East Asian Mathematical Journal
Vol. 27 (2011), No. 4, pp. 433-451

산학정의 하편에 나타난 조선시대 다원술에 대하여

조 진 협[1] , 남 영 만[2]

ABSTRACT. In this paper, we investigate the contents of Da-won-sul in the third volume of San Hak Jeong Ui (Arithmetic Definition) compiled by Nam Byong Kil and corrcted by Lee Sang Hyok in the Choson Dynasty period (Emperor Ko Jong 4, 1867).

<요약>

이 논문은 『산학정의』(고종 4년 1867년, 남병길 편저, 이상혁 교정)의 하편 중 세 번째 부분의 내용 즉, 다원술(방정식의 표기법)에 대해 연구한 것이다.

「산학정의」 하편에서의 다원절은 사원술을 가장 빨리 쉽게 이해시키고자 하였으며, 더 좋은 풀이법을 설명하고자 시도한 우수한 저술이다.

1. 머리글

전통 수학에서 문제를 풀기 위해 식을 나타내는 방법은 '천원술'에서 '사원술'로 발전해 왔다. 『산학정의』하편에서는 '다원술'이라는 용어를 사용하고 있다. 우선 천원술 및 사원술의 발달을 알아보자. 천원술은 중국에서 시작된 다항식 및 방정식의 표기법으로, 산대를 이용하여 나타낸다. 천원술에 대해 체계적으로 기술한 최초의 산학서는 이야(李治, 1192~1279)의 『측원해경』(1248), 『익고연단』(1259)이며 주세걸의 『산학계몽(1299)』와 『사원옥감』(1303)에서도 사용되었다. 우리나라에는 고려 때 전해진 산학계몽을 통해 처음 알려진 것 같다. 중국에서는 명대 이후로 산학의 폐지, 상업 발달로 인한 주산의 보급, 곧 이은 서양 수학의 전래로 천원술의 전통이 사라질 무렵, 그것을 이어받은 조선에서는 아직 사라지지 않고 오히려 중국에서 보다 발전된 형태로 남아서 조선 산학 발달의 중요한 역할을 하였다.

2011년 6월 27일 투고, 2011년 8월 22일 수정, 2011년 8월 31일 심사완료
Keyword : 산학정의, 다원술

1) 경남대학교 수학교육 박사과정
2) 경남대학교 수학교육과 교수

(산학서로 보는 조선수학, 장혜원) 천원술은 미지수가 한 개인 방정식만 나타낼 수 있었다. 그런 한계점을 극복하기 위하여 문자가 네 개인 사원술로 발전하게 되었다. 11세기부터 존재했던 것으로 알려진 천원술에 비해 그것을 일반화한 사원술은 14세기 초반의 주세걸의 『사원옥감』에서 체계화 된다. 천원술에서는 상수항부터 항의 차수가 높아짐에 따라 아래로 내려 썼는데, 나머지 좌, 우, 위 방향으로 수를 배열할 수도 있지 않을까 하고 착안한 것이다. 태(太)라고 지칭한 상수항을 기준으로 아래는 천원(天元), 왼쪽은 지원(地元), 오른쪽은 인원(人元), 위는 물원(物元)이라 하여 오늘날로 생각하면 각각 x, y, z, w에 해당하는 네 개의 문자가 들어 있는 식을 표현할 수 있었다. 천원술에서처럼 문자는 생략하고 각 항의 계수만 장방형으로 표현한 것이다. 평면상의 네 방향이라 미지수는 네 개까지 밖에 다룰 수 없지만, 공간이 열려 있으니 차수는 어디까지라도 가능하다. 조선시대의 수학자 가운데는 이상혁이 『익산』에서 방정식론을 펼치면서 사원술을 다룬다. 요컨대 천원술은 문자가 한 개인 다항식을 표현하는 방법인데 비해, 그것을 일반화한 사원술은 문자가 네 개인 다항식을 표현하는 방법이다. (수학박물관, 장혜원) 『산학정의』 하편 중 세 번째 부분인 다원술에 대한 번역을 통하여 다원술을 통한 방정식의 표현법에 대하여 알아보고, 다원술에 언급되어 있는 13문제에 대한 연구를 하여, 조선시대와 현재의 표현법 및 풀이법에 대한 비교를 하여, 전통수학의 풀이법인 '다원술'을 통해 우리나라 전통 수학의 가치를 알고자 한다.

2. 산학정의 하편에서의 다원술

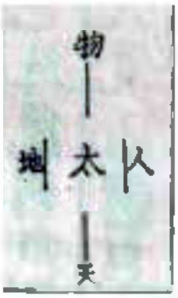
天元固能御諸法而多元則又能御天元之所不能御且天元所能御者增一元則愈加簡捷盖萬方程於天元而融會者故其兩元三元四元猶方程之二色三色四色也今式云式猶天元之寄左與又數也天元所借只一數而多元所借元各一數猶幾箇天元則名不容紊而位亦宜判故别之以天下地左人右物上之名之位分置四方悉以中央太極爲主

천원은 한 가지에 사용가능 한 방법이다. 이에 다원은 즉, 또한 천원 하나로 불가능 한 것에 하나의 원을 증가하여 많은 방정을 해결하는데 사용한다. 천원에 더한 2원, 3원, 4원은 방정에서의 2가지, 3가지, 4가지와 같은 것이다. 금식과 운식은 천원의 좌변에 놓아둔 게 되고 또한, 수와 같은 것이다. 천원은 다만 하나의 수를 빌리지만, 다원은 각각 하나의 수를 빌린다. 각각의 천에 낱낱이 붙이는 것은 혼란스러우므로, 자리를 판별하여 아래는 천으로, 왼쪽은 지로, 오른쪽은 인으로, 위는 물으로 이름을 붙여 사방에 모두 위치한다. 이에 중앙에는 태가 주가

된다.

