East Asian Mathematical Journal
Vol. 27 (2011), No.2, pp.101-115

교과서에 제시된 반성활동의 문제점 및 그 방안

윤 대 원 · 김 동 근

ABSTRACT. Recently, for solving a math problem, and I reflect back, so much emphasis on activities which reflect the activities conducted in schools is necessary to look for. In this study, the 7th Mathematics Curriculum textbooks (10 - a, b) and 7th in mathematics and modification of curriculum textbooks (math) in the reflection type of activities that explore the resulting problems and the measures we discuss are. Therefore, textbooks reflect the type of activities were analyzed before and thinking strategies, and we will examine various types of reflective activities.

Ⅰ. 서론[1)]

1980년대 이후로 수학교육은 학생들의 문제해결력 신장에 중점을 두고 있으며, 특히 문제 해결 향상에 큰 기여를 한 Polya는 '문제의 이해→계획의 작성→계획의 실행→반성'로 문제해결 4단계를 제시하고 있다. 또한, NCTM에서 뿐만 아니라 우리나라 제7차 수학과 목표에는 문제해결력 향상에 중점을 두고 있다.

제7차 수학과 교육과정에 따라, 수학 교과서 '10-가, 10-나' 단계에서 각 단원이 끝날 때 심화문제(혹은 발전문제)를 제시하고 있으며, 교과서에 제시된 풀이 과정을 살펴보면 Polya의 문제해결 4단계에 따르고 있다. 이 4단계 중 문제해결이 성공적으로 이루어지기 위해서는 무엇보다도 계획의 수립이 중요하다는 것은 문제해결자라면 누구나 알고 있다. 하지만 최근에 들어, 수학 문제를 해결하고 난 뒤 반성활동의 중요성을 많이 강조하고 있다.

Polya는 풀이과정과 결과를 개관하고 음미해 봄으로써 오류를 발견·수정하고 문제풀이를 개선할 수 있으며, 다른 문제와의 관련성을 조사하고 적용 가능성을 생각해 보는 가운데 획득한 지식이 견고히 되고 풀이과정이 단순화되어 한눈에 알 수 있게 됨으로써 그 내적 바탕이 인식되고 사고 양식화 되어 문제를 해결하는 능력을 발달시키는 데 매우 중요한 단계로 반성활동의 단계로 보고 있으며 이 단계의 중요성을 강조하고 있다(우정호,

---

2010년 8월 8일 투고, 2011년 2월 21일 게재승인.
Math. Subject Classification : 97C30
key words : 반성활동, 문제해결

2007, p.318). 예를 들어, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $a\neq 0$)의 근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$의 의미를 살펴보면, 주어진 이차방정식이 만약 실수 범위에서 항상 근을 가지도록 하기 위해서는 이차항의 계수 a와 상수항 c의 부호는 반대이어야 한다는 것을 알 수 있고 복소수 범위에서는 항상 2개의 근을 가지고 또한, 한 근이 복소수이면 다른 한 근은 그것의 켤레 복소수가 됨을 알 수 있다. 이렇듯 단순히 이차방정식의 근의 공식을 구하는 것으로 끝나는 것이 아니라 공식의 의미를 재음미 해 보는 반성활동이 중요함을 보여주고 있다. 또한 우정호(2007, p.318)는 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식 $S=\dfrac{(a+b)h}{2}$를 $\dfrac{(a+b)}{2}\cdot h$로 볼 때의 의미와 $(a+b)\cdot\dfrac{h}{2}$로 볼 때의 의미가 달라지며, 이것은 평행사변형과 직사각형 나아가 정사각형의 넓이를 구하는 공식으로 변형되고, 극단적인 경우에는 삼각형의 넓이를 구하는 공식으로 변형되기도 하며 또한 직사각형의 넓이 구하는 공식이 직각기둥의 부피를 구하는 공식이 같은 형식으로 되어 있음을 주목하면 그 의미가 새롭게 느껴질 것이라고 제시하고 있다. 그렇다면 학교현장에서는 어떤 반성활동이 이루어지고 있는지 수학 교과서에 제시된 반성활동의 유형을 살펴볼 필요가 있다.

따라서 본 연구에서는 다양한 반성활동 전략을 논하는데 목적을 두고 있으며 이를 위해 첫째 오류를 통한 반성활동, 둘째 문제 분석을 통한 반성활동, 셋째 일반화하기, 넷째 다양한 풀이 방법 탐구, 다섯째 문제제기 등 다섯 가지 유형으로 나누어 고찰할 것이다. 이러한 다양한 반성활동은 결국 문제해결력을 보다 신장시킬 수 있을 것이다.

Ⅱ. 반성활동의 유형

이 절에서는 반성활동에 관한 선행연구를 바탕으로 네 가지의 반성활동 유형을 설정하고, 다음으로 수학교과서에 제시된 반성활동의 유형을 분석하였다.

Polya는 반성단계에서 ‘풀이 결과와 논증과정을 점검하기’, ‘다른 풀이방법을 알아보기’, ‘풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기’와 같은 사고전략을 제시하고 있다(우정호, 2007, p.317). 또한, 우정호(2007, p.321)는 어떤 문제를 푸는 데 성공하고 나면 반드시 반성단계에서 미지인 것과 자료, 조건의 역할을 바꾸거나, 일반화, 특수화, 유추 등을 통해 또는 응용상황을 고려하여 발견적으로 새로운 문제를 찾아 해결해 보도록 반성활동을 권고하고 있다.

