East Asian Mathematical Journal
Vol. 27 (2011), No.2, pp.243-259

楊輝算法과 중학교 수학의 방정식과 함수 영역의 비교

이 광 연, 방 지 혜, 이 유 호*

ABSTRACT. The Yang-Hui arithmetic(楊輝算法) is a crucial textbook on mathematics for make out the Orient mathematics.
In this thesis, compare the Yang-Hui arithmetic and the part of the equation and the function both in the middle school mathematics of the 7th Educational Curriculum Revision. As well, drawing a parallel between two things is the solution that had given in the Yang-Hui arithmetic and have given in the middle school textbook of the 7th Educational Curriculum Revision.

Ⅰ. 서론

오늘날 우리가 수학에서 사용하고 있는 용어 가운데 많은 것들은 동양수학에서 기원을 찾을 수 있다. 이를테면, 방정식의 '방정(方程)'은 九章算術의 8장인 방정장에서 유래했다. 용어 이외에도 동양수학은 과거의 단순한 흥밋거리를 넘어 현대 수학의 내용적인 면에서 점점 많은 영향을 주고 있다. 따라서 동양수학을 집중적으로 연구하는 것이 필요하며, 동양수학의 출발점은 중국이라고 해도 과언이 아니므로 중국의 고전수학을 연구하는 것은 동양수학 전체를 파악하는 단초가 된다. 특히 [5], [6], [7], [8], [14]에 의하면 중국에서 발행된 많은 수학책들은 조선시대 말까지 우리나라에서 수학교재로 활용하는 등 많은 영향을 주었다는 것을 알 수 있다. 그런 책 가운데 하나가 楊輝算法이고 楊輝算法과 현행 교육과정의 내용을 비교하는 것은 조선시대 우리나라의 수학을 이해하는데 반드시 필요하다. 따라서 본 논문에서는 楊輝算法의 내용과 중학교 수학의 내용을 비교하여

2010년 4월 19일 투고, 2010년 9월 1일 게재 승인.
2000 Mathematics Subject Classification: 01A25, 97D40
Key words: Yang-Hui arithmetic, the middle school mathematics, 7th Educational Curriculum Revision.
* 교신저자

오늘날 수학 내용이 楊輝算法에서는 어떻게 다루어졌는지 알아볼 것이다.

楊輝算法은 중국 남송(南宋)시대의 대표적인 수학자 양휘(楊輝, 1238~1298)가 지은 것으로 이론 중심의 전문 서적이라기보다는 실생활에 필요한 계산 방법과 문제를 수록한 일종의 계몽서(啓蒙書) 겸 실용서이다. 이 책은 乘除通變本末 3권, 田畝比類乘除捷法 2권, 續古摘奇算法 2권으로 구성이 되어 있으며, 곱셈과 나눗셈의 기본 규칙과 계산, 이차방정식과 연립방정식을 비롯한 고차방정식, 급수, 도형의 넓이 계산 등을 다루고 있다. 특히 이 책은 중국에서 마방진을 설명한 최초의 책이기도 한데, 續古摘奇算法에서 3차 마방진에서부터 10차 마방진까지 다루고 있다. 楊輝算法의 저자인 양휘에 대해서는 별로 알려진 것이 없지만 그가 지은 楊輝算法은 송(宋)대의 수학을 집대성하고 명(明)대에 정착된 민간 수학의 기틀을 마련했다는 점에서 수학사적으로 중요한 의의를 찾을 수 있다.

楊輝算法은 경국대전에 조선시대 중인 관료 계급인 산사를 뽑기 위한 과거의 시험과목 가운데 하나로 명기됐을 정도로 조선시대 산학의 기본서적이었다([11]). 楊輝算法은 조선의 수학에 많은 영향을 주었는데, 예를 들어 九一集을 저술한 조선시대의 대표적인 수학자인 홍정하(洪正夏, 1684~?)는 楊輝算法과 더불어 조선시대 수학에 큰 영향을 미친 九章算術, 算學啓蒙, 詳明算法 등의 체제를 이어 받아 이 책에 수록되어 있는 여러 가지 유형의 문제를 당시 사회의 실정에 맞도록 약간씩 변형한 문제를 많이 만들었다([6], [7], [11]).

또 다른 수학자였던 황윤석은 1774년에 고전적 교양과 치도, 수양, 독서, 처세, 어문 등에 관한 평생의 연구와 당시 문제점을 수집하고 정리해서 총 23권의 백과사전 理藪新編을 저술하였다. 이 가운데 수학에 관한 것은 21권~23권이며, 제21권에서는 九章算術에 대한 개요로부터 시작하여 승법과 제법에 관한 산대 연산은 算學啓蒙, 詳明算法, 楊輝算法 등에 있는 원문을 그대로 인용하여 설명하고 있다([6]). 제22권의 주요 내용은 방전구적법, 반량창교, 상공수축, 퇴적환원, 귀천반율법, 지분제동법, 영부족법, 방정정부법, 구고현법, 직전법, 의고절전, 할원술, 회원술, 망해도술 등이다. 여기에 있는 문제도 算學啓蒙, 詳明算法, 楊輝算法 등을 인용하였다. 따라서 楊輝算法은 조선시대 수학의 성격을 판단하는 중요한 자료이다. 특히 [6]에 의하면 청나라 강희제는 四庫全書를 편찬할 당시 조선에서 역수입한 楊輝算法을 바탕으로 했다고 한다.

동양수학의 대표적인 산학서인 楊輝算法은 乘除通變本末, 田畝比類乘除捷法, 續古摘奇算法으로 나누어지며 乘除通變本末[1)]은 다시 算法通變本末, 乘除通變算寶, 法算取用本末로 나눠져 있다. 算法通變本末에서는 습산강목(習算綱目), 상승육법(相乘六法), 상제이법(商除二法) 등을 다루고 있으며, 乘除通變算寶에서는 가법오

1) 「乘除通變本末」의 내용은 오늘날의 초등학교 고학년 교육과정에서 제시되어 있는 내용의 문제를 해결할 수 있는 기초가 되는 문제들로 이루어져 있다.

술(加法五術), 감법사술(減法四術), 구일승법(求一乘法), 구일제법(求一除法) 등을 다루고 있다. 또 法算取用本末에서는 1부터 300까지의 곱셈과 나눗셈에 대해서 자세히 설명을 해 놓았다. 田畝比類乘除捷法에서는 실생활에서 활용할 수 있는 도형문제인 밭의 넓이와 둘레, 원의 지름 구하기, 잘려진 도형의 넓이 구하기 등을 다루고 있다. 續古摘奇算法은 마방진을 이용해서 방정식을 푸는 내용과 실생활 문제에 대하여 방정식을 세워서 푸는 문제로 구성되어 있다.