[如圖太極居中而下爲天元左爲地元右爲人元上爲物元也]其自乘再乘也上下遙增一層左右遙增一行至於相乘也天地相乘則在左下天人相乘則在右下地物相乘則在左上人物相乘則在右上若天物相乘則寄左下之夾縫間地人相乘則寄右上之夾縫間是四元之定位也[如圖天元自乘得甲再乘則在甲下一層地元自乘得乙再乘則在乙左一行人元自乘得丙再乘則在丙右一行物元自乘得丁再乘則在丁上一層天地相乘得戊以天再乘則在戊下以地再乘則在戊左若以戊自乘則在戊之左下亦猶戊在太之左下地物相乘得庚以地再乘則在庚左以物再乘則在庚上以庚自乘則在庚之左上亦猶庚在太之左上人物相乘得辛以人再乘則在辛右以物再乘則在辛上以辛自乘則在辛之右上亦猶辛在太之右上天人相乘得癸以天再乘則在癸下以人再乘則在癸右以癸自乘則在癸之右下亦猶癸在太之右下天物相乘得巳以天再乘則在巳下以物再乘則在巳左以巳自乘則在巳之左下然俱寄夾縫間地人相乘得壬以地再乘則在壬上以人再乘則在壬右以壬自乘則在壬之右上亦俱寄夾縫間也]

위의 본문은 '다원술'의 4원(天,地,人,物)의 위치에 관하여 나타내고 있고, 4원을 서로 곱하였을 경우의 위치에 대하여 설명하고 있다. 『산학정의』 하편에 나타나 있는 그림은 다음과 같다.



위 본문에서 말한 것을 현대적인 표현으로 고쳐보면 다음과 같다. 위에서 말하는 天을 x라 하고, 地를 y로 하고, 人을 z라 하고, 物을 w라고 하여 서로 곱한 결과를 표로 정리하여 보면 다음과 같다.

w^2y^2	w^2y	w^2	w^2z	w^2z^2
wy^2	wy	w	wz	wz^2
y^2	y	太	z	z^2
xy^2	xy	x	xz	xz^2
x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2

據今有之數求得今式據只云之數求得云式據勾股弦求得三元式據問數求得物元式[天元有一式可以相消得開方式地元必有今式云式人元又增三元式物元則又必增物元式然後可以相消得開方式也 四式外又生算式者任記甲乙等字以別之]其相消也夾縫之數[卽天元物相乘或地人相乘數也]無位暫寄故務先消去[若此式有夾縫彼式無夾縫視其夾縫在己則或用天元或用物元乘彼式而消此式或除此式而消彼式其或乘或除而有兩夾縫者一消再消之地人相乘在壬者倣此]諸式之或層或行彼此不等者必剔而各自乘相消使層數或行數增爲齊同然後消之[兩元不必用剔消三元則恒用直截剔消四元則兼用橫截剔消而或因不便用斜截皆以一式剔分爲二各自乘相消則但增層數 或行數而其正負之積仍必相當也] 太極爲升降進退之樞紐不可移易若消去天元[或物元] 則太極逐層可以上下[如以天元乘則俱下除則俱上]若消去地元[或人元] 則太極逐行可以左右[如以地元乘則俱左除則俱右]故務令兩式齊同一消再消或至屢少每消一元則每少一式消至左右兩式然後內二行相乘外二行相乘內外兩乘數相消而得一行直注之開方式其加減乘除悉同天元[惟互乘自乘較繁然究其修理亦只一例也]而正負相當最爲肯綮天元相消得開方式然後正負相當而多元則必順每式正負各自相當猶方程之每行正負必相當故可以剔消可以易位[相消之餘爲物元則必須上下互易乃可開方或爲地元或爲人元則必須易橫爲直然後乃成開方式]亦可以屢消而至於一行也

지금 있는 수에 근거하여 금식을 구하고, 단지, 운의 수에 근거하여 운식을 얻는다. 구고현에 근거하여 3원식을 구한다. 물어본 수에 의하여 물원식을 얻는다. [天元은 1개의 식만으로 서로 소거하여 개방식을 얻는다. 地元은 반드시 금식과 운식이 있어야 한다. 人元은 또 증가하여 3원식을 있어야 한다. 物元은 또 반드시 늘어나 物元식이 있어야 뒤에 있는 것과 서로 상쇄하여 개방식을 얻는다. 4개의 식 외에 또 생겨난 계산식은 甲乙과 같은 문자로서 별도로 기록하여 쓴다.] 그것을 서로 소거한 것이 협봉의 수이다.[즉 天元과 物元을 서로 곱한 것 혹은 地元과 人元을 서로 곱한 수이다.] 자리가 없으면 잠시 맡기어 먼저 소거하게 한

다. [만약 차식에 협봉이 있으면 그 협봉이 없도록 하고, 그 협봉이 기에 있으면, 즉 천원을 쓰거나, 물원을 써서 곱하여 피식으로 하여 차식 또는 제차식을 사라지게 한다. 이에 피식에 곱하거나 나누어 상쇄한다. 두 개의 협봉에 있는 것은 하나는 사라지고, 다시 사라진 지와 인을 서로 곱한 것은 임의 방비이다.]

위 본문에서는 다원술을 푸는 방법에 대하여 얘기하고 있다. 또한, 천,지,인,물의 네 문자를 사용하여 계산함에 있어서, 천과 지를 곱한 것은 천과 지의 사이에 쓰면 되지만, 천과 지와 인을 곱하는 경우와 같이 두 문자 이상을 곱하는 경우에는 협봉이라는 좁은 곳에 쓴다고 얘기하고 있다.