그리고 한인기 · 꼴랴긴(2006)는 반성활동을 문제 및 풀이에 대한 고찰, 다양한 풀이 방법의 탐구, 다른 문제를 구성하고 풀기 등으로 제시하고 있으며, Shoenfeld는 문제해결의 전략 중 마지막 단계인 ‘풀이의 확인’에서 특별한 검사와 일반적인 검사 두 가지로 구분하고 이중 일반적인 검사에서 ‘그것은 다른 방법으로 얻을 수 있는가?’, ‘특별한 경우로 확인할 수 있는가?’, ‘이미 알고 있는 결과에 귀착되는가?’, ‘그것을 이미 알고 있는 것으로 일

반화 할 수 있는가?’ 등과 같이 제시하고 있다(이용률 외 3명, pp.87-88). 이처럼 ‘풀이의 확인’에서 나타난 전략은 유익한 반성활동이 될 수 있음을 나타내고 있다.

이상을 종합하여 보면, 어떤 문제를 푸는데 성공하고 나면 다양한 수학적 사고 활동을 통해 문제를 좀 더 확장시켜 보아야하고, 주어진 문제로부터 또 다른 문제를 유도한다든지 앞에서 해결한 문제의 풀이를 이용하여 쉽게 풀 수 있는 새로운 문제를 구성한다든지 조건의 일부를 변형하는 문제제기 등 다양한 반성활동의 전략을 요구하고 있다.

다음으로 제7차 수학과 교육과정과 수정 교육과정의 수학 교과서에 제시된 반성활동의 유형을 나누어 살펴보았다.

1) 제7차 수학과 교육과정-‘10-가, 10-나’ 단계에서 반성활동의 유형

‘10-가, 10-나’ 단계의 각 단원에서 Polya의 문제해결 절차 4단계를 따르고 있으며 그 중 4단계인 반성활동에는 어떤 전략이나 요소로 구성되어 있는지 살펴보면 다음과 같이 <표2-1. 10-가 단계>와 <표2-2. 10-나 단계>로 정리할 수 있다. 대부분의 교과서의 반성단계에 제시된 ‘풀이 과정을 점검’ 혹은 ‘문제의 조건에 맞는지 혹은 구한 값을 대입하여 정답을 확인’등을 검토라고 하였다.

<표2-1. 10-가 단계>

저자	단원	반성활동 유형
신현성·최용준	수와 연산	이해 및 검토-규칙성의 이해 유무 및 정답을 확인
	문자와 식	검토-계산 과정 확인 및 정답 확인
	통계	검토-구하고자 하는 식을 정확하게 적용하였는지 발문
양승갑 외 8명	집합과 명제	검토-벤 다이어그램을 보고 계산 과정을 확인
	실수와 복소수	검토-구한 값을 주어진 식과 비교하여 정답을 확인
	다항식과 그 연산	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인
	유리식과 무리식	검토-연산 과정과 계산 과정이 정확한지 확인
	방정식	검토-문제의 조건에 만족하는지 확인
	부등식	검토-문제의 조건에 만족하는지 확인
	산포도와 표준편차	검토-계산 과정이 정확한지 확인(검산)
우정호 외 3명	방정식	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인
	부등식	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인
	통계	검토-계산 과정이 바른지 확인
이강섭 외 6명	방정식	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인
	부등식	검토-구한 값이 주어진 조건에 맞는지 그래프를 통하여 확인
	산포도와 표준편차	검토-통계 처리 프로그램의 유용성
임재훈 외 7명	집합과 수의 체계	검토-계산 과정에서 틀린 데가 없는지 확인 → 문제 제기를 통해서 새로운 문제 제시(혹은 문제를 이해하였는지 새로운 문제에 적용)

	방정식과 부등식	검토- (1) 구한 값을 주어진 식과 비교하여 정답을 확인 (2) 구한 값을 이용하여 새로운 문제 상황에 적용 (직사각형의 넓이 중 최대인 것은 정사각형임을 확인)
	통계	검토-풀이 과정에 틀린 곳이 없는지 확인

10-가 단계에 있는 교과서 총9종을 살펴보았고, 그 중 5종은 위의 <표2-1>과 같은 반성활동 유형으로 정리할 수 있다. 그 반성활동 유형의 대부분은 구한 값이 정확한지 혹은 풀이 과정이 올바른지 검토하는데 그치고 있으며, 임재훈 외 7명(2002)은 '집합과 수의 체계', '방정식과 부등식', '통계' 단원의 심화과정에서 반성활동이 끝난 뒤에 문제를 잘 이해하였는지 새로운 문제에 적용하는 과제를 제시하고 있다. 또한, 임재훈 외 7명(2002, p.21)은 문제 해결 과정과 구체적인 해결 전략을 사용해야 한다고 강조하면서 마지막 단계에서 '풀이 결과와 논증 과정을 점검해 보자', '다른 풀이 방법을 알아보자', '풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보자'로 반성활동 유형을 설명하고 있다. 그리고 이강섭 외 6명(2002)은 부등식 영역에서 그래프를 통하여 확인 즉 검토하는 유형을 제시한 점이 주목할 만하다. 하지만, 나머지 4종 중 3종 즉, 박윤범 외 5명(2002), 박규홍 외 3명(2002), 박두일 외 8명(2002)은 반성활동에 대한 언급이 전혀 없으며, 최봉대 외 6명(2002, p.159)도 반성활동에 관한 내용이 전혀 없으나, 단지 문제해결력을 신장시키기 위한 단계로 마지막 단계인 반성 활동에 대해 간단하게 설명하고 있다.