본 논문에서는 楊輝算法에 소개된 동양의 고전수학과 현행 중학교 교육과정의 내용을 비교하여 설명하였다. [10]에서 조선시대 수학사를 이차방정식 단원에 활용한 것과 같이, 본 논문에서는 중학교 수학의 내용과 楊輝算法의 내용을 자세히 비교하여 소개하였기 때문에 교사가 해당 수업시간에 학생들에게 楊輝算法의 내용을 소개한다면 선조들의 수학을 이해하고, 나아가 이를 바탕으로 학생들이 수학에 좀 더 흥미를 갖게 될 것이다. 그런데 楊輝算法은 생활 속의 기하학까지도 방정식과 함수의 활용문제로 제시하였기 때문에 楊輝算法의 문제들은 현행 교육과정의 내용 가운데 주로 방정식과 함수에 해당된다. 따라서 본 논문에서는 楊輝算法과 중학교 수학의 방정식과 함수 영역의 내용을 비교할 것이다. 그리고 본 논문을 작성하기 위하여 참고한 중학교 교과서는 [3], [4], [9], [12]를 참고하였다. 본 논문의 2장에서는 楊輝算法의 내용을 간략하게 소개할 것이다. 3장에서는 楊輝算法과 제7차 개정교육과정의 내용을 비교하고 楊輝算法에 제시된 풀이방법과 제7차 개정교육과정의 중학교 수학 교과서에 제시된 풀이방법을 비교하여 설명할 것이다.

2. 楊輝算法의 간략한 내용

중국수학의 황금시대는 송, 금, 원 시대(960년 쯤~1360년)라고 할 수 있다. 특히 절정을 이룬 것은 13세기 중엽 이후 14세기 초에 걸치는 약 반세기 동안이며, 이 사이에 진구소의 數書九章(1247), 이야의 測圓海鏡(1248)과 益古演段(1259), 양휘의 楊輝算法, 주세걸의 算學啓蒙(1299?), 四元玉鑑(1303), 그리고 중국계 수리천문학의 금자탑이라 할 곽수경의 授時曆(1280)등의 거작이 모두 이때 나왔다.

楊輝算法은 3권으로 구성된 乘除通變本末과 2권으로 구성된 田畝比類乘除捷法, 그리고 2권으로 구성된 續古摘奇算法등 모두 7권으로 이루어진 수학책이다. 우리나라에는 선덕 8년[2] 5월 칙명으로 경주부에서 간행했다.[3]

2) 세종 15년인 1433년이다.

3) 복간본에 관하여 “경상도 감사가 나아가, 새로이 간행한 楊輝算法 100권을 진상했다. 왕이 이것을 나누어서 집현전, 호조, 서운관, 습산국에 나누어 주었다.”라는 기록이 있다.

3권으로 구성된 乘除通變本末의 算法通變本末은 습산강목, 상승육법, 상제이법으로 나눠진다. 습산강목은 곱셈, 나눗셈, 가감법의 활용과 자릿수 정하기를 다루고 있다. 상승육법은 한 자릿수 곱셈과 같은 여러 가지 유형의 곱셈을 다루고 있다. 상제이법은 나뉨수가 나눗수보다 클 때와 작을 때에 관하여 다루고 있다.

乘除通變算寶는 가법오술, 감법사술, 구일승법, 구일제법 등으로 나눠진다. 가법오술은 한 자리를 더하는 곱셈, 두 자리를 더하는 곱셈과 같은 내용의 문제가 있다. 감법사술은 한 자리를 빼는 곱셈법, 두 자리를 빼는 곱셈법과 같은 내용의 문제가 있다. 구일승법은 5, 6, 7, 8, 9를 2배 할 수 있을 때와 없을 때, 2와 3을 반으로 나눌 수 있을 때와 나눌 수 없을 때 등의 문제가 있다. 또 2와 3을 반으로 나눌 때에 관한 문제인 구일제법이 있다.

法算取用本末은 모두 102개의 문제로 구성되어 있으며 1부터 300까지의 범위에서 곱셈과 나눗셈에 대해서 상세히 설명하고 있다.

田畝比類乘除捷法은 상권과 하권으로 구성되어 있다. 상권은 37개의 문제로 이루어져 있으며, 직사각형 모양의 밭, 정사각형 모양의 밭, 정사각형과 원형으로 꽂아놓은 화살 묶음[4], 원형 밭, 둥근 언덕 모양의 밭, 쇠뿔 모양이나 언덕 모양의 밭, 고리 모양의 밭, 이등변삼각형 밭, 직각삼각형과 마름모꼴 모양의 밭, 사다리꼴 모양의 밭 등의 넓이를 구하는 문제를 다루고 있다.

27개의 문제로 이루어져 있는 하권은 부등변사각형 모양의 밭, 잘려진 직사각형 모양의 밭, 차이를 토대로 길이와 너비의 합을 물음, 합을 토대로 길이와 너비의 차이를 물음이 있다. 또 직사각형 모양의 밭의 넓이를 구하는 단계별 계산을 제세하고 있으며, 정사각형 밭과 원형 밭의 전체 넓이로부터 정사각형의 한 변과 원의 지름을 구하거나 잘려진 이등변삼각형과 사다리꼴, 고리 모양의 밭의 넓이를 구하는 문제가 있다.

續古摘奇算法은 田畝比類乘除捷法과 마찬가지로 상권과 하권으로 구성되어 있다. 상권은 종횡도, 하도수, 낙서수, 사사도, 오오도, 육륙도, 칠칠도, 육십사도, 구구도, 백자도, 취오도, 취륙도, 취팔도, 찬구도, 팔진도, 연환도 등의 문제가 있다. 하권은 같은 조롱에 들어있는 꿩과 토끼 문제, 세 종류의 닭 값 나누기, 부피에 따른 금의 무게 구하기, 강을 판 부피[5], 정해진 비율로부터 몫의 차이를 구하기, 차등분배, 영부족, 정사각형과 원에 대한 일반론, 정수로 딱 맞아떨어지지 않는 수의 제곱근을 구하는 법, 구고술 등의 문제가 있다.