3. 다원술에서 다룬 문제 유형

『산학정의』 하권에서는 세 번째 부분에 다원술에 대해 다루고 있다. 총 13개의 문제를 다원술에 관련한 문제로 다루고 있다. 그 문제에 대해 살펴보면 다음과 같다.

문 제	내 용
3-1, 3-2 3-4, 3-5 3-7, 3-8	직사각형에서의 넓이와 길이[3] 및 너비[4]를 이용한 문제
3-3	원금과 이자 및 일수를 이용한 문제
3-6, 3-9	삼각형에서 구고현 사이의 관계를 이용한 문제
3-10	직사각형에서 삼승방 및 평방을 이용한 문제
3-11, 3-12 3-13	구,고,현과 직사각형의 넓이를 이용한 문제

주로 도형과 관련된 문제이나, [3-3]문제에서는 원금과 이자 및 일수에 관한 문제를 다루고 있다. 그 문제를 제외한 나머지는 주로 직사각형에서의 길이와 너비 및 넓이를 이용한 문제가 주를 이루고 있다. [3-10]에서는 직사각형에서 삼승방 및 평방을 이용하고 있다. [3-11], [3-12], [3-13]에서는 직사각형과 구,고,현을 이용한 문제를 다루고 있다.

---

3) 길이는 긴 변을 말함.
4) 너비는 짧은 변을 말함.

4. 다원술에서 다룬 문제의 고전적 풀이

『산학정의』 하편에서 다루고 있는 다원술의 문제는 모두 13문제이다. 그 중 몇 문제를 통하여 다원술을 이용한 풀이법에 대해 알아보고자 한다.

[3-2] 今有直積加二闊與四和二較等只云長冪減較冪亦與四和二較等問長闊步各幾何

지금 직사각형의 넓이에 너비의 2배를 더한 것은 4화 2교와 같다. 다만 길이의 제곱에서 교의 제곱을 뺀 것 또한 4화 2교와 같다. 길이와 너비는 각각 얼마인가?

答曰長八步 闊六步

답 : 길이는 8보, 너비는 6보

[풀이] 계산법은 너비를 천원일로 하고 길이를 지원일로 하자. 서로 더한 것의 4배는 4화 $\begin{array}{cc}4 & \text{太}\\0 & 4\end{array}$ 가 된다. 천과 지를 서로 뺀 것은 교가 된다. $\begin{array}{cc}1 & \text{太}\\0 & -1\end{array}$ 이것을 2배 한 것에 4화를 더하면 4화 2교 $\begin{array}{cc}6 & \text{太}\\0 & 2\end{array}$ 를 얻는다. 이에 위에 천과 지를 서로 곱한 것은 직사각형의 넓이 $\begin{array}{cc}0 & \text{太}\\1 & 0\end{array}$ 가 된다. 너비의 2배를 더하면 위와 같은 수를 얻는다. $\begin{array}{cc}0 & \text{太}\\1 & 2\end{array}$ 서로 상쇄하여 금식 $\begin{array}{c}-6\\1\end{array}$ 을 얻는다. 우가 없는 평방을 풀어 너비를 얻는다. [무릇 1행식의 정부상당식을 얻는다. 즉, 모두 옳음으로써 길을 구한다.] 이에 길이를 제곱한 것을 길이의 멱 $\begin{array}{ccc}1 & 0 & \text{太}\end{array}$ 이라 하자. 교를 제곱한 것을 교의 멱 $\begin{array}{ccc}1 & 0 & \text{太}\\ & -2 & 0\\ & & 1\end{array}$ 이라고 하자.

서로 뺀 것 또한 화의 4배와 2배의 교를 더한 수를 얻는다. $\begin{array}{cc}0 & \text{太}\\2 & 0\\ & -1\end{array}$ 4배의 화와 2배의 교와 서로 상쇄하여 운식으로 하자. $\begin{array}{cc}-6 & \text{太}\\2 & -2\\0 & -1\end{array}$ 이에 금식을 상쇄하여

얻는다. 1 -2 이에 지와 천의 위치를 바꾸어 좌식 -1 -2 을 얻는다.
-1 1

또 이에 금식에서 지와 천의 위치를 바꾸면 우식 1 -6 을 얻는다. 이에 좌우식을 서로 상쇄하여 식을 -8 얻는다. 우가 없는 평방을 풀면 길이를 얻는다.
1

위 풀이 방법을 오늘날의 표현으로 고쳐보면 다음과 같이 연산하였음을 알 수 있다.

[현대적 표현] 너비를 x라 하고, 길이를 y라 하자. 4화는 $4(x+y)$이고, 교는 $y-x$ 이고, 4화 2교는 $2x+6y$ 가 된다. 직사각형의 넓이는 xy이고, 너비의 2배 + 직사각형의 넓이는 $2x+xy$ 이다. 서로 상쇄하면 $xy-6y$ (금식)이라고 하자. 금식의 평방을 풀면 너비 6을 얻는다. 길이의 멱은 y^2이고, 교의 멱은 $x^2-2xy+y^2$ 이다. 서로 빼면 $-x^2+2xy$ (4화2교)가 된다.
서로 상쇄하면 $-x^2-2x-6y+2xy$ (운식)이 되고, 금식을 상쇄하면
$-x+y-2$ 이다. x, y자리를 서로 교환하면 $x-y-2$ 이고, 금식에서 y와 x의 자리 교환하면$y-6$ (우식)이 된다. 좌우식을 서로 상쇄하면
$x-8$ 을 얻어. 개평방을 풀면 구하고자 하는 값 길이는 8보를 얻는다.