<표2-2. 10-나 단계>

교과서	단원	반성 활동 유형
신현성·최용준	도형	그래프를 정확하게 그렸는지 구한 값이 정확한지 발문
	측정	식이 조건에 맞는지 확인 및 계산이 정확한지 발문
	규칙성과 함수	구한 값을 주어진 식과 비교하여 정답이 정확한지 발문
양승갑 외 8명	평면좌표와 직선의 방정식	검토-계산 과정을 확인
	원의 방정식	검토-계산 과정을 확인
	도형의 이동	검토-계산 과정을 확인
	부등식의 영역	검토-계산 과정을 확인
	함수	검토-계산 과정을 확인
	유리함수와 무리함수	검토-계산 과정이 정확한지 확인
	삼각함수와 그 그래프	검토-구하고자 하는 값과 관련된 부분들의 값이 정확한지 발문
	삼각함수의 성질	검토-계산 과정을 확인
	삼각형에의 응용	검토-계산 과정을 확인
우정호 외 3명	방정식	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인

	부등식	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인
	통계	검토-계산 과정이 바른지 확인
이강섭 외 6명	부등식의 영역	검토-구한 값을 그래프를 이용하여 정답을 확인
	삼각함수와 그 그래프	검토-구한 값을 주어진 식에 대입하여 정답을 확인
임재훈 외 7명	도형의 방정식	검토- (1) 풀이 과정을 점검 (2) 풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 다른 문제를 제기
	부등식의 영역	・검토- (1) 구한 값을 주어진 식과 비교하여 정답을 확인 (2) 풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 다른 문제를 제기 (3) 앞에서 풀었던 문제와의 관계를 확인
	통계	검토-풀이 과정에 틀린 곳이 없는지 확인

10-나 단계에 있는 교과서 총9종을 살펴보았고, 그 중 5종은 위의 <표2-2>과 같은 반성활동 유형으로 정리할 수 있다. 그 반성활동 유형의 대부분은 역시 구한 값이 정확한지 혹은 풀이 과정이 올바른지 검토하는데 그치고 있다. 하지만, 나머지 4종 즉, 박윤범 외 5명(2002), 박규홍 외 3명(2002), 박두일 외 8명(2002), 최봉대 외 6명(2002)은 역시 반성활동에 대한 언급이 전혀 없음을 알 수 있다. 그리고 이강섭 외 6명(2002)은 '부등식의 영역', '삼각함수와 그 그래프' 단원의 심화과정에서 반성활동이 끝난 뒤에 문제를 잘 이해하였는지 새로운 문제에 적용하는 과제를 제시함으로써 활동을 강조하고 있다.

2) 제7차 수정 수학과 교육과정

제7차 수정 수학과 교육과정의 고등학교 1학년 수학 교과서 및 익힘책 각각 18종, 총 36종을 분석하였다. 그 중 6종만 반성활동에 관한 내용을 다루고 있다. 먼저 김수환 외 9명(2009), 최용준 외 4명(2009), 황우형 외 10명(2009)는 교과서에서, 김수환 외 9명(2009)은 익힘책에서 각각 반성활동의 유형에 대해 다루고 있으며, 우정호 외 9명(2009)의 익힘책에서는 'What-if-not'의 전략을 소개하는 것으로만 그치고 있다.

<표3. 수학 교과서에서 반성활동의 유형>

저자 (교과서 · 익힘책)	단원	반성활동 유형
최용준 외 4명 (교과서)	실수와 복소수	문항 만들기-주어진 문제와 비슷한 문제 만들기
	유리식과 무리식	검토-여러 가지 값을 대입하여 확인
	방정식	검토-해를 구하고, 구한 해가 맞는지 확인
	부등식	검토-구한 값이 맞는지 확인
		문항 만들기-여러 가지 형태로 만들어 구하기

	평면좌표	검토-구한 값을 비교하기
	직선의 방정식	다른 방법으로 문제해결
	원의 방정식	문제를 해결하는데 이용한 문제해결 원리 설명
	도형의 이동	다른 방법으로 문제해결 및 문제 만들기
	함수	문제 만들기
	이차함수의 활용	문항 만들기
	함수	문제 만들기
	삼각함수	다른 풀이 찾기
	삼각함수의 응용	조건을 변경하여 문제 풀이
황우형 외 10명 (교과서)	수와 연산	검토-올바르게 문제를 해결하였는지 확인
		문제 만들기
	식의 계산	검토-올바르게 문제를 해결하였는지 확인
		문제 만들기
	방정식과 부등식	검토-올바르게 문제를 해결하였는지 확인
		문제 만들기
	도형의 방정식	검토-올바르게 문제를 해결하였는지 확인
		문제 만들기
	함수	검토-올바르게 문제를 해결하였는지 확인
		문제 만들기
	삼각함수	검토-올바르게 문제를 해결하였는지 확인
		문제 만들기