---

4) 상권의 문제 12로 ‘정사각형 화살 묶음의 바깥 둘레에 40개가 있다면 화살은 모두 얼마나 되는가?’이다. 楊輝算法에 제시된 풀이방법은 정사각형의 넓이를 활용하고 있다.

5) 문제 33으로 ‘64명이 8일 동안 강 1600자^{3}을 파는데, 이제 36명을 더 투입해서 12일 동안 파게 되면 몇 자^{3}나 파겠는가?’이다.

3. 楊輝算法과 제7차 개정교육과정의 중학교 수학의 비교

이 장에서는 양휘산법과 제7차 개정교육과정의 중학교 수학의 내용을 비교하고, 楊輝算法에서 제시한 풀이방법과 제7차 개정안의 중학교 수학교과서의 풀이방법을 제시할 것이다. 그러나 楊輝算法에 소개된 모든 문제에 대하여 이와 같은 작업을 한다는 것은 효율적이지 않으므로 제7차 개정교육과정의 내용과 부합하는 문제를 소개하고, 그 가운데 몇 가지 예를 소개한다. 그리고 본 논문에 소개된 楊輝算法의 내용은 차종천[13]이 번역한 책을 인용하였다.

이제 楊輝算法의 내용들이 현행 교육과정과 어떤 관련성이 있는지 알아보자.

제7차 교육과정의 시기(1997∼현재)는 교육부 고시 제1997-15호로 초・중등학교 교육과정이 고시된 때부터 교육부 고시 제2007-79호로 초・중등학교 교육과정이 고시될 때까지를 말한다. 이 시기에는 학습자 중심의 교육과정으로 수준별 교육과정(단계형과 과목 선택형)을 적용하였고, '수학적 힘'의 신장을 도모하였다. 그런데 제7차 교육과정은 2006년 8월 29일자로 개정고시 되었으며, 우리는 이것을 제7차 개정교육과정이라고 할 것이다. 다음 표는 楊輝算法과 제7차 개정교육과정의 중학교 수학의 내용을 비교한 것이다.([1], [2] 참조)

＜표1＞ 楊輝算法과 제7차 개정교육과정 비교

학습내용	楊輝算法	제7차 개정교육과정
• 최소공배수	續古摘奇算法 9[6)]	중학교 1학년 '수와 연산' 영역의 최소공배수
• 일차방정식	續古摘奇算法 24, 25, 28, 34, 35, 36, 37, 43, 44	중학교 1학년 '문자와 식' 영역의 일차방정식
• 입체도형의 부피	續古摘奇算法 12	중학교 1학년 '기하' 영역의 입체도형의 부피
• 지수법칙	續古摘奇算法 10, 11	중학교 2학년 '문자와 식' 영역의 지수법칙
• 연립일차방정식	續古摘奇算法 27, 45	중학교 2학년 '문자와 식' 영역의 연립일차방정식
• 일차함수	田畝比類乘除捷法 26	중학교 2학년 '함수' 영역의 일차함수의 활용
	續古摘奇算法 45	
• 제곱근	田畝比類乘除捷法 44, 47, 52, 57, 58, 62, 63	중학교 3학년 '수와 연산' 영역의 제곱근의 뜻과 성질
• 이차방정식	田畝比類乘除捷法 17, 31, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 56	중학교 3학년 '문자와 식' 영역의 이차방정식
	續古摘奇算法 23	

<표 1>에서 알 수 있듯이 楊輝算法의 내용이 중학교 수학의 교육과정과 관련된 것을 정리하면 乘除通變本末과는 거의 관련이 없고, 田畝比類乘除捷法과 續古摘奇算法의 많은 내용이 관련되어 있음을 알 수 있다. 이는 乘除通變本末 가운데 算法通變本末과 乘除通變算寶는 오늘날의 초등학교 고학년 정도의 기초적인 내용을 다루고 있기 때문이다. 또 法算取用本末은 1부터 300까지의 곱셈 과정이기 때문에 여기서는 이들에 관해서 다루지 않는다. 따라서 본 논문에서는 방정식과 함수를 주로 다루고 있는 田畝比類乘除捷法과 續古摘奇算法을 현행 교육과정과 자세히 비교하여 설명한다.

이제 <표 1>에서 제시된 8가지 학습내용을 차례대로 살펴보자.

(1) 최소공배수

> 관련 문제 : 續古摘奇算法 9
> 문제 9 : 큰딸은 사흘에 한 번씩 집에 들르고, 가운데 딸은 나흘에 한 번씩 집에 들르고, 막내딸은 닷새에 한 번씩 집에 들른다고 하면 며칠마다 모두 만나겠는가?
> 답 : 60일.

이 문제는 현행 중학교 1학년 '수와 연산' 영역의 학습내용인 최소공배수 문제이다. 3, 4, 5는 모두 서로소이므로 세 수의 최소공배수는

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

임을 알 수 있다. 楊輝算法에서는 구체적인 풀이방법을 제시하지 않고 있으며 다만 '풀이방법에 따라서 3, 4, 5를 서로 곱한다.'로 되어 있다.

(2) 일차방정식

> 관련 문제 : 續古摘奇算法 24, 25, 28, 34, 35, 36, 37
> 문제 28 : 나 비단 7자와 능 비단 9자의 값은 같고, 능 비단 한 자 값이 나 비단의 그것보다 36문 적다고 한다. 각각의 한 자 값은 얼마인가?
> 답 : 나 비단 162문, 능 비단 126문.

楊輝算法에 주어진 일차방정식 관련 문제는 모두 7문제이다. 문제 24는 강, 문제 25는 비단, 문제 34는 무게, 문제 35, 36, 37은 분배에 관한 문제이다. 위에서 예로 든 문제 28의 楊輝算法에 제시된 풀이방법은 다음과 같다.

'가격 합계와 관련지어 연립방정식을 푸는 공적분신술에 따르면, 먼저 나 비단의 값을 구하기 위하여, 적은 값을 능 비단의 수량과 곱하고, 나 비단과 능 비단

---

6) 楊輝算法 항목에 제시된 수는 각 권에 제시된 문제의 번호이다.

의 자수를 뺀 나머지를 나눗수로 삼아서 나눠주면, 나 비단의 값이 되고, 적은 값을 빼면, 능 비단의 값이 된다.

먼저 능비단의 값을 구하는 선구능가술에 따르면, 적은 값을 나 비단의 수량과 곱하고, 나 비단과 능 비단의 자수를 뺀 나머지를 나눗수로 삼아서 나눠주면 능 비단의 값이 되고 적은 값을 더하면 나 비단의 값이 된다.'