[풀이에 대한 고찰] 위 방정식을 오늘날의 방식으로 해결하고자 한다면 다음과 같이 해결할 수 있다. 직사각형의 가로의 길이를 x라 하고, 세로의 길이를 y라고 하자. 직사각형의 넓이에 너비의 2배를 더한 것은 4화 2교가 되므로, $xy+2y=4(x+y)+2(x-y)$ 가 됨을 알 수 있다.
또한, 길이의 제곱에서 교의 제곱을 뺀 것 또한, 4화 2교와 같으므로,
$x^2-(x-y)^2=4(x+y)+2(x-y)$ 와 같이 나타낼 수 있다. 산학정의에 나타난 풀이법과 비교해 보면, 오늘날과 거의 유사함을 알 수 있다. 평방을 얻는 과정에서 나타난 금식 -6 을 살펴보면, 산대에서의 계산을 보면 오늘
1
날의 $xy-6y$ 에 해당되나 풀이법에서는 너비인 x를 구하기 위하여 -6을 太 에 해당되는 것으로 보인다. 그 말은 즉, 원래의 위치인 太의 옆자리가 맞으나, -6을 太의 자리로 봄으로 인하여, $xy-6y$ 가 $x-6$ 이 되어, 자리를 한 칸 옆으로 봄으로 인하여, 오늘날 y를 나누면 $x-6$ 에 해당됨을 알 수 있다. y라는 문자를 나누고자, 한 칸 옆으로 이동함으로 인하여 계산이 된 것이다. 또한, 길이를 1 太 으로 보고, 길이의 멱을 계산하는 과정과 교인 1 太 를 제곱하는 과정에서 보면, 다원술에서 제곱을 함에 있어서, 0 -1

太 를 기준으로 한 상,하,좌,우에 있는 숫자는 제곱하여 다음 칸에 쓰고, 상,하,좌, 우에 있는 수를 서로 곱하여 즉, 오늘날의 x가 x^2이 된 것이다. 또한, 太를 기준으로, 상,하,좌,우에 있는 수를 서로 곱하여 그 사이에 적을 때는 2를 곱하여 적었다는 것을 알 수 있다.

즉, 오늘날의 곱셈공식인 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ 와 같음을 알 수 있다. 마지막 부분에, 지와 천의 자리를 바꾼 이유는 오늘날은 너비가 6이라는 사실을 대입하여 길이인y를구하겠지만, 지와 천의 자리 교환을 통하여, 금식과 운식 상쇄를 통해 너비가 6이라는 것을 사용하여 문제를 해결하고자 한 것이다.

[3-6] 今有股冪減弦較較與股乘勾等只云勾冪加弦較和與勾乘弦等問勾股弦尺數各幾何
지금 고의 제곱에서 현교교을 뺀 것은 고에 구를 곱한 것과 같다. 또, 구의 제곱에 현교화를 더한 것은 구에 현올 곱한 것과 같다. 구, 고, 현의 각각 몇 자인가?

答曰勾三尺 股四尺 弦五尺

답 : 구는 3자, 고는 4자, 현은 5자

法立天元一爲股地元一爲勾弦和天元自乘爲股冪

太
0
1

地元減天元爲弦較較

1	太
	-1

以減股冪爲勾乘股

-1	太
	1
	1

以股除之爲勾

-1	太
	1
	1

減地元爲弦

1	0
1	-1太
	-1

仍自乘爲弦冪

1	0	0
	-2	0
	-2	1太
		2
		1

勾自乘爲勾冪

1	0	0
2	-2	0
1	-4	1太
	-2	2
		1

併勾股

二冪亦爲弦冪

1	0	0
	-2	0
	-2	1太
		2
		2

相消得今式

-2	0	太
-1	2	0
	2	0
		1

次以地元除股冪爲勾弦

較　加地元爲倍弦　以勾弦較減地元爲倍勾

以 $\begin{array}{cc} 太 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$ 乘倍弦爲四段 $\begin{array}{ccc} 1 & 太 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array}$ 勾乘弦 於上又倍勾自 $\begin{array}{ccc} 1 & 太 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & -1 \end{array}$ 乘爲

四段勾冪 $\begin{array}{cccc} 1 & 0太 & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & -1 \end{array}$

$\begin{array}{cccc} 1 & 0太 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & -2 & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \end{array}$ 又天地相加爲弦和和 $\begin{array}{cc} 1 & 太 \\ & 1 \end{array}$ 內減倍勾仍四之爲四段弦

較 和 $\begin{array}{cc} 太 & 0 \\ 4 & 0 \\ & 4 \end{array}$ 加四段勾冪爲與上同數 $\begin{array}{cccc} 1 & 0太 & 0 & 0 \\ & 4 & 0 & 0 \\ & -2 & 4 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \end{array}$ 相消得數仍半之[可半故

半之惟在臨時省算也]爲云式 $\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 太 \\ -1 & 2 & 0 \\ & & 0 \\ & & 1 \end{array}$ 消今式半之爲右式 $\begin{array}{cc} -2 & 太 \\ & 0 \\ & 1 \end{array}$ 仍消今式

爲左式於 $\begin{array}{cc} 2 & 太 \\ 1 & -4 \\ & -2 \end{array}$ 是左右對列內二行相乘得 $\begin{array}{c} 太 \\ 8 \\ 4 \end{array}$ 外二行相乘得 $\begin{array}{c} 太 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{array}$ 內外相

消得式 $\begin{array}{c} -8 \\ -2 \\ 1 \end{array}$ 開平方得股 以前右式地易天位得 $\begin{array}{ccc} 太 & 0 & 1 \\ -2 & & \end{array}$ 前左式地易天位得

倍 前 右式消之仍爲左 式又四 $\begin{array}{cc} 太 & -4 \end{array}$ 因前右式得數

太 -4 -2
2 1
太 0 -4
8
以左式消之得數
-2 1
太 0 0
8 2 -1
仍以前右式消之 太 0 得
8 2
-2
外二行相得 太 0
4 1
-1
半之仍爲右式 於是左右對 太
-16
8
-1
列內二行相 太
0
-2
乘得

內外相消得式 -16
10
-1
開平方得勾弦和以除股冪得勾弦較加和半之得弦減和半之得勾

『산학정의』 하편에 나와있는 문제와 풀이이다. 오늘날의 다항식에 해당되는 것을 산대와 사원술의 표기법에 의하여 나타내고, 그것을 이용하여 풀이하고 있다. 오늘날의 표현으로 고쳐서 풀이법을 살펴보면 다음과 같다.