<표4. 익힘책에서 반성활동의 유형>

저자 (교과서 · 익힘책)	단원	반성활동 유형
김수환 외 9명 (익힘책)	방정식	검토-문제 해결 과정에서 각 단계에서 틀린 부분이 없 는지 확인
	도형이 이동	문제 만들기
	함수	검토-결과가 옳은지 검토
		다른 풀이 찾기
	삼각함수	다른 풀이 찾기 및 문제 만들기

이상을 정리하면, 수학 교과서 '10-가, 10-나' 단계의 각 단원별로 문제해결 4단계에 따라 문제해결 절차를 보여주고 있지만 그 중 마지막 단계인 반성활동을 보면 거의 대부분이 해결한 문제의 정답이 주어진 문제의 조건에 맞는지 계산과정이 맞는지 문제해결 과정을 검토하는데 그치고 있음을 알 수 있다. 또한 현재 고등학교 1학년 수학 교과서 및 익힘책에서는 교과서 3종, 익힘책 2종에서 반성활동에 대해 다루고 있으며 제7차 수학과 교육과정에서는 볼 수 없었던 문제제기를 통한 번성활동을 강조하고 있다는 점에서는 주목할 만하다. 하지만 대부분의 교과서와 익힘책에서의 반성활동은 미흡하다고 볼 수 있다.

따라서 본 연구에서는 반성활동 전략 중 기본적이고 보편적이라고 할 수 있는 검토하는 활동에서 벗어나서 첫째 오류를 통한 반성활동, 둘째 문제 분석을 통한 반성활동, 셋째

일반화하기, 넷째 다양한 풀이 방법 탐구, 문제제기로 반성활동의 유형을 설정하였다.

Ⅲ. 연구결과

이 절에서는 제7차 수학과 교육과정의 수학 10-가, 나 단계와 수정 수학과 교육과정의 교과서 및 익힘책의 내용과 관련된 다섯 가지의 반성활동 유형 즉 오류를 통한 반성활동, 문제 분석을 통한 반성활동, 일반화하기, 다양한 풀이 방법 탐구, 문제제기에 대해서 고찰할 것이다.

[유형1] 오류를 통한 반성활동

풀이 및 증명과정에 오류가 있는지를 확인 하는 것은 문제풀이 또는 증명을 형상한 후에 제일 먼저 수행해야 하는 작업이다(한인기, 2006). 문제를 해결한 뒤 문제의 정답이 주어진 문제의 조건에 맞는지 확인하는 과정은 가장 기본적이며 필수적인 요소라 할 수 있다.

문제1) $x>0,\ y>0$이고 $x+2y=3$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$의 최솟값을 구하여라.

정답1) $(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=1+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+4$

$$\geq 5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\frac{2y}{x}}=5+4=9\cdots\cdots\cdots①$$

이다. $x+2y=3$이므로 ①식의 양변에 3으로 나누면 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$의 최솟값은 3임을 알 수 있다.

다음 '정답 2'의 풀이는 교과서 '미분과 적분'에서 '함수의 몫의 미분법'을 학습한 학생이라면 아래와 같이 문제를 해결 할 수 있을 것이다. 특히, '함수의 몫의 미분법'을 배울 때 '문제 1'과 같이 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제의 유형은 '정답 1'과 같이 풀어보는 것도 다양한 풀이 방법의 탐구로서 중요하다고 볼 수 있다.

정답2) $x+2y=3$을 x에 관한 식으로 정리하면 $x=-2y+3$을 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$에 대입하여 식을 정리하면

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{-2y+3}+\frac{2}{y}=\frac{y-4y+6}{y(-2y+3)}=\frac{-3y+6}{-2y^2+3y}$$

이므로 $\frac{-3y+6}{-2y^2+3y}$을 미분하면 $\frac{-3(-2y^2+3y)-(-3y+6)(-4y+3)}{(\ -2y^2+3y)^2}$ 이고 $y=1,\ y=3$일 때 극값을 가진다. 하지만 $y=3$일 때 $x=-3$이 되어 주어진 조건 $x>0$에 만족하지 않으므로 $y=1$일 때 $x=1$이다. 따라서 이 값을 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$에 대입하면 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3$되어 최솟값은 3이다.

현재 학생들이 문제해결에서 많은 오류를 범하는 내용 중의 하나가 산술·기하평균에 관한 내용이다. 실제로 학생들은 '문제 1'의 풀이를 아래와 같이 하는 경우가 많다.

오답풀이) 산술·기하평균에 의해서

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\frac{2}{y}} \cdots\cdots\cdots ②$$

이고 등호가 성립할 때 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$ 즉, $y=2x$이므로 이것을 $x+2y=3$에 대입하면 $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{6}{5}$이므로 이것을 ②식의 우변에 대입하면 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{5}{3}\frac{2\cdot 5}{6}}=2\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$이므로 따라서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$의 최솟값은 $\frac{10}{3}$이다.

'문제 1'을 해결한 후 구한 정답이 맞는지, 계산과정에 오류가 없는지, 주어진 조건을 만족하는지 확인해 보아야 한다. 위 문제 1의 주어진 조건 $x>0$, $y>0$이고 $x+2y=3$에서 $x=1$, $y=1$을 대입하여 보면 최솟값이라고 구한 $\frac{10}{3}$보다 더 작은 최솟값 3이 존재함을 알 수 있다.