오늘날의 풀이방법으로 해를 구하기 위하여 나 비단의 한 자의 가격을 x라고 하면

$$7x = 9(x-36)$$

와 같은 일차방정식을 세울 수 있다. 이 방정식의 해를 구하면 $x = 162$이다. 따라서 나 비단은 162문, 능 비단은 126문임을 알 수 있다.

이 식에서 알 수 있듯이 楊輝算法의 풀이는 문자와 수식을 사용하지 않았기 때문에 이해하기 매우 어렵다.

(3) 입체도형의 부피

관련 문제 : 續古摘奇算法 12 문제 12 : 가령 쌀 창고의 동서가 24자, 남북이 36자, 높이가 18자 라면, 곡식을 얼마나 저장할 수 있겠는가? 답 : 5,760석

제7차 개정교육과정에서는 중학교 1학년 '기하' 영역에서 입체도형의 부피를 다루고 있다. 楊輝算法에서 입체도형의 부피를 구하는 문제는 續古摘奇算法 문제 12이다. 이 문제는 직육면체의 부피를 구하는 것으로 동서가 24자, 남북이 36자, 높이가 18자이므로

$$24 \times 36 \times 18 = 15552$$

이고, 이 결과에 부피를 쌀의 수량을 세는 단위인 섬으로 바꾸기 위해 2.7로 나누면

$$15552 \div 2.7 = 5760$$

이다.

楊輝算法에는 입체도형 이외에도 평면도형에 관련된 문제가 수록되어 있다. 그 가운데 續古摘奇算法의 문제 19, 문제 20, 문제 21 등은 원의 넓이와 관련된 문제이다. 예를 들어 문제 19는 '원형 밭(원전)의 둘레가 300보라면 넓이는 몇 무인가?'이다.[7] 그러나 제7차 개정교육과정에 의하면 원의 넓이를 구하는 것은 초등

---

7) 楊輝算法에 답은 31무 $2\frac{1}{2}$푼으로 주어져 있다. 풀이방법은 '원래의 풀이방법에 따라서 길이와 너비를 서로 곱하여 반으로 나누고 무의 나눗수(무법)로 나눈다. 무를 구하는 법(구무술)에 따라서 둘레의 보수에 가25하여 반으로 나누고, 6으로 나눈 다음 보 위를 무의 자리로 정한다.'라고

학교 6학년 '측정' 영역에서 다루고 있기 때문에 여기서는 이와 관련된 문제는 자세히 다루지 않을 것이다.

(4) 지수법칙

관련 문제 : 續古摘奇算法 10, 11
문제 10 : 1문을 매일같이 배로 하여 30일간 거듭하면, 얼마나 되겠는가?
답 : 1,073,741관 824문.

이 문제에 대하여 楊輝算法에는 다음과 같이 세 가지 풀이방법을 제시하고 있다. '풀이방법에 따라서 8배씩 10번 거듭하는데, 8배를 한번 곱하면 사흘이 지나고, 8배를 10번하면 30일이 지난다.

다른 풀이방법에 따르면, 64를 곱하기 5번 거듭하라고 한다. 64배는 6일의 수치이므로, 5번 거듭하면 30일이 된다.

또 다른 풀이방법에 따르면, 32를 곱하기를 3번 거듭해서 얻어진 값을 제곱해도 마찬가지라고 하는데, 32배를 3번 거듭하면 15일의 수치가 되며, 15일 값을 서로 곱하면, 곧 30일 값이 된다.'

지수법칙은 제7차 개정교육과정에서 중학교 2학년 '문자와 식' 영역에 해당한다. 楊輝算法에는 지수법칙과 관련된 2개의 문제가 주어져 있으며 모두 기본적인 지수법칙을 이용하는 문제이다. 실제로 문제 10은 m, n이 자연수일 때

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$$

임을 이용하여 문제를 해결하고 있다. 즉,

$$(2^3)^{10} = (2^6)^5 = ((2^5)^3)^2 = 1{,}073{,}741{,}824.$$

이다. 楊輝算法에 주어진 문제 11은

'첫날 3전이 있었는데, 그 후 매일같이 3배씩 불려나갔다면, 한 달 뒤에는 얼마나 되겠는가?'

이며 문제 10과 내용 및 풀이방법이 매우 유사하다.[8)]

되어 있다.

8) 답이 2,058억 9,113만 2,094관 649문으로 제시되어 있다. 풀이방법은 '첫날 3전을 놓고, 5승을 적용하여 제곱한 다음 9로 나누면 답의 값을 얻는다. 다른 풀이방법에 따르면, 3으로서 4차 제곱을 나누면 14,348관 907문으로서 제 15일의 액수가 되므로 그 수를 제곱하면 30일의 액수를 얻는다.' 오늘날의 풀이방법으로 나타내면

$$((((3^2)^2)^2)^2)^2 = 3^{32} = 1853030188851841,$$
$$3^{32} \div 9 = 3^{30} = 205891132094649$$

이다. 두 번째 풀이방법은

$$(((3^2)^2)^2)^2 \div 3 = 3^{16} \div 3 = 3^{15} = 14348907,$$
$$(3^{15})^2 = 3^{30} = 20589113209469$$

이다.

(5) 연립일차방정식

관련 문제 : 續古摘奇算法 27, 43, 44, 45 문제 27 : 꿩과 토끼가 같은 조롱에 들어 있는데, 위로는 머리가 35개이고, 아래로는 다리가 모두 94개이다. 각각 몇 마리씩인가? 답 : 꿩 23마리, 토끼 12마리.

楊輝算法에 제시된 풀이방법은 다음과 같다.

'풀이방법에 따라서 머릿수를 배로 하고, 그것을 다리 수에서 뺀 나머지를 반으로 나누면, 토끼의 마리 수가 나온다.[9]

먼저 꿩을 구하는 법(선구치술)에 따르면, 마리 수를 네 배하여, 전체 다리 수로 빼주면, 나머지는 모두 꿩의 다리이니 반으로 나누면, 꿩의 마리 수가 나온다.'

문제 27을 현대적인 풀이방법을 사용하여 해를 구하기 위하여 꿩과 토끼의 마리 수를 각각 x, y라고 하면

$$\begin{cases} x+y \quad\;\, = 35 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+4y = 94 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

와 같은 연립일차방정식을 얻는다. 이 연립일차방정식의 해를 구하면 꿩은 23마리이고 토끼는 12마리임을 알 수 있다.