[현대적 표현] 고를 x라 하고, 구현화를 y라고 하자. 고의 멱은 x^2이고, 현교교는 $-x+y$ 가 된다. 구와 고의 곱은 고의 멱에서 현교교를 뺀 것과 같다. x^2+x-y . 이에 고를 나누면 구 $x+1-yw$ 이 된다. $w=\frac{1}{x}$ 에 해당된다.
현은 $y-(x+1-yw)=y-x-1+yw$ 가 되어,
현의 멱은 $x^2+x+1-2xy-4y+y^2-2yw+2wy^2+2w^2y^2$ 이 된다. 또한, 구의 멱은 $x^2+2x-2y-2yw+w^2y^2+1$ 이 되고, 현의 멱은 구의 멱과 고의 멱의 합과 같으므로, $2x^2+2x-2y+1-2wy+w^2y^2$ 이 된다.
서로 상쇄하면 $x^3+2xy+2x^2y-2y^2-xy^2$ 이 되어, 금식이라고 하자.
고의 멱에서 지원을 나누면$x^2\div y=x^2z$, 또한, 현의 2배는 x^2z+y
지원에서 구현교를 뺀 것은 구의 배가 되므로 $y-x^2z$ 의 식이 성립한다.
$(y-x^2z)$ X 현의 배 = $y^2-x^4z^2$ 이 되어 위에 놓아두자.
구를 배하여 자승은 x^4z-2x^2+y 이고, 현화화는$x+y$ 가 된다. 또한, 구를 배하여 뺀 것은 $4x+4x^2z$ 이 되어 현교화가 된다. 4단의 구의 멱에 더하면 $x^4z^2+4x^2z-2x^2+4x+y$ 이 된다. 금식과 상쇄한 것의 반 x^2-2y 은 우식이 된다. 금식을 상쇄하면 $-2x^2-4x+xy+2y$ 이 되어 좌식이 된다. 왼쪽과 오른쪽 두 행을 서로 곱하면 $4x^2+8x$ 이 되고, 바깥의 두 행을 서로 곱하면 x^3+2x^2 이

된다. 안과 바깥의 식을 서로 상쇄하면 x^3-2x^2-8x 이 되어 개평방을 풀면 고를 얻는다. 우식에서 천과 지의 자리 교환를 교환하면$-2x+z^2$ 이 되고, 좌식에서 천과 지의 자리를 교환하면$2x-4z-2z^2+xz$ 이 되고, 앞의 우식을 배하여 상쇄하면$-2x-4z+xz$ 이 되고, 앞의 우식에서 4배를 하면 $8x-4z^2$ 이 되고, 왼쪽의 식을 상쇄하면 $8x+2xz-xz^2$ 이 된다. 2로 나누면$-x^2+4x+xz$ 이 되어, 왼쪽과 오른쪽 열에 대하여, 안쪽의 두 행을 서로 곱하면 $-x^3+8x^2-16x$ 이 된다. 바깥의 두 행을 서로 곱하면$-2x^2$ 이 되고, 안과 바깥의 식을 서로 상쇄 $-x^3+10x^2-16x$ 를 얻어, 개평방을 풀면 구현화를 얻는다.

[풀이에 대한 고찰] 위 문제를 오늘날의 문제로 바꾸면, 구를 x라 하고, 고를 y라 하고, 현을 z라고 하자. 고의 제곱에서 현교교를 뺀 것은 고에 구를 곱한 것과 같으므로, $y^2-(x-y+z)=xy$ 이 된다.

또한, 구의 제곱에 현교화를 더한 것은 구에 현을 곱한 것과 같으므로, $x^2+(-x+y+z)=xz$ 가 성립한다. 이 두 식을 만족하는 x,y,z를 구하는 문제이다. 위 식에서 알 수 있는 것은 x^2+x-y 이에 고를 나누면 구 $x+1-yw$ 가 되는데 사원술의 자리로 살펴보면 $w=\frac{1}{x}$ 으로 본 것으로 보인다.

[3-11] 今有直積減一弦與半勾餘與三勾五股等只云勾弦較股弦較相併與一股少半勾等問勾股弦尺數各幾何

지금 직사각형의 넓이에서 현을 뺀 것은 구의 반으로 나눈 것에 구의 3배와 고의 5배를 더한 것과 같다. 다만 구현교와 고현교를 서로 더한 것은 고에서 구의 반을 뺀 것과 같다. 구, 고, 현은 각각 얼마인가?

答曰勾八尺 股十五尺 弦十七尺

답 : 구는 8자, 고는 15자, 현은 17자

계산법은 구를 천원일로 하자. 고를 지원일로 하자. 현을 인원일로 하자. 이에 천원을 자승한 것은 구의 멱 $\begin{array}{c}\text{太}\\0\\1\end{array}$ 이 된다. 이에 지원을 자승한 것은 고의 멱 이 된다. 이에 인원을 자승한 것은 현의 멱이 된다.

