East Asian Mathematical Journal
Vol. 27 (2011), No. 2, pp. 203-222

구(球)의 부피에 대하여 산학서(算學書)와 한국·중국 수학교과서와의 내용 비교 연구

박 영 식 · 최 길 남

ABSTRACT. In this paper, we investigate the methodology to calculate the volume of sphere in SanHakSeos. Comparing and analyzing content in Korean and Chinese mathematics education textbooks that uses as a foundation the aforementioned methodology, it is proposed that in future development of mathematics education curriculum the area of solid geometry be taught in greater depth in basic study guides.

Ⅰ. 서론

유휘(劉徽)가 주석한 「구장산술(九章算術)」의 소광장(少廣章)에서는 구의 부피가 주어지고 그 지름을 구하는 문제로부터 방율(方率)과 원율(圓率)의 비를 써서 구의 부피를 구하는 공식을 얻고 있다. 산학서(「구장술해(九章術解)」, 「묵사집산법(默思集算法)」, 「구일집(九一集)」, 「주해수용(籌解需用)」, 「주학실용(籌學實用)」, 「동산초(東算抄)」)에서의 구의 부피를 구하는 계산법은 모두 『구장산술』과 같은 방법으로 구하였으나 정확한 구의 부피를 얻지 못하였다. 이후 유휘는 모합방개(牟合方蓋)라는 입체를 구상을 거쳐, 조충지(祖冲之)와 조긍(祖暅) 부자에 이르러 비로소 조충지원산(祖冲之圓算)인 밀법을 써서 오늘날과 같은 정확한 구의 부피를 구하는 공식을 얻게 되었다. 특히 조선시대 산학자인 남병길(南秉吉)의 「산학정의 상편」 각체율(各體率)에서 구의 겉넓이를 알고 극한 개념을 도입하여 구의 부피를 구하는 점이 주목할 만하다.

본 논문에서는 한국의 『중학 수학 7-나』와 중국의 「입체기하」의 도형 중 구의 부피에 대한 내용을 다룬다. 따라서 본 연구는 산학서에서 구의 부피에 대한 계산법을 고찰하고, 그것을 토대로 하여 오늘날의 한국·중국의 수학교과서에서

2011년 1월 14일 투고, 2011년 2 월 21일 게재승인.
2010 Mathematics Subject Classification : 97-03, 01A75
Key words : 구의 부피

다루고 있는 관련되는 내용을 서로 비교·분석 함으로써, 앞으로의 교과서 저술과 학습지도에 도움을 주고자 한다.

Ⅱ. 구(球)의 부피에 대한 산출법

1. 산학서에서의 구의 부피 계산법

(1-1)「구장산술(九章算術)」 권 4의 소광(少廣)

「今有積四千五百尺問爲立圓徑幾何

答曰二十尺

又有積一萬六千四百四十八億六千六百四十三萬七千五百尺

問爲立圓徑幾何

答曰一萬四千三百尺

開入圓(卽球體也)

術曰置積尺數以十六乘之九而一所得開立方除之卽丸徑」

부피가 4500자이면 구의 지름은 얼마인가?

답 : 20자

또, 부피가 1644866437500자이면 구의 지름은 얼마인가?

답 : 14300자

입원이란 즉, 구이다.

풀이는 부피에 16을 곱하고 9로 나누어 세제곱근 하면 곧 구의 지름을 얻는다.

이 풀이에 대해 남병길(南秉吉)은 「구장술해(九章術解)」에서 다음과 같이 보충설명을 하고 있다([5]).

「十六者方率[1]四自乘之數也 九者圓率[2]三自乘之數也 究其實則在徑一圍三之率當倍積爲實立方開之得丸徑也蓋球體外面積應爲球徑平圓面積四倍卽方面積三倍也

且以外面積與半徑相乘得數以三歸之卽球積也

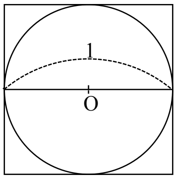
夫以三與半[3]乘之則得立方積一箇半而又以三歸之則球積必居立方積之半故倍積爲實立方開之也」

16은 방율 4를 제곱한 수이고, 9는 원율 3을 제곱한 수이다. 실제로 지름 1에 원둘레 3으로 할 때, 부피를 2배 하여 실로 하고, 세제곱근하면 지름을 얻는다. 대개 구의 겉넓이는 구의 지름과 같은 대원의 넓이의 4배이다. 즉, 정사각형의 넓이의 3배이다. 또, 겉넓이와 반지름을 서로 곱하여 3으로 나눈다. 즉, 구의 부

1) 방율(方率)은 지름이 1인 원에 외접한 정사각형의 변의 길이의 합이다.

2) 원율(圓率)은 지름이 1이고 원주율 π를 3으로 한 원둘레이다.

3) '三與半'은 三의 誤字이다.



피이다. 대개 3을 곱하면 정육면체 부피의 한 배 반이고, 또 3으로 나누면 구의 부피는 반드시 정육면체 부피의 반이므로 2배 하여 세제곱근하면 구의 지름이 된다.

<분석> (1) 구의 부피 V, 지름 d, 그리고 둘레를 l이라 하자.

그림에서 지름이 1인 원과 그에 외접한 사각형에서

(정사각형 둘레):(원 둘레)$=4:3$이므로 4를 방율(方率), 3을 원율(圓率)이라 한다. 이때 원주율 π는 3이다. 따라서

$$(\text{정사각형 넓이}):(\text{원의 넓이})=1:\frac{\pi}{4}=4:3$$

이다. 『구장산술』에서

$$(\text{정육면체의 부피}):(\text{구의 부피})=(\text{방율})^2:(\text{원율})^2=16:9$$

로 하여 구의 부피 V는 $\frac{9}{16}d^3$이 되고, 따라서 구의 지름 d는 $\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$이다.

『구장술해』에서 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{d^3}{2}$과 구의 겉넓이 $S_{구}=4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=3d^2$임을 알고, 다음과 같이 보충설명하고 있다.

① $2V=d^3$이므로 $d=\sqrt[3]{2V}$이다.

② $S_{구}$는 구의 지름과 같은 대원의 넓이의 4배가 되므로 $S_{구}=3d^2$이고, 정사각형의 넓이의 3배이다. 또, $V=(S_{구})\times\frac{d}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{d^3}{2}$이다.

③ $3V=\frac{3}{2}d^3$(정육면체 부피의 한 배 반)이며, 또 $\frac{3V}{3}=V=\frac{1}{2}d^3$(정육면체 부피의 반)이다. 따라서 $d=\sqrt[3]{2V}$을 얻는다.

(2) 구의 부피 $V=\frac{9}{16}d^3$은 정확한 구의 부피 $V=\frac{\pi}{6}d^3$에 대한 근사공식이다. 이에 대한 유휘의 주석은 구의 부피가 이에 외접하는 정육면체 속을 뚫고 서로 직교하는 두 개의 원통으로 이루어지는 도형(<合蓋>(그림 1-1, 1-2))[4)]의 $\frac{\pi}{4}$가 된다는 것을 알았다([4, p 92]).