산술·기하평균에서 등호가 성립할 때가 최소가 되는 것이 아니라 등호가 성립한다는 것은 단지 산술평균과 기하평균이 같기 위한 조건임을 알 수 있다. 예를 들어 $y=2x$에서 $x=1$, $y=2$을 ②식에 대입하면 좌변은 2, 우변도 2로 같다. 또 $x=2$, $y=4$를 ②식에 대입하면 좌변은 1,우변도 1로 같다. 다른 값을 대입해 보아도 마찬가지이다. 이처럼 결과들은 같지만 그 결과가 최솟값이라고 할 수 없다. 이처럼 문제풀이에서 오류를 범하였다면 '정답 1', '정답 2'와 같은 새로운 풀이방법을 탐구하게 될 것이다.

문제2) $x+y=-6$, $xy=4$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 값을 구하여라.

정답) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=\sqrt{x}\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}\sqrt{y}=-x-2\sqrt{xy}-y$

$$=-(x+y)-2\sqrt{xy}$$
$$=6-4$$
$$=2$$

역시 복소수의 연산에서 학생들은 다음과 같은 오류를 많이 범한다.

오답풀이) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=\sqrt{x}\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}\sqrt{y}=x+2\sqrt{xy}+y$

$$=(x+y)+2\sqrt{xy}$$
$$=-6+4$$
$$=-2$$

학생들은 9-가 단계에서 $a>0$, $b>0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 됨을 배우고, 10-가 단계의 복소수 체계에서 $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$가 됨을 학습하게 되지만 사고의 고착화로 많은 오류를 범하게 된다. 문제 2의 조건 $xy=1$에서 두 수의 곱이 양수라는 것

은 두 수 $x>0,\ y>0$ 혹은 $x<0,\ y<0$이다. 그런데 $x+y=-6$이므로 $x<0,\ y<0$ 임을 알 수 있다. 그러므로 $x<0,\ y<0$일 때, $\sqrt{x}\sqrt{x}=-x$, $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$, $\sqrt{y}\sqrt{y}=-y$가 된다.

실제로 문제 1과 문제 2에서처럼 주어진 문제를 해결하는 데에만 급급한 나머지 주어진 조건을 생각하지 않음으로써 많은 오류를 범하게 되는 유형 중의 하나로 볼 수 있다. 이처럼 문제를 해결한 후 구한 정답이 맞는지, 계산과정에 오류가 없는지, 특히 주어진 조건을 만족하는지 확인해 보는 반성활동은 가장 기본적이면서도 필수적인 활동으로 볼 수 있다.

[유형2] 문제 분석을 통한 반성활동

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $a\neq 0$)의 근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$을 구하는 것으로 끝나는 것이 아니라 공식의 의미를 재음미 해 보는 것은 중요하다. 주어진 이차방정식이 만약 실수 범위에서 항상 근을 가지도록 하기 위해서는 판별식 $D=b^2-4ac\geq 0$이 되어야 한다. 그렇게 되기 위해서는 이차항의 계수 a와 상수항 c의 부호는 반대이어야 한다는 것을 알 수 있다.

문제3) 방정식 $x+\dfrac{1}{x}=a$를 만족하는 x의 값을 구하여라.

풀이) 주어진 식 $x+\dfrac{1}{x}=a$ ……… ① 의 양변에 x를 곱하면 $x^2+1=ax$가 되고, 우변에 있는 식 ax를 좌변에 이항하고 식을 정리하면

$$x^2-ax+1=0 \ \cdots\cdots\cdots \ ②$$

이 되므로 근의 공식을 사용하면 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$이 된다.

여기서 단순히 근을 구하는 것으로 끝낼 것이 아니라 문제를 분석하여 보자. 우선 ①식에 상수 a는 단순히 상수의 의미만을 지니고 있는 것이 아니라 ②식에서는 방정식의 두 근의 합이 됨을 알 수 있다. 또한 주어진 ①식이 실근을 가지기 위해서는 $\sqrt{a^2-4}$에서 $a^2-4\geq 0$이므로 $a\leq -2,\ a\geq 2$가 되어야 한다.

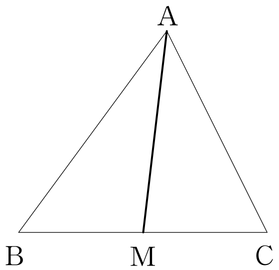
그리고 주어진 식 $x+\dfrac{1}{x}=a$가 모든 x에 관해 식이 성립하도록 하는 a의 범위는 산술・기하평균에 의해서 $a=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ 즉, $a\geq 2$가 되어야 함을 알 수 있다. 여기서 더 나아가 방정식 $x+\dfrac{b}{x}=a$를 만족하는 x의 값을 구하여 보자. $x+\dfrac{b}{x}=a$……… ③이라 하고 이것을 정리하면 $x^2-ax+b=0$ ……… ④가 될 것이고 상수 a는 주어진 방정식의 두 근의 합이 되고, 상수 b는 두 근의 곱이 됨을 알 수 있다. 또한 ④식이 실근을 가지기 위해서는 $a^2-4b\geq 0$가 되어야 함을 알 수 있다. 이처럼 만약 어떤 주어진 문제가

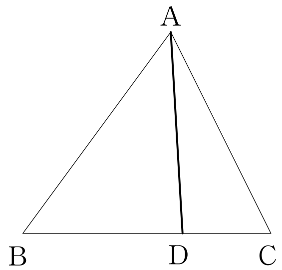
있다면 주어진 문제를 해결하는 것으로 끝나는 것이 아니라 주어진 문제를 분석해 보는 반성활동도 중요하다고 본다.