1 0 太 이에 천과 지를 서로 곱한 것은 직 太 0 1 / 0 太 / 1 0 사각형의 면적 이 된다. 이에 천과

인을 서로 뺀 것은 구현교 太 1 / -1 가 된다. 이에 지인을 빼면

고현교 -1 太 1 가 된다. 또, 천원의 3배 太 / 3 과 지의 5배 5 太

원을 서로 더하면 3구 5고 5 太 / 3 가 된다. 더한 것에 배를 하면

수 10 太 / 6 를 얻어 위에 놓아두자. 이에 직적에서 인원을 빼어 배를 하면

0 太 -2 / 2 0 0 를 얻는다. 또, 천원을 빼면 수 0 太 -2 / 2 -1 0 를 얻는다.

위의 것과 서로 상쇄하면 금식 -10 太 -2 / 2 -7 0 을 얻는다. 또, 구현교와

고현교를 아우른 것을 배하면 수 0 太 -2 / 2 -1 0 를 얻어 위에 놓아두자.

이에 지원을 배하여 천원을 빼면 수 2 太 / -1 를 얻는다. 위의 것과 서로 상쇄

하면 운식 4 太 -4 / 1 이 된다. 또, 구의 멱과 고의 멱을 서로 더한 것에

현의 멱을 상쇄하면 삼원식 1 0 太 0 -1 / 0 / 1 이 된다.

금식 -20 太 -4 / 4 -14 을 배하여 운식과 상쇄하면 우식 24 太 / -4 15 이 된다.

이에 운식을 두 개로 나누자. [인원을 곧게 끊는다.] 이에 오른쪽의 반 太 -4

올 자승하면 $\begin{array}{ccc} 太 & 0 & 16 \end{array}$ 얻는다. 이에 왼쪽의 반 $\begin{array}{cc} 4 & 太 \\ & 1 \end{array}$ 을 자승 $\begin{array}{ccc} 16 & 0 & 太 \\ & 8 & 0 \\ & & 1 \end{array}$

하면 얻는다. 서로 상쇄하면 $\begin{array}{ccccc} 16 & 0 & 太 & 0 & -16 \\ & 8 & 0 & & \\ & & 1 & & \end{array}$ 16배를 얻어 3을 상쇄

하 면 $\begin{array}{ccccc} 16 & 0 & 太 & 0 & -16 \\ & & 0 & & \\ & & 16 & & \end{array}$ 좌 식 $\begin{array}{cc} 8 & 太 \\ & -15 \end{array}$ 이 된다.

왼쪽과 오른쪽의 열에 대하여 운식에서 안의 두 행올 서로 곱하면 $\begin{array}{c} 太 \\ -360 \\ 60 \end{array}$ 얻는다.

바깥의 두 행을 서로 곱하면 $\begin{array}{c} 太 \\ 120 \end{array}$ 얻는다. 안과 바깥을 서로 상쇄하면

식 $\begin{array}{c} 480 \\ 60 \end{array}$ 을 얻는다. 우가 없는 평방을 풀면 구를 얻는다. 이에 왼쪽과 오른쪽

두 식올 각각 지와 천의 자리를 바꾸면 우식 $\begin{array}{cc} 15 & 太 \\ -4 & 24 \end{array}$ 과 좌식을 얻는다.

이에 왼쪽과 오른쪽 열에 대하여 안쪽의 두 행올 서로 곱하면 $\begin{array}{c} 太 \\ 120 \\ -32 \end{array}$ 얻는다.

바깥의 두 행올 서로 곱하면 $\begin{array}{c} 太 \\ -360 \end{array}$ 얻는다. 안과 바깥올 서로 상쇄하면 식 $\begin{array}{c} -480 \\ \\ 32 \end{array}$ 을 얻는다. 우가 없는 평방을 풀면 고를 얻는다.

이에 금식 $\begin{array}{ccc} -40 & 太 & -8 \\ 82 & -8 & \end{array}$ 의 왼쪽행과 운식 $\begin{array}{ccc} 4 & 太 & -4 \\ & 1 & \end{array}$ 올 가지런히 하면

$\begin{array}{ccc} -40 & 太 & 40 \\ 8 & -10 & -8 \end{array}$ 얻는다. 이에 금식 $\begin{array}{ccc} -30 & 太 & -8 \\ 82 & -8 & \end{array}$ 올 4배하여 상쇄하면

2

太 48 를 얻는다. 인과 천의 자리를 바꾼 것의 반은 얻어 1 9 太

18 -8 -4 24

2

차식으로 하자. 이에 운식을 두 개로 분할하자.[지원을 곧게 분할한다.] 오른쪽의 반 太 -4 이다. 자승을 하면 太 0 16 얻는다.

1 0 -8

1

왼쪽의 반은 4 太 이다. 자승을 하면 16 0 太 얻는다. 서로 상쇄하면 수 16 0 太 0 -16 얻는다.

0 8

-1

이에 3원식에 16배를 하면 16 0 太 0 -16 를 얻는다.

0

16

서로 상쇄하면 太 8 얻는다. 인과 천의 자리를 서로 바꾸면 얻어 우식

-17

으로 -17 太 하자. 이에 3배를 하면 -51 太 를 얻는다. 차식과 상쇄하

8 24

면 -1 -60 을 얻어 좌식으로 하자. 이에 왼쪽, 오른쪽 두 열에 대하여 안

4

쪽의 두 행을 서로 곱하면 10 20 를 얻는다. 바깥 두 행을 서로 곱하면

-68

하면 얻는다. 을 서로 곱하면 얻는다. 서로 상쇄하면 식을

太 10 20

얻는다. 우가 −8 없는 평방을 풀면 현을 얻는다. −60

[현대적 표현] 구를 x라 하고, 고를 y라 하자. 현을 z라 하고, 구의 멱을 x^2, 고의 멱을y^2, 현의 멱을 z^2이라고 하자. 직사각형의 면적은 xy, 구현교는 $-x+z$, 고현교는 $z-y$, 3구 5고는 $3x+5y$, 배를 하면 $6x+10y$ 가 된다.