$V=\frac{9}{16}d^3$의 부정확성에 대하여 한나라 장형(張衡, 78-139)은 원기둥과 그 내접한 구의 부피와의 관계에서 한 가지 가설을 세운 바, 두 입체의 부피 비는 단면인 정사각형과 원의 넓이의 비가 $4:3$이라는 가정에 따라

4) 合蓋는 모합방개(牟合方蓋)를 말하며, 문자의 의미는 '똑같이(牟) 합쳐진(合) 정사각(方) 우산(蓋)'이라는 것이다. 한 모서리가 1인 8개의 정육면체를 쌓아 한 변이 2인 정육면체를 만들고, 지름과 높이가 각각 2인 두 개의 원기둥을 수평으로 직각을 이루게 놓아 정육면체를 자른 공통부분에 해당된다.

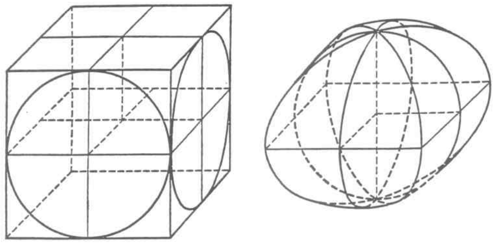


그림 1-1.

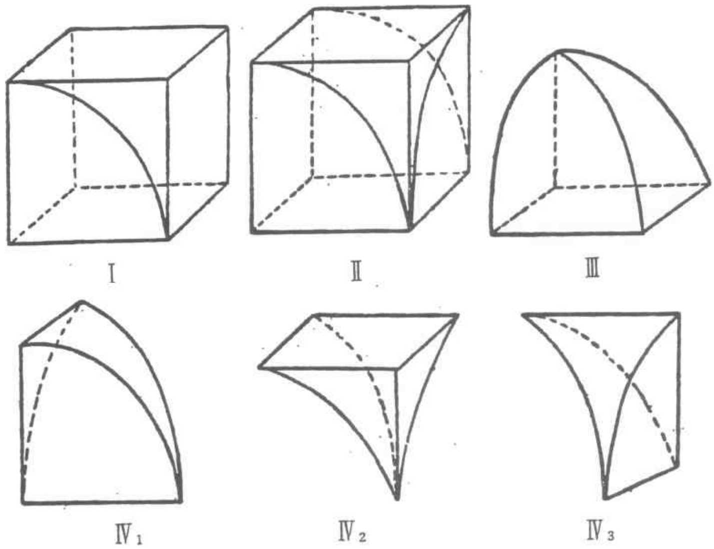


그림 1-2. 구의 부피 계산
입방체에 내접하는 구를 직교하는 두 개의 원통으로 절단해서 구한다. 오른쪽 그림은 그 중 1/8부분만 나타나 있다. III이 합개의 일부이다([4, p.93]). 즉,

$$\mathrm{IV}_1 + \mathrm{IV}_2 + \mathrm{IV}_3 = \text{정사각뿔},\ \text{정육면체} - \text{정사각뿔} = \mathrm{III} = \frac{1}{8} \times (\text{모합방개})$$

이다.

$$\frac{(\text{정육면체의 부피})}{(\text{구의 부피})} = \frac{(\text{정육면체의 부피})}{(\text{원기둥의 부피})} \times \frac{(\text{원기둥의 부피})}{(\text{구의 부피})} = \frac{16}{9}$$

이 성립한다.

유휘는 장형이 세운 가설의 오류를 지적하고, 원주율을 3으로 하면 원의 넓이

$$\left(\frac{3}{4}(\text{지름})^2 < \frac{\pi}{4}(\text{지름})^2 = \text{원의 넓이}\right)$$

가 너무 작고, 원기둥의 부피

$$\left(\frac{3}{4}(\text{지름})^3 < \frac{\pi}{4}(\text{지름})^3 = \text{원기둥의 부피}\right)$$

를 구의 비율로 하면, 구의 부피가 너무 커서 대략 9:16으로 했으나 그것도 역시 크다고 하였다.

따라서 구의 부피를 더 정확히 얻기 위해서 새로운 입체(모합방개)을 구상했다. 유휘는 구를 다양한 크기의 원을 쌓아 올린 것으로 보고, 쌓인 각각의 원을 그것의 외접정사각형으로 대체하면 모합방개인 것으로 간주하여, 4:3은 장형의 가설에 따른 원기둥과 구의 비가 아닌 모합방개와 구의 비가 된다고 하였다. 그러나 이런 입체를 구상하기는 했지만, 부피를 구하지는 못했다. 6세기에 이르러 조충지(祖冲之, 429-500)와 조긍(祖暅, 450?-520?) 부자에 의하여 구의 부피 계산이 비로소 해결되었다. 조부자의 방법 1, 2에 의해,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\times(\text{모합방개의 부피}) &= (\text{정육면체의 부피})-(\text{정사각뿔의 부피}) \\
&= r^3-\frac{1}{3}r^3\,(\text{단, } r\text{은 구의 반지름}) \\
&= \frac{2}{3}r^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{구의 부피} &= \frac{\pi}{4}(\text{모합방개의 부피}) \\
&= \frac{\pi}{4}\times 8\times\frac{2}{3}r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 조부자가 구한 정확한 구의 측도로 인해 이전에 가정되었던 구와 그에 외접한 원기둥의 부피 비가 3:4가 아님을 밝혔다. 실제비는 2:3이다([10] 재인용).

(1-2)「묵사집 산법 천(默思集 算法 天)」의 입원해적법(立圓該積法)

「以周自乘乃以周因之以四十八而一得實積又徑自乘
乃以徑因之又九因以一十六爲法而一亦得實積」

원둘레를 제곱한 후 원둘레를 곱하여 48로 나누면 구의 부피를 얻는다. 또, 지름을 제곱한 후 지름을 곱하고, 또 9를 곱하여 16으로 나누면 구의 부피를 얻는다.

<분석> 다음은 고법(古法) 또는 고원경법(古圓徑法)에 따라 계산한 것이다.

$$V=\frac{l^2\times l}{48}=\frac{9}{16}d^3\,(\text{단, } l=3d)\text{과}\quad V=\frac{d^2\times d\times 9}{16}=\frac{9}{16}d^3$$

(1-3)「구일집 천(九一集 天)」과「구일집 지(九一集 地)」

「구일집 천」의 구일집 범례(凡例)에서 지름, 둘레 그리고 지름과 둘레가 각각 주어졌을 때, 원주율 π를 $\dfrac{(\text{주법})}{(\text{경법})}$5)으로 표기하여 세 가지 계산법, 즉

$$\frac{(\text{지름})^3\times\pi^2}{16},\ \frac{(\text{둘레})^3}{16\pi}\ \text{그리고}\ \frac{\frac{(\text{둘레})\times(\text{지름})}{4}\times(\text{둘레})}{4}$$

로 서술하고 있는데, π를 3으로 하면 첫 번째와 두 번째의 계산법은 『묵사집』의 계산법과 같다. 세 번째는 대원의 넓이인 $\frac{(\text{둘레})\times(\text{지름})}{4}$을 이용하여 구의 부피를 구하는 공식이 된다. 이 세 가지의 식은 표현은 다르지만 같은 방법이다([12]).