이 풀이에서 알 수 있듯이 문제 27은 전형적인 연립방정식 문제이다. 문제 45[10]는 연립방정식을 세워서 풀 수도 있고, 일차함수를 활용하여 풀 수도 있는데, 楊輝算法에서는 九章算術과 같은 풀이방법을 사용하고 있다.

續古摘奇算法의 문제 29, 문제 30, 문제 31, 문제 38은 미지수가 3개이고 방정식의 개수가 2개인 부정방정식이다. 예를 들어 문제 29는 '지금 수탉 한 마리는 5문씩 하고, 암탉 한 마리는 3문씩하며, 병아리는 세 마리에 1문 한다. 모두 100문을 갖고 닭 100마리를 사려고 한다. 수탉, 암탉, 그리고 병아리는 각각 얼마나 되겠는가?'이다. 楊輝算法에 의하면 이 문제의 풀이방법으로 張丘建算經의 풀이방법을 따르고 있다고 하였으며, 楊輝算法에 제시된 풀이는 다음과 같다.

---

9) 머릿수를 배로 하여 꿩과 토끼를 구분하지 않은 것은 다리 둘씩으로 마리 수를 곱한 것이므로 전체 다리 수에서 그것을 빼주면, 나머지는 곧 토끼 한 마리당 다리 둘 씩 남는다.

10) 楊輝算法에 수록된 문제 45와 풀이는 다음과 같다.

도둑들이 비단을 훔쳤는데, 한 명당 12필씩 나누면 12필이 남고, 한 명당 14필씩 나누면 6필이 모자란다. 도둑들과 비단은 각각 얼마나 되는가? 답 : 도둑 9명, 비단 120필.

九章算術의 풀이를 좇아서 영부족을 다음과 같이 놓는다.

(좌)	(우)
14필	12필
-6필	+12필

대각선 방향으로 서로 곱하여 각각 더했으나 문제에 부합되는 답이 나오지 않는다. 비율의 차이를 나눗수로 삼고 나눗수로 그것을 나눠주면 답이 나온다. 또 다른 풀이방법에 따르면 영부족을 더하여 나뉨수로 삼고 비율이 큰 것과 작은 것을 서로 뺀 나머지를 나눗수로 삼는다. 나눗수로 나뉨수를 나눠주면 사람 수를 얻는다. 비율로 사람 수를 곱하고 남는 것을 빼거나 모자라는 것을 더해주면 답이 나온다.

‘수탉은 4씩 늘리고, 암탉은 7씩 빼고, 병아리는 3씩 늘리라는 것인데, 이미 주어진 수를 늘리거나 줄이라는 것이다. 원래의 계산법에 따라서 돈 100문을 놓아 나뉨수로 삼고, 또 수탉을 1, 암탉을 1로 놓고, 각각을 병아리로 3배하면, 수탉 3, 암탉 3이 되어 병아리 3과 함께 더하면 모두 9가 되는데, 나눗수로 삼아서 나뉨수를 나눠주면, 암탉의 수 11이 나온다. 별도로 닭 전체의 합계 100마리를 놓고, 수탉 8마리와 암탉 11마리를 뺀 나머지 81마리는 병아리수가 된다. 수탉, 암탉, 그리고 병아리의 단가를 놓고 그것들을 곱해주면, 답이 나온다. 앞의 방법에 의한 계산(인전법초)에 따르면, 답으로 얻은 수를 놓아 수탉을 4씩 늘리면 12마리가 되고, 암탉을 7씩 빼면 4마리가 되며, 병아리를 3씩 늘리면 84마리가 되어, 도합 100마리이므로, 문제에 들어맞는다.’

이 문제의 해를 구하기 위하여 수탉의 수를 x, 암탉의 수를 y, 병아리의 수를 z라 하면

$$\begin{cases} x+y+z &= 100 \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3} &= 100 \end{cases}$$

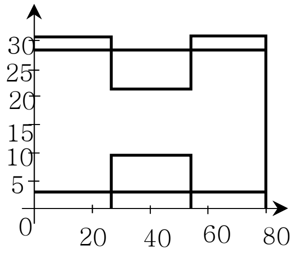
와 같은 부정방정식을 얻는다. 이 부정방정식의 양의 정수해는 (8, 11, 81)이므로 楊輝算法에 주어진 답이 옳다는 것을 확인할 수 있다. 그런데 (-4, 32, 72)도 이 부정방정식의 한 해이다. 하지만 楊輝算法에서는 음수에 관한 내용을 다루지 않고 있으며, 특히 음수해도 언급하지 않고 있다. 이런 사실로 미루어 보아 부정방정식은 양의 정수해만을 구했음을 알 수 있다.

(6) 일차함수

관련 문제 : 續古摘奇算法 45, 田畝比類乘除捷法 26, 27, 28, 29 문제 26 : 應用算法에 너비 셋이 같지 않은 이중 사다리꼴 모양의 밭(삼광전) 문제가 실려 있는데 한쪽 머리의 너비가 28보 다른 한쪽 머리의 너비가 40보, 가운데 허리가 18보 그리고 높이가 140보라면, 밭의 넓이는 얼마 인가? 답 : 15문 40보^2

삼광전은 두 머리의 너비가 같지 않은 요고전[11]의 형태로

11) 五曹算經[전조(田曹)-5]
장구 모양의 밭(요고전)이 있는데, 길이가 82보, 양쪽 너비는 각각 30보이며, 가운데 너비는 12보이다. 넓이는 얼마나 되는가?
답: 8무 나머지 48보
풀이방법에 따라서 세 너비를 더하면, 72보가 되는데 3으로 나누면 24보가 되며, 길이 82보를 곱하면 1,968가 되는데, 무의 값으로 나눠주면 답이 나온다.



$$\frac{(2\times 18+28+40)\times 140}{4\times 240}=\frac{91}{6}=15\frac{1}{6}\text{무}$$

즉, 15무 40보^{2}임을 알 수 있다. 이 문제에서 삼광전의 허리의 정확한 위치가 명시되어 있지 않으므로 편의상 28보짜리 머리에서 허리까지의 높이를 x라고 하면, 넓이는 S는

$$S=f(x)=\frac{x(28+18)+(140-x)(40+18)}{2\times 240}$$
$$=16\frac{11}{12}-\frac{x}{40}$$

인 일차함수로 나타낼 수 있다.

이 함수의 정의역이 $0\le x\le 140$이므로 치역은

$$13\frac{5}{12}\le x\le 16\frac{11}{12}$$

이다. 따라서 $15\frac{1}{6}$라는 답은 허리가 두 머리로부터 등거리인 지점에 놓일 때, 즉 $f(70)$에 해당한다는 것이다.