$(xy-z)\times 2=2xy-2z$ 이다. x를 빼면 $2xy-2z-x$ 이 되고, 위의 식과 서로 상쇄하면 $-10y+2xy-7x-2z$ (금식)이 된다.

2 × (구현교 + 고현교) = $-2x-2y+4z$ 이 되어, $2\times y-2$ 위의 식과 서로 상쇄하면 $x+4y-4z$ 이 된다. 구의 멱 + 고의 멱에 현의 멱 상쇄한 식은 $x^2+y^2-z^2$ (삼원식)이 된다. 금식을 배하면 $-14x-20y-4z+4xy$ 이 되어 운식과 상쇄하면 $-4xy+15x+24y$ (우식)이 된다. 운식을 두 개로 분할하면 (z를 곧게 나눈다.) 오른쪽의 반 $-4z$ 를 자승하면 $16z^2$이고, 왼쪽의 반 $x+4y$ 를 자승하면 $x^2+8xy+16y^2$ 이 된다. 삼원식에 16배를 하면 $16x^2+16y^2-16z^2$ 이다. 상쇄하면 $x^2+16y^2-16z^2+8xy$ 이 되고, 16배를 하여 상쇄하면 $-15x+8y$ (좌식)이 된다. 왼쪽과 오른쪽 열에 대하여 운식 안의 두 행을 서로 곱하면 $60x^2-360x$ 이다. 바깥의 두 행을 서로 곱하면 $120x$이 된다. 안과 바깥의 식을 서로 상쇄하면 $60x+480$ 이 되어, 우가 없는 평방을 풀면 구를 얻는다.

왼쪽과 오른쪽 두 식의 x와 y의 자리 교환하면 $24x+15y-4xy$ (우식)이 되고, $8x-15y$ (좌식)이 된다. 이에 왼쪽과 오른쪽 열에 대하여 안 쪽의 두 행을 곱하면$-32x^2+120x$, 바깥의 두 행을 서로 곱하면 $-360x$ 가 된다. 안과 바깥의 식 서로 상쇄하면 $32x-480$ 이 되어, 우가 없는 평방을 풀면 고를 얻는다. 금식 $-7x+2xy-10y-2z$ 왼쪽 행과 운식 $x+4y-4z$ 와 가지런히 하면 $2x^2-10x-8xz+8xy-40y+40z$ 이 된다. 금식을 4배하여$-28x+8xy-40y-8z$ 상쇄하면$2x^2+18x-8xz+48z$ 를 얻는다. 반의 x와 z의 자리를 바꾼 $-4xy+24x+9y+y^2$ 을 차식으로 한다. 운식을 두 개로 분할 (y를 기준)하여, 오른쪽의 반 $x-4z$, 자승하면 $x^2-8xz+z^2$ 이 된다. 왼쪽의 반 $4y$를 자승하면 $16y^2$을 얻는다.

서로 상쇄하면 $-x^2+8xz-16z^2+16y^2$ 이 된다. 삼원식에 16배하여 $16x^2+16y^2-16z^2$ 을 상쇄하면 $-17x+8z$ 이 된다. x,y의 자리 교환하면 $8x-17y$ (우식)이 된다. 우식 × 3 = $24x-51y$ 이 되고, 차식은 $4x-y-60$ (좌식)이 된다. 왼쪽과 오른쪽 두 열에 대하여 안쪽의 두 행을 서로 곱하면

$-68x+10y+20$ 을 얻고, 바깥의 두 행을 서로 곱하면 $-8x$ 를 얻는다. 서로 상쇄하면 $-60x+10y+20$ 을 얻는다. 우가 없는 평방을 풀면 현을 얻는다.

[풀이에 대한 고찰] 위 문항을 오늘날의 문제로 바꾸면 구를 x라 하고, 고를 y라 하고, 현을 z라고 하자. 직사각형의 넓이에서 현을 뺀 것은 구를 반으로 나눈 것에 구의 3배와 고의 5배를 더한 것과 같으므로, $xy-z=\frac{x}{2}+3x+5y$ 가 된다. 구현교와 고현교를 서로 더한 것은 고에서 구의 반을 뺀 것과 같으므로, $(z-x)+(z-y)=y-\frac{1}{2}x$ 가 된다. 이 식을 푸는 과정을 사원술을 통해 나타내고 있는 것이다.

4. 「산학정의」의 다원술에 나타난 우수성

「산학정의」의 문제 중 2번째 문제는 「옥감세초상해」의 여섯 번째 문항에서도 다루고 있다. 단지, 숫자만 조금 다를 뿐인데, 문제의 풀이법에서 차이를 보이고 있다. '옥감세초상해'에서는 문제에서 구하고자 하는 것을 각각 天과 地로 하여 복잡한 소거의 과정을 거쳐 天과 地에 대한 각각의 개방식을 얻어 天과 地를 구하고 있다. 반면에, '산학정의' 하편에서는 같은 연립방정식에서 天과 地를 구함에 있어서, 주어진 조건을 이용하여 소거를 시켜 먼저 地를 구해낸 다음에 적당히 天과 地의 자리교환을 통하여 天에 대한 개방식을 쉽게 얻어내고 있다.