「구일집 지」의 구척해은문(毬隻解隱門) 9문중 3문이 구의 부피를 구하는 문제로 지름과 둘레가 주어졌을 때, 「구일집 천」의 구의 부피를 구하는 계산법을 써서 원율삼가(圓率三家)[6]인 고법(古法), 휘술(徽術) 그리고 밀율(密率) 각각에 대하여 구의 부피를 구하고 있다. 그 중 고법일 경우에 다음과 같이 서술하고 있다.

「今有古立圓徑一十二尺周三十六尺問積 若干
答曰九百七十三尺
法曰置徑自再乘[7]九因得一萬五千五百五十二以十六除之
得積合問[九卽周法三自乘數十六者卽徑法一自乘十六之數]
一法置周自再乘得四萬六千六百五十六以四十八除之亦得積
[四十八卽周法三以十六之數]」

고법으로 구의 지름이 12자, 둘레가 36자일 때, 구의 부피는 얼마인가?

답 : 972자^3

풀이는 지름을 세제곱하여 15552를 얻고, 16으로 나누어 부피를 얻는다. [9는 주법3을 제곱한 수이고, 16은 경법 1을 제곱하여 16을 곱한 수이다.] 또 다른 풀이는 둘레를 세제곱하여 46656을 얻고, 48로 나누어 부피를 얻는다. [48은 주법 3에 16을 곱한 수이다.]

(1-4) 「산학본원(算學本源)」의 직방원율(直方圓率)

원율삼가에서 주어진 구의 지름 $2\frac{1}{2}$을 통분한 가분수를 고법, 휘술 그리고 밀율에 따라 $V=\frac{(\text{지름})^3\times\pi}{16}$를 써서 각각 구의 부피를 구하고, 또 삼가(三家)에

---

5) 경법(經法)과 주법(周法)은 각각 지름과 둘레의 비율(數)이다.

6) 원율삼가(圓率三家)는 고법(古法, $\pi=3$), 휘술(徽術, $\pi=\frac{157}{50}$) 그리고 밀율(密率, $\pi=\frac{22}{7}$)이라 하였고, 구장산술의 방전장, 묵사집(천)의 포산선습문, 구일집의 범례의 명석원법(明釋圓法) 등에서 원율삼가를 구분하여 사용하고 있는 반면, 수서(隋書)의 율력지에서 조충지는 밀율($\frac{355}{113}$), 약율($\frac{22}{7}$)을 사용하고 있다.

7) 자재승(自再乘), 재자승(再自乘)은 세제곱이다.

따라 주어진 지름 $2\frac{1}{2}$에서 각각 얻어진 둘레로써 $V=\frac{(\text{둘레})^3}{16\pi}$을 써서 각각 구의 부피를 구한다.

조충지원산은 원율삼가와는 다르게, 원주율을 제1밀법(본수) 3.14159265(지름 1), 제2밀율(준수) $\frac{355}{113}$(지름 113, 둘레 355), 그리고 제3약율(약수) $\frac{22}{7}$(지름 7, 둘레 22)로 하여 각각에 따라 구의 부피 정율과 정육면체의 부피 정율을 제시하였다. 따라서 지름이 1자일 때, 구의 부피 정율을 알면 모든 구의 부피를 구할 수 있다.

(1) 원율삼가 중 휘술을 사용하여 지름이 $2\frac{1}{2}$일 때와 그 둘레로써 구의 부피를 각각 구하면 다음과 같다.

① 구의 지름으로 부피 구하기(立徑求積)[8]

휘술(徽術) …… 구의 부피 $9\frac{1609}{2560}$자^3

「徑通內五再自之一百二十五二萬四千六百四十九之三百空八萬一一二五以分母再乘八乘四萬段得三十二萬而一餘角一百二十五約之」

지름을 통분하여 분자 5를 세제곱하면 125이고, 24649를 곱하면 3081125이다. 분모를 세제곱한 8을 40000배 하면 320000을 얻고, 이 수로 나누어 분모분자 각각을 125로 약분한다.

② 구의 둘레로 부피 구하기(立周求積)[9]

휘술 …… 구의 부피 $9\frac{1609}{2560}$자^3(구의 둘레는 $7\frac{17}{20}$자)

「周通內一百五十七再自之三百八十六萬九八九三二十五之九千六百七十四萬七三二五又分母再乘八千乘一千二百五十六段得一千空空四萬八千而一餘各三千九百二十五約之」

둘레를 통분하여 분자 157을 세제곱하면 3869893이고, 25를 곱하면 96747325이다. 또 분모를 세제곱한 수 8000을 1256배 하면 10048000을 얻고, 이 수로 나누어 분모 분자를 각각 3925로 약분한다.

(2) 조충지원산(祖冲之 圓算)

가) 「(古圓[10]徽圓[11]徑周平立積相之率今不須追煩改正
只用祖氏法列其相求之率而球積一款另依精蘊[12]如左)如以周徑求立球積則周徑各再乘

---

8) $V=\frac{(\text{지름})^3\times\pi^2}{16}$

9) $V=\frac{(\text{둘레})^3}{16\pi}$

10) 고원(高原)은 고법에 따른 원

11) 휘원(徽圓)은 휘술에 따른 원

12) 정온(精蘊)은 『수리정온(數理精蘊), 1723 인데 청나라 강희(康熙, 1654~1722)제 시대에 계획하여 옹정(雍正) 원년(1723)에 완성된 천문, 음률, 역법, 수학 등에 관한 3부작인 율력연원(律曆淵源) 중 수학책 총 53권으로 당시의 중국 및 서양 수학을 수록한 책이다.

以球積定率[13]乘之以方積定率[14]除之卽其所求以積求周徑反用」

(고원과 휘원에서 지름, 둘레, 넓이 및 구의 부피를 구할 때, 고법과 휘술에 따라 번거롭게 고칠 필요 없이, 다만 구하는 비율(본수, 준수, 약수)과 구의 부피는 조씨의 법에 따라 수리정온에서 다음과 같이 서술하고 있다.)

둘레나 지름으로 구의 부피를 구할 때는 둘레와 지름을 각각 세제곱 하고, 구의 부피의 정율을 곱하여 정육면체 부피의 정율로 나눈다. 구의 부피로써 둘레나 지름을 구할 때는 그 역의 방법으로 한다.