[유형3] 일반화하기

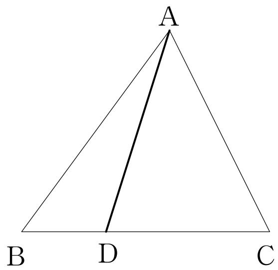
박규홍 외 명(2002, p.13), 최봉대 외 6명(2002, p.15), 양승갑 외 8명(2002, p.13)에서는 <그림2-2>과 같이 $\triangle ABC$의 변 BC의 중점($\overline{BM}=\overline{CM}$)을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 즉, Pappus 정리를 증명하도록 제시하고 있으며, 양승갑 외 8명(2002, p.13)에서는 <그림2-3>와 같이 $\triangle ABC$의 변 BC 위에 $\overline{BD}=2\overline{DC}$ 인 점 D를 잡으면, $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$임을 증명하도록 제시하고 있다. 이들은 스튜어트 정리의 특수한 경우로 앞선 문제들을 통하여 <그림2-4>과 같이 스튜어트 정리를 증명 즉, 변 BC 위를 $m:n$으로 내분하는 점 D를 잡아서 Pappus 정리의 일반화를 증명하도록 하는 반성활동도 필요하다고 본다. 여기서 스튜어트 정리는 다음과 같다.

$$m\overline{AB}^2+n\overline{BC}^2=(m+n)(\overline{AD}^2+\overline{BD}\times\overline{CD})$$





⇒



<그림2-2> <그림2-3> <그림2-4>

그리고 모든 교과서에서 산술 · 기하 평균 즉 a, b가 양수 일 때, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$을 다루고 있는데 이것을 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이 모두 양수일 때, $\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots a_n$로 일반화 시킬 수 있을 것이다. 또한 코시-슈바르츠 부등식 즉, $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$을 다음과 같이 일반화 시킬 수 있을 것이다.

$$(a^2{}_1+a^2{}_2+\cdots+a^2{}_n)(x^2{}_1+x^2{}_2+\cdots+x^2{}_n) \geq (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$$

우정호(2005, p.241)에 따르면, Polya는 “수에 관한” 문제에서 “문자에 관한” 문제로 일반화되면서 새로운 방법에 접근하게 되고 곧, 주어진 자료를 변경시킬 수 있고, 그렇게 함으로써 결과를 여러 가지 방법으로 점검해 보게 함으로써 일반화를 통한 반성활동을 강조하고 있다. 무엇보다 이러한 활동은 학생들의 호기심을 자극할 수 있을 것이다. 또한, 문제해결력 신장의 측면에서도 중요하다고 볼 수 있다. 예를 들면, 대부분의 교과서 ‘10-가’에서는 곱셈공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

이나 인수분해

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

에서 다루고 있으며 이런 내용들은 단순히 문제해결에만 그치고 있는 실정이다. 하지만 학생들은 귀납적 사고로 다음과 같은 규칙성을 찾을 수 있다.

곱셈공식의 전개	인수분해
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2+b^3$	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^2)$
$\vdots$	$\vdots$
$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+b^n$	$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

위에서처럼 $(a+b)^n$의 전개식은 '수학Ⅰ'의 이항정리 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}b^r$과 내용이 연계되며. 이 식에서 계수들을 나열하면 '파스칼(Pascal)의 삼각형'이 된다. 그리고 $(x_1+x_2)^2$을 전개하면 항의 개수는 3개, $(x_1+x_2+x_3)^2$를 전개하면 얻어지는 항의 개수는 6개, $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$를 전개하면 얻어지는 항의 개수는 10개다. 그렇다면 $(x_1+x_2+\cdots x_{n-1}+x_n)^2$을 전개하여 얻어지는 항의 개수는 $\dfrac{n(n+1)}{2}$개가 됨을 추측할 수 있을 것이다. 이처럼 위 식에서 곱셈공식이나 인수분해를 '일반화'함으로써, 주어진 식에서 패턴이나 규칙성을 발견하게 될 뿐만 아니라 학생에게 수학에 대해 많은 흥미를 유발시킬 수 있을 것이다.

[유형4] 다른 풀이 방법을 탐구하기

한 가지 문제를 다양한 방법으로 해결하는 것은 얻어진 해답의 타당성을 확인하는 것 뿐만 아니라, 사고과정의 유연성을 볼 수 있는 흥미로운 방법이다(한인기, 2006, p.52). 김남희 외 5명(2006, p.206)은 학생들이 고등학교에서 도형을 해석 기하적 방법으로 다룬 후에, 이를 중학교에서 학습했던 종합 기하적인 방법과 비교하여 통합할 필요가 있으며, 또한 학생들은 수학적 개념이나 사실들을 서로 관련시키지 못하고 개별적으로 고립화하여 기억하고 이해하는 경향이 강하다고 제시하고 있다. 이처럼 다양한 풀이 방법을 통한 반성활동은 수학적 내용 사이의 관계를 연결 시켜 줄 수 있을 것이다.