(7) 제곱근

관련 문제 : 田畝比類乘除捷法 44, 47, 52, 57, 58, 62, 63 문제 52 : 정사각형 밭과 원형 밭이 각각 하나씩 있는데, 둘을 더한 넓이가 2,268보이고, 정사각형 밭의 한 변과 원형 밭의 지름이 같다면, 각각의 길이는 얼마인가? 답 : 36보. 문제 58 : 고리 모양의 밭의 바깥 둘레가 72보, 가운데 둘레가 24보, 두께가 8보인데, 지금 안 둘레로부터 넓이 195보를 잘라낸다면, 잘려진 바깥 둘레와 두께는 얼마인가? 답 : 잘려진 두께 5보, 바깥 둘레 54보

문제 52에 대하여 楊輝算法에 제시된 풀이방법은 다음과 같이 복잡하다.

‘풀이방법에 따라서 넓이를 4배하여 실로 삼고, 7을 우산으로 삼아서 제곱근을 구한다. 단계별 계산 제시에 따라서 넓이의 4배는 정사각형 4개와 원전 4개로 이루어지는데, 4개의 원전은 정사각형 3개에 거의 가깝기 때문에 모두 정사각형 7개에 해당된다. 그러므로 7을 우산으로 삼는다. 7개의 정사각형으로부터 근을 구하면, 또한 원전의 지름이 된다.

계산법에 따라서 합한 넓이를 4배하면 9,072보가 되는데, 7을 정우로 삼고, 그것을 실의 100자리 아래에 놓는다. 상상 30을 정우 7과 곱한 210을 놓아 방법으로 삼고, 상상을 곱하여 실에서 빼면, 나머지는 2,772보가 된다. 방법을 2배하고, 한

자리 물려서 염으로 삼고, 우법은 두 자리 물린다. 다시 상상에 6을 놓고, 우를 곱하여 7을 곱한 42를 우로 삼아서 염법에 더한다. 염과 우의 두 나눗수로 모두 상상을 곱하고 실을 나누면 정수로 딱 맞아떨어지게 된다. 정사각형 밭의 한 변은 36보가 되는데, 원전의 지름도 역시 같다.'

이 풀이방법은 중학교 3학년 '수와 연산' 영역의 제곱근의 뜻과 성질을 이해하고 있어야 풀 수 있다. 楊輝算法에 제시된 풀이방법을 오늘날의 표기법을 사용하여 풀면 다음과 같다. : $\pi=3$이라 하고 정사각형의 한 변을 x라고 하면 두 넓이의 합은

$$3\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2=\frac{7x^2}{4}=2268$$

이다. 따라서 $x^2=1296$이므로 $x=\sqrt{1296}=36$이다.

이 풀이에서 원주율 π을 3으로 사용하고 있음을 알 수 있다. 또 제곱근을 구할 때 처음부터 음의 제곱근은 생각하지 않고 있다. 楊輝算法에 주어진 문제는 제7차 개정교육과정의 중학교 수학 교과서에 제시된 풀이방법이 여러 가지 있다. 이를 테면 문제 44[12)]의 경우도 제곱근을 이용하는 방법과 이차방정식을 세워 인수분해로 푸는 방법이 있는데, 楊輝算法에서는 이와 같은 경우 대부분 제곱근을 이용하는 풀이를 제시하고 있다. 그런데 제곱근을 이용한 풀이방법은 제곱근을 풀 때 학생들이 실수하기 쉽기 때문에 이차방정식을 세우고 인수분해를 이용하여 답을 구하는 풀이방법을 주로 사용하고 있다.

楊輝算法에 주어진 제곱근 문제는 대부분 정수로 답할 수 있는 것이었다. 하지만 다음에 주어진 문제 58의 정확한 답은 정수로 떨어지지 않는다. 楊輝算法에

12) 직사각형 밭의 넓이가 864보인데 너비가 길이보다 12보 짧다고만 되어 있으면, 길이와 너비의 합은 몇 보인가?
답 : 60보.
제곱근을 이용할 경우의 풀이 :

$$\begin{aligned}
&x=\text{길이},\ y=\text{너비}\\
&xy=864,\ x-y=12\\
&(x+y)^2=(x-y)^2+4xy\\
&x+y=\sqrt{(x-y)^2+4xy}\\
&x+y=\sqrt{(12)^2+4\times 864}\\
&x+y=\sqrt{3600}\\
&\therefore\ x+y=60
\end{aligned}$$

이차방정식을 이용한 풀이 :

$$\begin{aligned}
&\text{너비}=x,\ \text{길이}=x+12\\
&x(x+12)=864\\
&x^2+12x-864=0\\
&(x-24)(x+36)=0\\
&x=24\text{이므로 길이}=36,\ \text{너비}=24\text{이다.}\\
&\therefore\ 60\text{보}
\end{aligned}$$

주어진 풀이방법은 다음과 같다.

‘풀이방법에 따라서 넓이를 2배를 나뉨수로 삼고, 두께의 보수로 두 둘레의 차이를 나누어 정우로 삼는다. 가운데 둘레를 2배하여 종방으로 삼아서 근을 구하면, 잘려진 두께가 된다. 그런 다음 두께의 보수를 놓아 6으로 곱하고, 가운데 둘레를 더하면, 바깥 둘레가 된다. 계산법에 따라서 넓이를 2배하면 390보가 되는데 나뉨수로 삼고, 두 둘레를 서로 뺀 차이 48을 지름 8보로 나누면, 6보가 되는데, 정우로 삼는다. 가운데 둘레를 2배하면, 48이 되는데, 종방으로 삼아서, 제곱근을 구하면 지름 5보가 나오는 것을 6배하고, 가운데 둘레에 더하면, 54보가 되어 잘려진 바깥 둘레를 삼으면, 답이 나온다.’

이 문제에 대하여 楊輝算法에 제시된 답은 잘려진 두께가 5보이고 바깥둘레가 54보이다. 그런데 잘려진 바깥둘레를 x로 놓고 식을 세우면

$$\frac{72^2 - x^2}{12} = 195$$

이다. 이 식을 풀면 $x^2 = 2844$이므로 $x = \sqrt{2844}$이다. 그런데 楊輝算法에서는 이 문제의 답을 $\sqrt{2844} \approx 53.33$이 아닌 54로 답하고 있다. 이와 같은 사실로 미루어 짐작할 수 있는 것은 楊輝算法이 작성될 당시에는 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근의 정확한 값을 구하지 않았음을 알 수 있다. 결국 무리수에 대한 이해가 정확하게 정립되어 있지 않았다고 생각할 수 있다.