○ 第一密法(本數)

「[凡一尺十寸平方則百寸立方則千寸其寸分以下並滂此凡乘與除相反自乘與開平方相反再乘與開立方相反]平徑一尺[自乘平方]」

○제1밀법(본수)

무릇 1자는 10제곱치, 즉 100이다. 세제곱, 즉, 1000치이다. 그 치푼 이하 아울러 모두 이와 같이 한다. 무릇 곱셈과 나눗셈, 제곱과 제곱근 그리고 세제곱과 세제곱근은 각각 역의 관계이다.

「立徑一尺[再乘立方]球積定率五百二十三寸五九八七七五方積定率一千寸[立方卽一尺十寸再乘者]立周三尺一四一五九二六五[再乘立方]球積定率五百二十三寸五九八七七五方積定率三萬一千空空六寸二七六五七四空一空三空二八六空九三四六二五[立方]」

지름이 1자[세제곱]일 때 구의 부피정율은 523치 598775, 정육면체의 부피정율은 1000치[세제곱, 즉 1자 10치의 세제곱], 둘레가 3자 14159265[세제곱]일 때 구의 부피정율은 523치 598775, 정육면체의 부피정율은 31006치 276574010302860934625[세제곱]이다.

○ 第二密率(準數)

「精蘊求立圓體積先求平圓面積乘徑爲長圓體積[15]二因二歸[16]得所求此新率也又求立圓外面皮積[17]以周與徑相乘卽得」

○제2밀율(준수)

「수리정온」에서 구의 부피를 구할 때, 먼저 원의 넓이를 구하고, 지름을 곱하여 원기둥의 부피로 하고, 2배 하여 3으로 나누어 새 비율을 얻는다. 또 구의 겉

13) 구적정율(球積定率)은 $\frac{4}{3}\pi(\text{반지름})^3$이다.

14) 방적정율(方積定率)은 원지름(또는 원둘레)을 세제곱한 것이다. 이때, 원주율 π는 조충지원산의 밀법, 밀율, 약율이다.

15) 장원체(長圓體)는 원기둥에 해당된다.

16) '二因二歸'는 '二因三歸'의 오자로 구의 부피는 외접원기둥의 $\frac{2}{3}$이므로 2가 아니라 3으로 나누어야 한다.

17) 외면피적(外面皮積)은 겉넓이이다.

넓이를 구하려면 둘레와 지름을 서로 곱하면 된다.

「立徑一百一十三尺[再乘立方]球積定率七十五萬五千四百九十九尺一百六十七寸方積定率一百四十四萬二千八百九十七尺[立方]立周三百五十五尺[再乘立方]球積定率七十五萬五千四百九十九尺一百六十七寸方積定率四千四百七十三萬八千八百七十五尺[立方]」

지름이 113자[세제곱]일 때 구의 부피정율은 755499자 167치, 정육면체의 부피정율은 1442897자[세제곱], 둘레가 355자[세제곱]일 때 구의 부피정율은 755499자 167치, 정육면체의 부피정율은 44738875자[세제곱]이다.

○ 第三約率(約數)

「立徑七尺[再乘立方]球積定率一百七十九尺六百六十七寸方積定率三百四十三尺[立方]立周二十二尺[再乘立方]球積定率一百七十九尺六百六十七寸方積定率一萬空六百四十八尺[立方]」

지름이 7자[세제곱]일 때 구의 부피정율은 179자 667치, 정육면체의 부피정율을 343자[세제곱], 둘레가 22자[세제곱]일 때 구의 부피정율 179자 667치, 정육면체의 부피정율은 10648자[세제곱]이다.

이상을 요약하면, 구의 지름과 둘레에 대하여 구의 부피 정율과 정육면체의 부피 정율은 다음 표와 같다.

구분 법•율	구의 지름 (세제곱입방)	구의부피 정율(입방)	정육면체의 부피 정율(입방)	구의 둘레 (세제곱 입방)	구의 부피 정율 (입방)	정육면체의 부피 정율(입방)
밀법	1자	523치 598775	1000치	3자 14159265	523치 598775	31006치 27657401030286 0934625
밀율	113자	755499자 167치	1442897자	355자	755499자 167치	44738875자
약율	7자	179자 667치	343치	22자	179자 667치	10648자

나) 조충지원산에서 밀법은 원율삼가에 비해 정밀한 값임을 다음과 같이 서술하고 있다.

「宋末南徐州從事祖冲之更開密法以圓徑一億爲一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒[18]七忽朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒[19]六忽正數在盈朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約率圓徑七周二十二又設開差冪開差立廉[20]以正負參之指要精密算氏之最者也」

남북조시대 유유(劉裕)가 세운 송나라(420~472) 말에 남서주의 종사로 있던 조충지가 다시 밀법을 만들었다. 원의 지름 1억을 1장으로 할 때, 큰 수(盈數)는 3장 1자 4치 1푼 5리 9호 2사 7홀과 작은 수(朒數)는 3장 1자 4치 1푼 5리 9호 2

18) 秒는 絲의 오자임

19) 秒는 絲의 오자임

20) 개차멱, 개차입염(開差冪, 開差立廉)은 제곱근과 세제곱근이다.

사 6홀로 정확한 수는 이 두 수 사이에 있다. 밀율은 원의 지름이 113일 때 원의 둘레가 355의 비율이며, 약율은 원의 지름이 7일 때 원의 둘레가 22의 비율로써 제곱근과 세제곱근 하여 양의 값을 취하면 조충지의 밀법이 가장 정밀한 것이다.

「按密法者祖氏立數之本也 盈朒所爭止一忽 今幷二限而半之取中數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒[21]六忽半 斯所謂圓周正數者 惟密率就密法相準而立成當用之率 試以徑除周則得三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒[22]九忽二微[23]用課密法止較忽微依此推求卽密法在其中矣若其約率則雖亦本乎密法而從近就約擧略取捷用課密法至差分厘其於密法相距稍遠」

밀법을 고찰하면, 조씨가 만든 수이다. 큰 수와 작은 수는 1홀에서 결정되어 상한과 하한을 합하여 2로 나누어 그 중간수를 취하면 3장 1자 4치 1푼 5리 9호 2사 6홀 반이다. 이것이 소위 정수(正數)이다. 밀율은 밀법에 준하여 쓰는 비율로 시험삼아 지름으로 둘레를 나누면 3장 1자 4치 1푼 5리 9호 2사 9홀 2미를 얻어 밀법과 비교하면, 홀, 미에서 차이가 있어 곧 밀법이 그 가운데 있다. 약율은 역시 본(本)이 밀율이라고는 하나, 근사값을 취하여 간략하게 한 것이다. 밀법과 비교하면 푼, 리에서 차이가 생겨 밀법과는 상당히 거리가 멀다.

「按古徽密三家立率各異故面積亦異而其求球積尤謬當據精蘊先求面積乘徑二因三歸之術並正之使與平立二方積相準比例而圓之平面球體瞭然矣尙何段數之拘哉」

고법, 휘술, 밀율의 원율 3가의 비율이 각각 다르므로 넓이 역시 다르고, 구의 부리를 구하면 오차가 더욱 크다. 당연히 「수리정온」에 근거하여 먼저 원의 넓이를 구하고 지름을 곱하여 2배 하고 3으로 나누는 법과 더불어, 넓이와 부피를 비례에 준하여 계산하면 원의 넓이와 부피를 정확하게 계산하는데 조금도 문제가 없다.

