정숙 (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 47(3), pp. 291-310.

방정숙 · 이지영 (2009). 사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 11(1), pp. 71-91.

백선수 (2002). 초등수학교실에서 알고리즘 지도 방안 탐색. 청람수학교육 10, pp. 153-171.

백수진 (2009). 역 맥락에서 나타난 학생들의 분수 나눗셈 알고리즘 구성 활동 분석, 경인교육대학교 석사학위논문.

서성보 (2000). 수학 및 수학교육 용어 사전, 서울:교문사.

송정화 (2005). 분수의 곱셈 나눗셈 문제 해결 과정에서 나타난 장애 요인 분석. 전주교육대학교. 석사학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

전평국 · 박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련지식의 연결 관계 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 15, pp. 71-76.

정윤희 (2009). 초등학교 4학년 학생 한명의 분수 개념 오류 분석 및 개념 형성지도, 아주대학교 석사학위논문.

최애리 (2010). 저학년 수학학습부진아의 초기 수 개념 분석 연구, 경인교육대학교 석사학위논문.

David M. Burton. (1980). *Elementary Number Theory*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Davydov. V. V. & Tsvetkovich, H. Z. (1991). On the Objective Origin of the Concept of Fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 13(1), pp. 13-64.

Dewey, J. & Mclellan, J. A. (1895). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*, New York: D, Appleton Company.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D, Publising Company.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Mahwah, NJ.

Sinicrope, R., Mick, H. W. & Kolb, J. R. (2002). *Fraction division interpretations. Making sense of fractions, ratios, and proportions*. 2002 yearbook, pp. 153-161.

Tabitha T. Y. & Richard M. G. (1998). *Algorithmic and Recursive Thinking*: Current Beliefs and Their Implications for the Future. Yearbook(NCTM).

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*: 1998 yearbook (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

The division algorithm for the finite decimals

Kim, Chang Su
The middle school Affiliated with G.S.N.U., Jinju 660-701, Korea
E-mail : cupncap@gamil.com

Jun, Young Bae
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea
E-mail : skywine@gmail.com

Roh, Eun Hwan†
Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, Jinju 660-756, Korea
E-mail : idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr

In this paper, we extended the division algorithm for the integers to the finite decimals.

Though the remainder for the finite decimals is able to be defined as various ways, the remainder could be defined as 'the remained amount' which is the result of the division and as 『the remainder』 only if 'the remained amount' is decided uniquely by certain conditions.

From the definition of 『the remainder』 for the finite decimal, it could be inferred that 'the division by equal part' and 'the division into equal parts' are proper for the division of the finite decimal concerned with the definition of 『the remainder』. The finite decimal, based on the unit of measure, seemed to make it possible for us to think 『the remainder』 both ways: 1) in the division by equal part when the quotient is the discrete amount, and 2) in the division into equal parts when the quotient is not only the discrete amount but also the continuous amount.

In this division context, it could be said that the remainder for finite decimal must have the meaning of the justice and the completeness as well. The theorem of the division algorithm for the finite decimal could be accomplished, based on both the unit of measure of 『the remainder』, and those of the divisor and the dividend.

In this paper, the meaning of the division algorithm for the finite decimal was investigated, it is concluded that this theory make it easy to find the remainder in the usual unit as well as in the unusual unit of measure.

* ZDM classification : F43, F93
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D30
* Key Words : finite decimal, division algorithm, remainder, unit of measure

† Corresponding Author