문제4) $x^2+y^2=10$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이1) 판별식 $D=b^2-4ac\geq 0$ 이용하기

$2x+y=k$로 두면 $y=-2x+k$이 되고 이것을 주어진 식 $x^2+y^2=10$에 대입하여 정리하

면 $5x^2-4kx+k^2-10=0$이 된다. 따라서 이 이차방정식을 만족하는 실수 x가 존재하기 위해서는 판별식 $D=b^2-4ac \geq 0$이 되어야 하고, 이를 이용하여 정리하면 $-5\sqrt{2} \leq k \leq 5\sqrt{2}$이 되므로 최댓값은 $5\sqrt{2}$, 최솟값은 $-5\sqrt{2}$이다.

풀이2) 코시-슈바르츠의 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$을 이용하기

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여 $(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$이 되고, 주어진 식 $x^2+y^2=10$이므로 $5 \cdot 10 \geq (2x+y)^2$이 된다. 따라서 $-5\sqrt{2} \leq 2x+y \leq 5\sqrt{2}$이 되므로 역시 최댓값은 $5\sqrt{2}$, 최솟값은 $-5\sqrt{2}$이다.

풀이3) 원과 직선의 위치 관계-점과 직선 사이의 거리 이용하기

주어진 식 $x^2+y^2=10$는 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원의 방정식이다. 여기서 $2x+y=k$로 두면 $y=-2x+k$이 되고 k의 값은 이 직선의 y절편이 되며, 구하고자 하는 최댓값과 최솟값은 y절편과 같음을 알 수 있다. 직선 $2x+y-k=0$이 원 $x^2+y^2=10$에 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같다. 따라서 $k=\pm 5\sqrt{2}$이 된다.

위의 문제에서 최대, 최소에 관한 문제에서 판별식을 이용하여 풀기, 코시-슈바르츠의 부등식 이용하기, 점과 직선의 거리 이용하기 등 다양한 풀이 방법을 통한 반성활동은 수학적 내용 사이의 관계를 연결 시켜 준다는 의미에서 중요하다고 볼 수 있을 뿐만 아니라, 기존의 수학적 경험과 지식을 바탕으로 형성된 새로운 개념은 또다른 증명방법을 통해 수학적 지식을 확장시켜 나갈 수 있다는 점에서 중요하다고 볼 수 있다. 특히, 교과서 '미분과 적분'에서 삼각함수의 합성을 배운 학생이라면 이것을 이용하여 최댓값과 최솟값을 다음과 같이 구할 수 있을 것이다.

풀이4) 매개변수-삼각함수의 합성 이용하기

주어진 식 $x^2+y^2=10$는 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이므로 $x=\sqrt{10}\,cos\theta$, $y=\sqrt{10}\,sin\theta$라 하면 주어진 식을 만족하므로 매개변수를 이용하여 원 위의 점의 좌표를 $(\sqrt{10}\,cos\theta,$ $\sqrt{10}\,sin\theta)$로 나타낼 수 있다. 그러므로 삼각함수의 합성을 이용하면 $2x+y=2\sqrt{10}\,cos\theta+\sqrt{10}\,sin\theta=5\sqrt{2}\,sin(\theta+\alpha)$로 나타낼 수 있다. 한편 $-1 \leq \sin(\theta+\alpha) \leq 1$이므로 최댓값은 $5\sqrt{2}$, 최솟값은 $-5\sqrt{2}$이다.

[유형5] 문제제기(Problem posing)

문제제기를 다른 말로 문제설정이라고 하는데 Polya와 Brown & Walter가 문제제기의 중요성을 강조하였다. Polya는 어떤 문제를 푸는데 성공하고 나면 반드시 반성단계에서 미지인 것과 자료, 조건의 역할을 바꾸거나 일반화, 특수화, 유추 등을 통해 응용상황을 고려하여 발전적으로 새로운 문제를 해결해 보도록 요구하고 있다(우정호, 2007). 또한 Brown & Walter는 문제제기의 전략으로 'What-if-not(만약 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가)'을 제시하고 있다. 이처럼 문제제기는 문제를 푼 후 새로운 관점에서 보게 하는 전략일 뿐만 아니라 문제의 본질을 명확하게 해 준다고 볼 수 있다. 여기서는 'What-if-not'

의 전략을 이용한 반성활동을 살펴본다.

문제5) 실수 a, b, c, d에 대하여 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$가 성립함을 증명하시오.

위의 문제는 고등학교 1학년이라면 쉽게 접하게 되는 코시-슈바르츠 부등식이다. 이 증명은 대부분의 교과서에 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$의 식을 정리하면 $(ac-bd)^2 \geq 0$(단, 등호는 $ac=bd$일 때 성립)이 되므로 증명이 끝이 난다. 예를 들어, 만약 a, b, c, d가 정수라 할 때,$(1^2+2^2)(3^2+4^2) > (1\cdot\ 3+2\cdot\ 4)^2$은 위 부등식에 의해서 쉽게 확인할 수 있다. 즉, 좌변은 5×25이고 우변은 11^2이 된다. 여기서 'What-if-not'의 전략을 이용하여 문제를 제기해 보자. 좌변 $(1^2+2^2)(3^2+4^2)$가 우변 $(1\cdot\ 3+2\cdot\ 4)^2$보다 크지 않고 같아지려면 어떻게 되어야 할까? 좌변을 계산해 보면 $(1^2+2^2)(3^2+4^2)=5\cdot\ 25=125=100+25=10^2+5^2$(혹은 11^2+2^2)로 나타낼 수 있다. 이것은 두 수 (1^2+2^2)와 (3^2+4^2)의 곱은 임의의 두 수의 제곱의 합 즉 10^2+5^2(혹은 11^2+2^2)으로 나타난다. 그렇다면 a, b, c, d가 정수일 때 항상 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2$(단, m, n은 정수)로 나타낼 수 있는지 증명하여 보자.