(1-5)「주해수용(籌解需用)」

(1) 당귀결(撞歸訣)

「立圓徑求積再自乘又九因十六除(再自乘爲立方體是立方內容立圓以平圓率各自乘爲體率)」

구의 부피는 지름을 세제곱 하고 9를 곱해 16으로 나누어 구한다.(세제곱은 정육면체이고, 그 내접한 구는 정사각형과 원의 비율(방율 4, 원율 3)을 각각 제곱하여 부피율로 삼는다.)

(2)체적법(體積法)

「體積者物之有長有廣兼有高厚之形也長一尺廣一尺高一尺謂之積一尺正方形[24]如斗

21) 秒는 絲의 오자임

22) 秒는 絲의 오자임

23) 三丈一尺四寸一分五厘九毫二絲九忽二微(3.14159292)는 $\dfrac{355}{115}$ 를 계산한 수이다.

24) 정방형(正方形)은 정육면체이다.

是也長方形[25]如升是也正圓形[26]如球是也長圓形[27]如竹筒是也」

부피를 지닌 것은 길이, 너비 그리고 높이가 있는 두꺼운 모양이다. 길이 1자, 너비 1자, 높이 1자는 부피가 1자인 정육면체로 1말의 용기와 같다. 직육면체는 1되의 용기와 같다. 정원형은 구와 같고, 장원형은 죽통과 같다.

「正圓體徑一十六尺問積幾何

答曰二千三百四尺

術曰徑再自乘又以九因之得三萬六千八百六十四尺以一十六除之(先以一十六自乘一十六得二百五十六再以一十六乘二百五十六得四千○八[28]十六又九因之得三萬六千八百六十四乃以十六除之合所答)」

구의 지름이 16자이면 부피는 얼마인가?

답 : 2304자^3

풀이는 지름을 세제곱 하고 9를 곱하여 36864자를 얻어 16으로 나눈다(먼저 16을 제곱하여 256을 얻고, 다시 16을 곱하여 4096을 얻는다. 9를 곱하여 36864를 얻고 16으로 나누면 된다.)

<분석> 구의 부피공식은 『구장산술』의 산법을 근거로 한 것으로 그 공식을 외우기 쉽도록 하기 위하여 시 또는 노래 형식으로 만든 당귀결(撞歸訣)로 표현하고 있다. 체적법에서 부피를 가지는 입체는 정육면체, 직육면체, 구 그리고 원기둥으로 분류하며, 그 중에서 구의 부피를 구하는 계산법은 『구장산술』의 방법으로 서술하고 있다.

(1-6) 『동산초(東算抄)』([1])과 『주학실용(籌學實用)』([9])

『동산초』의 구척해은문(毬隻解隱門)에서 지름이 주어졌을 때 휘술로, 둘레가 주어졌을 때 밀율로 각각 구의 부피를 구하고 있는데, 이 또한 『구일집 지』의 구척해은문 9문에서 서술된 내용과 동일하다. 『주학실용』의 체적법은 『주해수용』의 체적법을 인용한 것뿐이다.

(1-7)『산학정의 상편(算學正義 上篇)』의 각체율(各體率)

「今有圓球徑四尺五寸二分問積幾何

答曰四十八尺三百五十一寸九百四十七分弱[29]」

구의 지름이 4자 5치 2푼이면 부피는 얼마인가?

답 : 48자 351치 947푼 약이다.

---

25) 장방형(長方形)은 직육면체이다.
26) 정원형(正圓形)은 구이다.
27) 장원형(長圓形)은 죽통과 같은 모양(원기둥)이다.
28) '八'字는 九字의 오자이다.
29) 약(弱)은 내림을 의미한다.

「法用密率置球徑以三百五十五乘之以一百十三除之得周十四尺二寸仍與徑相乘得六十四尺十八寸四十分爲外面積[30](球體外面積原爲同徑之平圓面積四倍而平圓面以半徑半周相乘得積今以全徑全周相乘故爲四倍)仍與半徑相乘三歸得積(球體自中心剖作屢百億尖體則皆以半徑爲高外面積爲其底面而故用尖體法求積也)
又法以半徑半周相乘得圓面積十六尺單[31]四寸六十分仍以徑乘之得七十二尺五百二十七寸九百二十分爲立圓體[32]積二因三歸得積(球體原爲立圓體三分之二)」

풀이는 밀율[33]을 사용하여 구의 지름에 355를 곱하여 113을 나누면 원둘레 14자 2치를 얻고, 이에 지름을 서로 곱하여 64자 18치 40푼을 얻어 겉넓이가 된다.(구의 겉넓이는 원래 지름이 같은 원넓이의 4배이다. 그리고 평면의 원넓이는 반지름과 원둘레의 반을 서로 곱하여 얻는다. 곧 지름과 원둘레를 곱하므로 원넓이의 4배가 된다.) 이에 반지름을 서로 곱하여 3으로 나누면 부피를 얻는다.(구의 부피는 중심으로부터 나누면 수백억 개의 각뿔이 만들어져 곧 모두 다 반지름은 높이이고 겉넓이는 그 밑면의 넓이이므로 각뿔의 풀이법을 이용하여 부피를 구한다. 또 다른 풀이는 반지름과 원둘레의 반을 서로 곱하여 원의 넓이 16자 04치 60푼을 얻어 이에 지름을 곱하여 72자 527치 920푼을 얻어 원기둥의 부피가 되고, 2를 곱하고 3으로 나누면 부피를 얻는다.(원래의 구의 부피는 원기둥 부피의 $\frac{2}{3}$이다.)

<분석>① $l=\pi d=\dfrac{355}{113}\times 4.25=14.2$ (단, π는 조충지원산의 제2밀율)

② 구의 겉넓이 $S_{구}=dl=4.25\times 14.2=64.1840$

③ 구의 부피 $V=(S_{구})\times\dfrac{d}{2}\times\dfrac{1}{3}=64.1840\times\dfrac{4.52}{6}=48.351947$(약)

본 풀이의 보충설명한 부분에서 구(球)는 중심으로부터 수백억 개의 각뿔(尖體)로 나타낼 수 있으므로 모든 각뿔의 높이는 구의 반지름이고 각각 밑넓이가 구의 수백억 개로 쪼갠 조각의 넓이이므로 이 밑넓이의 합은 구의 겉넓이와 같게 된다([7] 구장술해의 원면적도설(圓面積 圖說)).

이것은 구의 부피를 각뿔의 부피 합의 극한으로 계산한 것이다.