(8) 이차방정식

관련 문제 : 續古摘奇算法 23, 田畝比類乘除捷法 17, 31, 42, 43, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 56
문제 42 : 직사각형 밭의 넓이가 864보인데, 지금 너비가 길이보다 12보 짧으면, 너비는 얼마인가?
답 : 24보.
문제 31 : 고리 모양의 밭 (환전)이 있는데, 가운데 둘레가 6보, 바깥 둘레가 30보, 두께가 4보라면, 넓이는 얼마나 되는가?
답 : 72보^2

楊輝算法에 문제 42의 풀이는 ‘풀이방법에 따라서 넓이를 놓아 나뉨수로 삼고, 모자라는 보수를 종방으로 삼아서 근을 구한다.’로 주어져 있다.

이 문제는 중학교 3학년 ‘문자와 식’ 영역에서 배우게 되는 인수분해와 이차방정식의 풀이방법 가운데 한 가지인

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x - \alpha)(x - \beta)$$

을 이용하여 해를 구할 수 있다. 즉, 가로를 x라 하면 세로는 $(x+12)$이므로

$$x(x+12) = 864$$

와 같은 이차방정식을 세울 수 있다. 그리고 이 방정식의 해는 $x=24,\ -36$이므로 가로의 길이는 24보이다.

楊輝算法에는 이차방정식과 관련된 문제가 많이 주어져 있다. 그 가운데에서도 田畝比類乘除捷法의 문제 31과 같이 고리 모양의 밭의 넓이를 구하는 문제가 있다. 다음은 楊輝算法에 주어진 문제 31의 풀이방법이다.

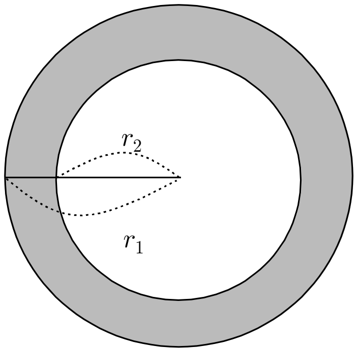
'환전의 가운데 둘레는 곧 사다리꼴의 윗변, 바깥 둘레는 아랫변, 그리고 두께는 높이에 해당된다. 환전의 기본적인 풀이방법은 가운데 둘레와 바깥 둘레를 더해서 반으로 나눈 다음, 높이로 곱하는 것이다. 사다리꼴의 넓이를 구하는 법을 써서, 윗변과 아랫변을 더하고, 반으로 나눈 다음, 높이를 곱해도 된다. 계산법에 따라서 가운데 둘레와 바깥 둘레를 더한 36보를 두께와 곱하면, 144보가 되는데, 반으로 나누면, 답이 나온다.'

위의 풀이방법을 수식으로 나타내면

$$\frac{(30+6)\times 4}{2}=72$$

이다. 그런데 이 식은 다음과 같은 고리 모양의 넓이를 구하는 식으로부터 유도된 풀이방법이며, 이 과정에서도 원주율 π는 3으로 계산한다.

$$\begin{aligned}\pi r_1^2-\pi r_2^2 &= \pi(r_1^2-r_2^2)\\ &= \pi(r_1+r_2)(r_1-r_2)\\ &= 3(r_1+r_2)(r_1-r_2)\\ &= \frac{6(r_1+r_2)(r_1-r_2)}{2}\\ &= \frac{(6r_1+6r_2)(r_1-r_2)}{2}\\ &= \frac{(6r_1+6r_2)(6r_1-6r_2)}{12}\\ &= \frac{36r_1^2-36r_2^2}{12}\\ &= \frac{(\text{둘레}_1)^2-(\text{둘레}_2)^2}{12}\end{aligned}$$



따라서 이 식에 (가운데 둘레)=$2\pi r_1$=6, (바깥 둘레)=$2\pi r_2$=30을 대입하면

$$\begin{aligned}S &= \frac{\text{둘레}_1^2-\text{둘레}_2^2}{12}\\ &= \frac{(r_1-r_2)(6r_1+6r_2)}{2}\\ &= \frac{(5-1)(30+6)}{2}\\ &= \frac{4\cdot 36}{2}\\ &= 72\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 楊輝算法에 주어진 고리 모양의 밭의 넓이를 구하는 문제는 모두 이와 같은 풀이로부터 유도된 식을 사용하고 있다.
楊輝算法에 주어진 이차방정식 문제는 크게 제곱근을 이용하는 풀이방법과 인수분해를 이용하는 풀이방법으로 나눌 수 있는데, 그 과정이 생략되고 결과만 주어져 있다. 따라서 楊輝算法에 주어진 풀이방법을 이해하기 위해서는 중간에 생략된 과정을 알아내야 하는 번거로움이 있다. 하지만 그 과정을 이해하고 나면 대부분의 문제는 풀이방법이라고 주어진 틀에 주어진 수치를 대입하여 간단히 답을 얻고 있다.

楊輝算法에는 비슷한 문제가 여러 가지 상황으로 실려 있다. 이를테면 田畝比類乘除捷法의 문제 43[13], 문제 48[14], 문제 49[15], 문제 50[16], 문제 51[17] 등은 모두 넓이가 864보임을 이용할 수 있도록 되어 있다. 이것은 이차방정식을 풀 때, 인수분해가 잘 되는 수를 골라서 사용했기 때문이다.

4. 결론

楊輝算法은 동양수학을 이해하는데 중요한 수학책 가운데 하나이다. 우리는 이 책으로부터 동양수학의 기본 방향과 성격을 짐작할 수 있다.

楊輝算法에 실려 있는 대부분의 문제가 실생활 관련문제라는 것으로부터 이 책이 출판될 당시 수학은 실생활에 직접 활용할 수 있는 것에 관심이 집중되어 있었음을 짐작할 수 있다. 또 오늘날의 수학과 다른 점은 楊輝算法에 주어진 문제들의 풀이방법이 비교적 자세하지만 논리적이지 않다는 것과, 제시된 풀이방법이 옳은 것이라는 논리적인 증명이 주어져 있지 않다는 것이다. 원과 관련된 문제에서 원주율을 사용할 때는 π의 근삿값으로 3을 사용하고 있으며, 제곱근을 구할 때나 방정식의 해를 구할 때 음의 제곱근과 음수 해는 인정하지 않은 것은 당시 동양수학의 공통점이라 할 수 있다.