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2\\ &= (a^2c^2 \pm 2ac\cdot\ bd+b^2d^2)+(a^2d^2 \mp 2ad\cdot\ bc+b^2c^2)\\ &= (ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2\end{aligned}$$

이처럼 문제제기는 문제를 푼 후 새로운 관점으로 문제를 볼 수 있게 되는 반성활동의 유형이라 할 수 있다.

Ⅳ. 결론

학생들에게 문제를 제시하고 탐구할 시간을 주는 것과 다양한 문제해결 전략을 제시하는 것도 중요하지만 문제가 해결된 뒤 반성 활동을 할 시간을 제공해 주는 것도 필요하다고 본다. 또한, 제7차 수학과 교육과정 및 수정 교육과정의 목표 중의 하나인 문제해결력 신장이라는 측면에서 본다면 문제가 해결되었다고 해서 끝날 것이 아니라 새로운 수학적 지식을 얻을 수 있는 반성활동을 하는 것도 중요하다고 본다.

Polya 및 Shoenfeld, 한인기(2006), 우정호(2007, p.321)등의 선행연구에서 살펴본 바와 같이 반성활동은 중요하다. 따라서 제7차 교육과정 및 수정 교육과정의 고등학교 1학년의 교과서 및 익힘책에는 어떤 반성활동의 전략을 제시하고 있는지 살펴볼 필요가 있었다.

먼저 제7차 수학과 교육과정의 수학 10-가, 나 단계의 교과서에 제시된 문제해결 4단계 중 마지막 단계인 반성활동의 유형을 분석한 결과 대부분의 반성활동이 문제를 해결하고 난 뒤 계산과정을 확인한다든지 구하고자 한 값이 맞는지 주어진 식에 대입하여 정답을 확인하는데 그치고 있음을 알 수 있었다.

다음으로 제7차 수학과 교육과정의 수학 교과서에는 Polya의 문제해결 4단계에 대한 내용제시에만 그치고 있고 문제 상황에서의 반성활동은 미흡하다.

따라서 본 연구에서는 다양한 반성활동 사고 전략으로 오류를 통한 반성활동, 문제 분석을 통한 반성활동, 일반화하기, 다른 풀이 방법을 탐구하기, 문제제기 등 다섯 가지 유형으로 나누어서 살펴보았다.

학교현장에서는 문제해결력 신장을 위해 문제해결 전략에 많은 초점을 맞추고 있으나 문제를 해결하고 난 뒤에 위와 같은 반성활동을 한다면 문제해결력을 보다 신장시킬 수 있다고 기대되며, 교육과정상 모든 내용을 교과서에 제시하기 어려운 점이 있으므로 교사의 역할이 무엇보다 중요하다고 생각된다.

참고문헌

[1] 김남희 외 5명(2006), 수학교육과정과 교재연구, 경문사.
[2] 박규홍 외 3명(2002a), 수학 10-가, (주)교학사.
______(2002b), 수학 10-나, (주)교학사.
[3] 박두일 외 8명(2002a), 수학 10-가, (주)교학사.
______(2002b), 수학 10-나, (주)교학사.
[4] 박윤범 외 5명(2002a), 수학 10-가, 대한교과서(주).
______(2002b), 수학 10-나, 대한교과서(주).
[5] 신현성 · 최용준(2002a), 수학 10-가, (주)천재교육.
______(2002b), 수학 10-나, (주)천재교육.
[6] 양승갑 외 8명(2002a), 수학 10-가, (주)금성출판사.
______(2002b), 수학 10-나, (주)금성출판사.
[7] 우정호 외 3명(2002a), 수학 10-가, 대한교과서(주).
______(2002b), 수학 10-나, 대한교과서(주).
[8] 우정호(2005), Polya 'How to solve it' 譯 어떻게 문제를 풀 것인가?, 교우사.
______(2007), 수학학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부.
[9] 이강섭 외 6명(2002a), 수학 10-가, (주)지학사.
______(2002b), 수학 10-나, (주)지학사.
[10] 임재훈 외 7명(2002a), 수학 10-가, (주)두산.
______(2002b), 수학 10-나, (주)두산.
[11] 최봉대 외 6명(2002a), 수학 10-가, (주)중앙교육진흥연구소.
______(2002b), 수학 10-나, (주)중앙교육진흥연구소.
[12] 한인기 · 꼴랴긴(2006), 문제해결의 이론과 실제, 승산출판사.

Yoon, Dae-won
Department of Mathematics Education and Research Institut,
Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea
E-mail : dwyoon@gnu.ac.kr

Kim Dong Keun
Chunggu High School, Daegu 701-823, Korea
E-mail : x-file-9513@hanmail.net