별해로 원의 넓이

$$S_{원}=\frac{d}{2}\cdot\frac{l}{2}=\frac{4.52}{2}\times\frac{14.2}{2}=16.046$$

이고, 원기둥 부피

$$V_{원기둥}=16.046\times 4.52=72.527920\text{이다.}$$

따라서,

30) 외면적(外面的)은 겉넓이이다.
31) 단(單)은 자리수로 1단이 1의 자리를 말한다.
32) 입원체(立圓體)는 원기둥이다.
33) 밀율은 조충지원산의 제2밀율이다.

$$V = (V_{\text{원기둥}}) \times \frac{2}{3} = 72.527920 \times \frac{2}{3} = 48.351947(\text{약})\text{이다.}$$

2. 한국, 중국 수학교과서의 구의 부피에 대한 산법

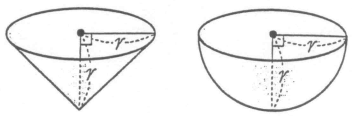
(2-1) 한국 「중학수학 7-나」

구의 부피와 겉넓이

구의 부피를 구할 수 있다.

탐구활동	밑면이 합동인 원뿔, 반구 모양의 용기, 모래

오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 같은 원뿔과 반구 모양의 용기를 각각 준비한 후 다음 물음에 답하여 보자.



(1) 원뿔 모양의 용기에 모래를 가득 담은 다음 반구 모양의 용기에 가득 차도록 부어 보아라. 몇 번 부으면 모래가 가득 차는가?

(2) 반구 모양의 용기의 부피는 원뿔 모양의 용기의 부피의 약 몇 배인가?

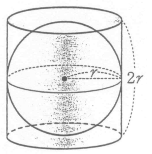
위의 탐구 활동을 통하여 반구의 부피는 원뿔의 부피의 약 2배임을 알 수 있다. 일반적으로, 밑면인 원의 반지름의 길이와 높이가 같은 반구와 원뿔에서 반구의 부피는 원뿔의 부피의 2배임이 알려져 있다. 따라서 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= 2\times(\text{반구의 부피}) \\ &= 2\times\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\times\pi r^2\times r\right)\right\} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 부피 : 반지름의 길이가 r인 구의 부피를 V라고 하면 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

문제 2 오른쪽 그림과 같은 밑면인 원의 지름의 길이와 높이가 같은 원기둥 안에 반지름의 길이가 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이와 같은 구가 들어 있다. 원기둥과 구의 부피를 구하여 비교하여라.



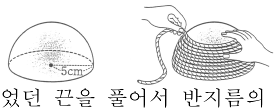
(원기둥의 부피)
=(밑넓이)×(높이)
(구의 부피)
$=\frac{4}{3}\times\pi\times(\text{반지름의 길이})^3$

구의 겉넓이를 구할 수 있다.

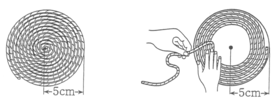
탐구활동	반지름의 길이가 5cm인 반구, 끈

반지름의 길이가 5cm인 반구와 끈을 가지고 다음 순서에 따라 활동하여 보자.

(1) 끈으로 반구를 덮어보아라.



(2) 반구를 덮었던 끈을 풀어서 반지름의 길이가 5cm인 두 원 안을 빈틈없이 채워 보아라.



(3) (1), (2)로부터 알 수 있는 사실을 말하여 보아라.

위의 탐구 활동을 통하여, 반지름의 길이가 r인 밑면을 제외한 반구의 겉넓이는 반지름의 길이가 r인 원의 넓이의 약 2배가 됨을 알 수 있다.

일반적으로, 반지름의 길이가 r인 반구에서 밑면을 제외한 겉넓이는 반지름의 길이가 r인 원의 넓이의 2배임이 알려져 있다. 따라서 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이 S는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= 2\times(\text{반구의 겉넓이}) \\ &= 2\times\{2\times(\text{원의 넓이})\} \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 겉넓이 : 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이를 S라고 하면 $S=4\pi r^2$이다.

(2-2) 중국고급중학교 「立体几何(입체기하)」

现在, 我们来求半经为R的球的表面积。

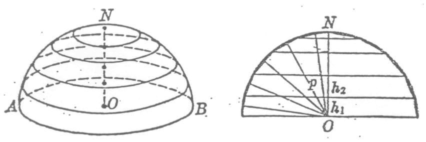


图 2-48

如图2-48, 将半球面上的半大圆ANB分成$2n$等分, 用过各分点平行于半球大圆面的平面将半球分为n部分, 以截得的圆为底作圆台, 圆锥, 设它们的高分别是h_1, h_2, $\cdots$, h_n. 球心到它们的母线的距离都为 p. 根据上面的预备定理, 这些圆台, 圆锥的侧面积的和为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi p h_1 + 2\pi p h_2 + \cdots + 2\pi p h_n \\ &= 2\pi p(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) \\ &= 2\pi p \cdot ON \\ &= 2\pi p R. \end{aligned}$$

如果分点无限增加, 侧面就无限地接近于半球面, 同时 p也无限地接近于 R. 当 p变为R时, 侧面积的和S变为$2\pi R^2$, 我们把这个和作为半球面的面积. 由此得到下面的定理 :

定理 球面面积等于它的大圆面积的4倍.

即 $$\boxed{S_{\text{球面}} = 4\pi R^2}$$

例3 已知：圆柱的底面直经与高都等于球的直经. 求征：(1) 球的表面积等于圆柱的侧面积; (2) 球的表面积等于圆柱全面积的$\frac{2}{3}$.

证明：(1) 设球的半经为R, 则圆柱的底面半经为R, 高为$2R$, 得

$$S_{球}=4\pi R^2,\ S_{圆柱侧}=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2.\ \therefore S_{球}=S_{圆柱侧}$$

(2) $\because S_{圆柱全}=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2,\quad S_{球}=4\pi R^2,$

$$\therefore S_{球}=\frac{2}{3}S_{圆柱全}$$

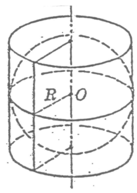


图 2-49

이제 반지름이 R인 구의 겉넓이를 구해보자. 그림 2-48에서와 같이 반구면 위의 대원의 반 ANB를 $2n$등분 하고, 각 등분점을 지나며 반구의 대원면에 평행되는 평면들로 반구를 n개의 부분으로 나눈 다음, 잘라서 생긴 원을 밑면으로 하여 원뿔대와 원뿔을 만든다. 그 높이를 각각 $h_1,\ h_2,\cdots,h_n$ 이라고 하고, 구의 중심으로부터 이 입체들의 모선까지의 거리를 모두 p라고 하면, 위의 예비정리에 의하여 원뿔대와 원뿔의 겉넓이의 합은

$$\begin{aligned} S &= 2\pi ph_1+2\pi ph_2+\cdots+2\pi ph_n \\ &= 2\pi p(h_1+h_2+\cdots+h_n) \\ &= 2\pi p\cdot\overline{ON} \\ &= 2\pi pR. \end{aligned}$$

만일 등분점을 무한히 증가시키면 옆면이 반구면에 무한히 접근하며, 동시에 p도 R에 무한히 접근한다. p가 R로 변할 때, 옆넓이의 합 S는 $2\pi R^2$으로 변한다. 우리는 이 합을 반구면의 넓이라 한다. 따라서 아래의 정리를 얻는다.