楊輝算法에서는 주어진 문제에 대하여 여러 가지 풀이방법을 제시한 경우도 있

13) 직사각형 밭의 넓이가 864보인데, 지금 너비가 길이보다 12보 짧으면, 길이는 얼마인가? 답 : 36보.

14) 직사각형 밭의 넓이가 864보인데, 길이를 3배하고 너비를 5배한 합이 228보라고 한다. 원래의 너비는 몇 보인가? 답 : 24보.

15) 직사각형 밭의 넓이가 864보인데, 길이를 3배하고 너비를 5배한 합이 228보라고 한다. 길이는 몇 보인가? 답 : 36보.

16) 직사각형 밭의 넓이가 864보인데, 길이의 1배, 너비의 2배, (길이와 너비의) 합이 3배와 차이의 4배를 더한 합계가 312보라고 한다. 너비는 몇 보인가? 답 : 24보.

17) 직사각형 밭의 넓이가 864보인데, 길이의 1배, 너비의 2배, (길이와 너비의) 합이 3배와 차이의 4배를 더한 합계가 312보라고 한다. 길이는 몇 보인가? 답 : 36보.

었다. 예를 들어 田畝比類乘除捷法의 문제 43의 경우에 답을 구하는 과정을 두 가지로 제시하고 있고, 田畝比類乘除捷法의 문제 45의 경우에는 답을 구하는 과정을 세 가지로 제시하고 있다. 그런데 田畝比類乘除捷法의 문제 45를 오늘날의 풀이방법으로 해결하려면 이차방정식의 두 근 사이의 관계를 이용해야 하는데, 이것은 현행 고등학교 교육과정에 속하는 것이다. 따라서 楊輝算法에 제시된 문제 모두를 현행 중학교 교육과정의 내용만으로는 해결할 수 없음을 알 수 있다.

특히 續古摘奇算法의 29와 같은 문제는 미지수가 3개이고 방정식이 2개일 경우 해를 구하는 부정방정식이며, 楊輝算法에서는 이 부정방정식의 양의 정수해를 구하고 있다. 그런데 이와 같은 문제에 대하여 기본적인 풀이방법은 없다고 하고 있다. 이와 같은 부정방정식은 오늘날 대학에서 다루는 내용이다. 楊輝算法에 제시된 모든 문제를 오늘날의 풀이방법으로 해결하기 위해서는 초등학교에서부터 고등학교는 물론 대학에서 다루는 내용에 이르는 수학을 이해하고 있어야 한다. 그러므로 이 책은 기본적인 수학에서부터 매우 높은 수준의 수학까지 폭넓게 다루고 있음을 알 수 있다.

楊輝算法의 내용과 수준은 오늘날과 비교하면 정확하게 초등학교, 중학교, 고등학교 가운데 어느 단계의 교육과정과 일치한다고 단언할 수 없다. 따라서 楊輝算法 전체를 학생들에게 소개하기보다는 학생들의 수준에 맞게 각 단계에 맞는 문제만을 선별하여 제시하는 것이 필요한데, 어떤 문제는 수준을 정하기가 애매한 것도 있다. 예를 들어, 續古摘奇算法의 문제 35의 경우에 곱셈과 나눗셈을 배운 초등학생 정도면 해결할 수도 있지만 중학교 1학년 과정에서 일차방정식을 배우면 해결할 수 있는 것이다. 이와 같은 경우는 교사가 학생의 수준에 따라서 본 논문의 3장에서 논의된 내용을 기초로 하여 楊輝算法에서 선택하면 될 것이다.

楊輝算法에 제시된 문제들은 대부분 이 책이 만들어질 당시의 실생활과 관련된 문제이므로 楊輝算法은 수학적인 의미뿐만 아니라 당시의 생활상을 엿볼 수 있기도 하다. 따라서 교사가 수업시간에 해당되는 문제를 학생들에게 제시할 때는 선택된 문제에 대한 충분한 이해뿐만 아니라 그 문제에서 사용되고 있는 용어와 단위에 대하여도 충분히 설명해 주어야 한다.

방정식과 함수 이외에서 교사가 수업시간에 楊輝算法을 활용하기 위해서는 먼저 선별한 문제가 현행 교육과정의 어느 영역에 속하는지 정확하게 판단할 근거와 기준이 필요하다. 이를 위해서는 3장에서 주어진 결과와 같은 楊輝算法과 현행 교육과정에 대한 정확하고 폭 넓은 이해와 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] 교육부 고시 제1997-15호, 제7차 교육과정

[2] 교육인적자원부 고시 제2007-79호, 제7차 개정교육과정

[3] 강신덕, 함남우, 홍인숙, 김영우, 이재순, 전민정, 라미영, **중학교 수학1**, 교학사, 2008.

[4] 강옥기, 정순영, 이환철, **중학교 수학9-가, 수학9-나**, 두산, 2002.

[5] 고영미, 이상옥, 조선 산학의 흐름, **한국수학사학회지**, 22(2009), No. 3, 103-112.

[6] 김용운·김용국, **수학사대전**, 우성문화사, 1996.

[7] 김용운·김용국, **한국수학사**, 살림Math, 2009.

[8] 김창일, 윤혜순, 조선산학의 방정식 해법, **한국수학사학회지**, 22(2009), No. 4, 29-40.

[9] 신항균·이광연·윤혜영·이지연, **중학교 수학1, 수학2**, 지학사, 2009.

[10] 심상길, 중학교 이차방정식 단원에서 조선시대 수학사의 활용에 대한 연구, **한국수학사학회지**, 22(2009), No. 2, 117-130.

[11] 장혜원, **산학서로 보는 조선수학**, 경문사, 2007.

[12] 정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 서혜숙, 박부성, 강은주, **중학교 수학1**, 금성출판사, 2008.

[13] 차종천, **楊輝算法**, 교우사, 2006.

[14] 홍성사, 홍영희, 조선의 산학훈도와 산학교수, **한국수학사학회지**, 19(2006), No. 3, 1-20.

Gwang Yeon Lee and Ji Hye Bang
Department of Mathematics, Hanseo University
HaemiMyun Seosan ChungNam, 356-706
E-mail address: gylee@hanseo.ac.kr
E-mail address : jihey0503@nate.com

Yuoho Lee
Department of Internet Information, Daegu Haany University
Kyeongsan, 712-715
E-mail address : youho@dhu.ac.kr