정리：구면의 넓이는 그 대원의 넓이의 4배와 같다.

$$\boxed{S_{구면}=4\pi R^2}$$

예 3. 조건：원기둥의 밑면의 지름과 높이가 모두 다 구의 지름과 같다.

결론：(1) 구의 겉넓이는 원기둥의 옆넓이와 같다.

(2) 구의 겉넓이는 원기둥의 겉넓이의 $\frac{2}{3}$와 같다.

증명：(1) 구의 반지름을 R이라고 하면, 원기둥의 밑면의 반지름은 R, 높이는 $2R$이므로

$$S_{구}=4\pi R^2,\ S_{원기둥의\ 옆면}=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2.$$

$$\therefore S_{球}=S_{원기둥의\ 옆면}$$

(2) $\because S_{원기둥의\ 겉면}=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2,\quad S_{구}=4\pi R^2,$

$$\therefore S_{구}=\frac{2}{3}S_{원기둥의\ 겉면}$$

球的体积

和柱体，锥体一样，也可以应用祖暅原理推出球体的体积公式.

我们先研究半经为R的半球. 为了应用祖暅原理， 需要找到一个能够求体积的几何体，使它和半球可夹在两个平行平面之间， 当用平行于这两个平面的任意一个平面去截它们时，截得的截面面积总相等.

为此，我们取一个底面半经和高都等于R的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体和半球放在同一个平面α上(图2-67). 因为圆柱的高等于R，所以这个几何体和半球都夹在两个平行平面之间.

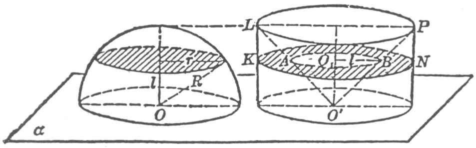


图 2-67

用平行于平面α的任意一个平面去截这两个几何体，截面分别是圆面和圆环面. 如果截平面与平面α的距离为l，那么圆面半经 $r=\sqrt{R^2-l^2}$，圆环面的大圆半经为R，小圆半经为l(因为$\triangle O'O_1B$是等腰三角形). 因此

$$S_{圆}=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)$$

$$S_{圆环}=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$$

$$\therefore S_{圆}=S_{圆环}$$

根据祖暅原理，这两个几何体的体积相等，即

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3$$

所以 $$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

由此，我们得到下面定理：

定理 如果球的半经是R，那么它的体积是

$$\boxed{V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

구의 부피

기둥, 뿔에서와 같이 조궁의 원리([8])를 이용하여 구의 부피의 공식을 유도할 수 있다. 먼저 반지름이 R인 반구를 연구하여 보자. 조긍의 원리를 이용하기 위해서는 부피를 구할 수 있는 입체를 찾아야 한다. 즉, 그 입체와 반구가 두 평행평면사이에 있게 할 수 있으며, 그 입체와 반구를 그 두 평면에 평행인 임의의 평면으로 잘라서 얻은 두 단면의 넓이가 모두 서로 같게 되는 그러한 입체를 찾

아야 한다. 그러하기 위해 밑면의 반지름과 높이가 모두 R인 원기둥을 취하고, 원기둥 속에서 그 원기둥의 위 밑면을 밑변으로 하고 아래 밑면의 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 원뿔을 파낸 다음, 얻은 입체와 반구를 한 평면 α 위에 놓는다(그림 2-67). 원기둥의 높이가 R이므로 그 입체와 반구는 모두 두 개의 평행하는 평면사이에 있다. 평면 α에 평행인 임의의 한 평면으로 이 두 입체를 잘랐을 때 생기는 단면은 각각 원면과 원환면이다. 단면에서 평면 α까지의 거리를 l이라고 하면, 원면의 반지름 $r=\sqrt{R^2-l^2}$이고, 원환면의 큰 원의 반지름 R, 작은 원의 반지름은 l이다($\triangle O'O_1B$가 이등변삼각형이므로). 그러므로

$$S_{원}=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)$$
$$S_{원환}=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$$
$$\therefore S_{원}=S_{원환}$$

조긍의 원리에 의하여 이 두 입체의 부피는 서로 같다. 즉,

$$\frac{1}{2}V_{구}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3$$

그러므로 $V_{구}=\frac{4}{3}\pi R^3$이다.

이리하여 아래와 같은 정리를 얻는다.

정리 : 만일 구의 반지름이 R이면 그 부피는 다음과 같다.

$$\boxed{V_{구}=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

<분석> 한국 중학수학 교과서([2])에서는 탐구활동을 통해서 반구의 부피가 원뿔의 부피의 약 2배임을 알 수 있고, 구의 부피가 $\frac{4}{3}\pi r^3$임을 보였다. 반지름 r인 밑면을 제외한 반구의 겉넓이는 반지름 r인 원의 넓이의 약 2배임을 알고 구의 넓이가 $4\pi r^2$이 됨을 서술하고 있으나, 탐구활동이 지닌 실행상의 문제점은 있다. 또한, 구의 부피와 겉넓이와 관계를 서술하지 않은 것은 중학교 교육과정에서 무한개념을 도입하지 않기 때문이다. 다만, 구의 부피와 원기둥 부피와의 비율에 대한 문제를 제시하고 있다.

중국수학교과서([14], 고등학교 1학년)에서 극한 개념을 써서 구의 겉넓이를 구하는 공식을 유도하고, 구의 겉넓이가 그에 외접한 원기둥의 겉넓이의 $\frac{2}{3}$배임을 보였다. 그러나 구와 원기둥의 부피에 대한 상호관계는 서술되어 있지 않다. 또한, 조긍의 원리를 이용하여 구의 부피 공식을 유도하였으나, 구의 겉넓이 또는 원기둥의 부피를 이용하여 구의 부피를 구하는 계산법은 언급하고 있지 않다.

Ⅲ. 결론 및 제언

1. 산학서에서 구(球)에 대한 용어

입원(立圓)	구장산술, 구장술해, 묵사집, 구일집, 동산초, 주해실용, 수리정온
구(球), 구체(球體)	구장술해, 산학본원, 산학정의(입원체는 원기둥이다.)
환(丸)	구장산술, 구장술해
입구(立球)	산학본원
정원체(正圓體) 정원형(正圓形)	주학실용, 주해수용

2. 『구장산술』의 소광장에서 구의 부피가 주어지고 그 지름을 구할 때, 방율과 원율의 비를 써서 구의 부피를 $\frac{9}{16}\times(\text{지름})^3$으로 하여, 지름이 $\sqrt[3]{\frac{16}{9}\times(\text{부피})}$이 됨을 보였다. 남병길의 『구장술해』에서 이 문제의 보충설명은 구의 부피와 겉넓이가 각각 $\frac{(\text{지름})^3}{2}$과 $3\times(\text{지름})^2$임을 알고 지름이 $\sqrt[3]{2\times(\text{부피})}$가 됨을 보였는데 큰 차이가 있다. 이것은 방율과 원율의 비 $4:3$에서 $4^2:3^2=16:9$로 부피의 비로 하는 데 따른 오류이다.

유휘는 원주율을 3으로 하면 원의 넓이가 너무 작고, 원기둥을 구의 비율로 하면 구의 부피가 너무 커서 $9:16$으로 했지만 역시 크다. 따라서 정확한 구의 부피를 얻기 위해 모합방개란 새로운 입체를 구상하였으나 부피를 구하지 못했다. 조충지 부자에 이르러 모합방개의 부피가 밝혀졌다. 조부자의 방법 1에 의해 모합방개의 부피의 $\frac{1}{8}$은 정육면체의 부피에서 정사각뿔의 부피를 뺀 것이고, 방법 2에 따라 구의 부피는 모합방개의 부피의 $\frac{\pi}{4}$가 되어 구의 부피를 얻게 되었다([10] 재인용).

『묵사집 산법』에서 구의 부피가 $\frac{(\text{둘레})^3}{48}$으로 서술하고 있으나, 고법일 경우 『구장산술』의 부피공식 $\frac{9}{16}\times(\text{지름})^3$과 같다. 『구일집 천』에서는 원주율을 $\frac{(\text{주법})}{(\text{경법})}$으로 표기하여 세가지 계산법으로 구의 부피를 구하고 있는데, 그 중 $\frac{(\text{지름})^3\times\pi^2}{16}$과 $\frac{(\text{둘레})^3}{16\pi}$은 『구장산술』의 구의 부피 계산법과 같고

$\dfrac{\dfrac{(\text{둘레})\times(\text{지름})}{4}\times(\text{둘레})}{4}$ 는 먼저 대원의 넓이를 구한 후 구의 부피를 계산하는 공식이 되어 모두 표현방법은 다르지만 같은 방법이다. 「구일집 지」는 9문 중 3문이 구의 부피 문제로 『구일집 천』에서 서술한 계산법으로 원율삼가에 따라 각각 부피를 구하고 있다. 「산학본원」에서도 「구일집 천」에 서술한 첫 번째와 두 번째 계산법을 써서 원율삼가와 조충지원산에 따라 각각 구의 부피를 구하고 있는데, 원율삼가와 조충지원산과의 크기 즉,

$$\text{고법}(3) < \text{휘술}\left(\frac{157}{50}\right) < \text{밀법}(3.14159265) < \text{밀율}\left(\frac{355}{133}\right) < \text{약율}\left(\frac{22}{7}\right)$$

에서, 밀법은 큰수 3.1415927과 작은수 3.1415926의 평균값으로 취하고 있는데, 큰 수와 작은 수가 어떻게 산출되었는지에 대한 언급은 없고, 밀법일 경우 지름 1자인 구의 부피는 527치 598775가 되어 이것을 구의 부피 정율로 삼았다. 이 때의 구의 부피가 가장 정밀한 값으로 보고 있다. 산학서에서 사용하고 있는 원율삼가의 밀율은 조충지원산의 약율이므로 밀율과 약율이 혼용되지 않도록 명확하게 기술되어야 한다.

「산학정의」에서 구의 겉넓이는 원의 넓이의 4배이고, 구의 부피가 그 외접한 원기둥의 부피의 $\dfrac{2}{3}$임을 알고, 주어진 지름에서 구의 부피를 구할 때 극한 개념을 도입하고, 조충지원산의 밀율을 써서

$$\frac{(\text{겉넓이})\times(\text{반지름})}{3} \text{ 과 } \frac{2}{3}\times(\text{원기둥의 부피})$$

의 공식을 서술하고 있다.

3. 중국 고등학교 수학에서는 극한 개념을 도입하여 구의 겉넓이와 구의 부피에 대한 공식을 유도하고 있는 반면에, 한국 고등학교 수학의 미분적분 영역 이외에는 구의 겉넓이와 구의 부피에 대한 내용이 언급되어 있지 않고, 다만 중학교 수학에서 탐구활동을 통하여 구의 겉넓이와 구의 부피공식을 유도하고 있으나 실행상 문제가 있다. 따라서 앞으로 고등학교 1학년 과정의 수학교과서를 편성할 때, 중학교 수학과 연계하여 극한 개념을 써서 구의 겉넓이와 부피를 계산하는 과정을 다루어야 할 필요가 있으며, 이때 조선시대의 산학자 남병길이 「산학정의」에서 서술한 구의 부피 계산법을 접목시켜 보완할 것을 제안한다.

참고문헌

[1] ?(?), 동산초(東算抄), 한국과학기술사자료대계 수학편 8, 여강출판사, 1985.
[2] 강옥기 외 2명, 수학 7-나, (주)두산, 2007.

[3] 경선징, 묵사집산법(默思集算法), 유인영・허민 역(2006). 묵사집산법(천), 교우사, 2006.
[4] 김용운・김용국(저), 중국수학사, 민음사, 1996.
[5] 남병길, 구장술해(九章術解), 한국과학기술사자료대계 수학편 6, 여강출판사, 1985.
[6] 남병길, 산학정의(算學正義), 한국과학기술사자료대계 수학편 7, 여강출판사, 1985.
[7] 박영식・최길남, 九章術解에서의 평면도형의 넓이에 대한 고찰, EAMJ 25(3)(2009), 343-378.
[8] 박영식・최길남, 각뿔과 각뿔대의 부피에 대하여 산학서(『算學正義(上篇)』, 『九章術解』)와 한국・중국 수학교과서와의 내용 비교 연구, EAMJ 26(4)(2010), 535-551.
[9] 변언정, 주학실용(籌學實用), 한국과학기술자료대계 수학편 9, 여강출판사, 1985.
[10] 장혜원, 구의 부피에 대한 수학사적 고찰 및 교수학적 함의, 한국수학사학회지, 21(3)(2008), 19-38.
[11] 홍대용, 주해수용(籌解需用), 한국과학기술사자료대계 수학편 3, 여강출판사, 1985.
[12] 홍정하, 구일집(九一集), 강신원・장혜원 역(2006), 구일집(천), 구일집(지), 교우사, 2006.
[13] 황윤석, 산학본원(算學本源), 강신원・장혜원 역(2006), 산학본원, 교우사, 2006.
[14] 人民教育出版社 中学数学室 编著, 全日制, 普通高级中学教科 书(试验体), 数学 第二册(下A), 立体几何, 1999.
[15] 곽서춘(郭書春), 구장산술(九章算術), 遼寧敎育出版社, 1990.

Park Young Sik
Department of Mathematics, University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail : yspark@mail.ulsan.ac.kr

Choi Kil Nam
Department of Mathematics, University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail : knchoi@mail.ulsan.ac.kr