우수성의 또 다른 예로, 13번째 문제에서 다루고 있는 '三才運元' 또한, '옥감세초상해'에서 다루고 있다. '옥감세초상해'에서는 구(=x), 고(=y), 현(=z)에 대한 연립방정식의 소거 과정을 통하여 $z^4-6z^3+4z^2+6z-5=0$ 를 얻어 개방식을 풀어 현을 구하고 있다. 반면에 '산학정의'에서는 각각의 미지수를 천, 지, 인으로 하여 천과 인에 대한 좌식과 우식을 구하여 '호승제분'법을 통하여 $2x^2-8x+6=0$ 을 통하여, 천을 구하고 두 식에 인과 천의 자리 교환을 통하여 현에 대한 방정식을 얻어 현을 구한 다음에 구고술을 이용하여 고를 구하고 있다. 식을 좀 더 간단히 하여 구하고자 한 것이다.

끝으로, 9번째 문항은 '옥감세초상해'의 7번째 문항에서 다루고 있다. '옥감세초상해'에서의 풀이법과 너비를 얻는 방식까지는 유사하다. '옥감세초상해'에서는 너비를 얻은 뒤에 길이를 얻고자 다시 길이에 대한 방정식을 만들어 푼 반면에

'산학정의' 에서는 구한 너비를 이용하여, 문제에서 주어진 조건을 이용하여 길이를 구하고 있다.

이처럼, '산학정의' 하편에서는 「사원옥감」이나 「사원옥감세초」에서 다룬 문제들을 주로 다루고 있지만, 좀 더 문제를 쉽게 해결하고자 한 우수성을 알 수 있었다.

5. 다원술 문제 풀이법에 대한 고찰

다원술의 문제 풀이법을 통해 산학자들이 문제를 쉽게 해결하기 위해 다음과 같은 노력을 하였음을 알 수 있다.

첫째, 미지수 네 개를 사용하고자 천, 지, 인, 물 네 개를 太를 기준으로 상,하,좌,우로 배열하여 수를 산대로 사용하여 나타내었다는 것이다.

둘째, 사원술로 표기된 것을 제곱하여 사용하고자 오늘날의 곱셈공식에 해당되는 것을 사용하였다.

셋째, 천과 지등의 자리 교환을 통해, 우리가 친숙한 문자에 관해서 고치고자 하였던 부분이 보인다. 오늘날 x, z보다는 x, y가 더 친숙한것과 마찬가지인 것이다.

넷째, 지원을 기준으로 곧게 나누는 부분을 통해 알 수 있는 것은 지원을 기준으로 두 부분으로 나누어 각각을 제곱하여 뺌으로 인하여 오늘날의 $a^2 - b^2$ 의 형태를 이용하고자 하였다.

다섯째, 안쪽의 두 행을 서로 곱하거나, 바깥의 두 행을 서로 곱하는 과정이 있는데, 이 과정은 두 문자에 대한 방정식에서 하나의 문자를 소거하여 하나의 문자만 사용하고자 한 것으로 보인다.

여섯째, 사원술로 나타내어 진 식을 미지수 등을 상쇄하여 하나의 미지수에 관한 식으로 고쳐 개방식을 푸는 형태로 모두 해결하고 있다.

일곱째, '산학정의' 하편에서는 '사원옥감'과 '사원옥감세초'에서 다룬 문제들을 좀 더 쉬운 방식으로 해결하고자 하였으며, 사원술에 대해 조금이나마 쉽게 설명하고자 하였다.

6. 맺음글

본 논문은 천원술에서 진일보된 다원에 대한 논문이다. 천원에서는 元만 사용하여 문제를 해결한 반면 『산학정의』 하편에 나타난 다원술에 보면 천, 지, 인, 물의 네 가지를 사용하여 문제를 해결하고 있다. 천, 지, 인, 물의 곱에 대하여 산대 배열을 통하여 나타내고, 문제를 해결하고 있다. 오늘날의 방정식의 풀이법에서는 문자를 직접 적어서 방정식을 풀고 해결하는 반면에, 다원술에서는 오늘날의 상수항에 해당되는 太를 기준으로 산대 배열을 늘어 놓아, 문제를 해결하고 있다. 본 연구의 제한점은 다원술에 대해 다룬 산학서들이 많지 않아서 어려움이 있었다. 하지만, 중국의 산학서등 다른 산학서에서 좀 더 다원술에 관하여 연구를 하면 오늘날 우리나라에 방정식을 다루는 방법에 대한 계통을 찾을 수 있지 않을까 한다. 문자를 사용하지 않고, 천, 지, 인, 물에 해당되는 위치에 산대를 늘어 놓아 문자가 여러 개인 방정식을 해결하였다는 것은 놀라운 조선시대 산학자들의 업적인 듯 하다. 『산학정의』 하편에서 나타난 다원술 뿐만 아니라, 좀 더 다양한 다원술의 문제를 찾아 연구해 볼 필요가 있다. 『산학정의』 하편에서는 산대배열을 늘어 놓을 때 太의 위치가 명확히 기재가 되어 있지 않은 부분들이 있어서, 사원술의 장점인 위치를 정확하게 알 수 없어서, 문자를 잘 못 보는 경우도 있었다. 太의 위치가 기록이 명확히 되어 있었다면, 문제를 해결하는데 좀 더 쉽지 않았을까 생각한다. 끝으로, '사원옥감' 및 '옥감세초상해'에서의 문제들을 좀 더 쉬운 방법으로 해결하고자 한 노력을 볼 수 있었다는 것이 가장 큰 결과가 되겠다.

참고문헌

[1] 남병길· 이상혁, 산학정의 하편.
[2] 김용운· 김용국, 한국수학사, 살림 Math, 2009.
[3] 장혜원, 수학박물관, 성안당. 2010.
[4] 장혜원, 산학서로 보는 조선 수학, 경문사, 2007.
[5] 김용운, 수학사대전, 경문사, 2010.

Jin Hyub Cho
Chanwon middle School
Dogye-dong 902, Uichang-gu, Chanwon-si, Gyeongsangnam-do
E-mail address : chojinhy@hanmail.net

Young Man Nam
Mathematics Education
Kyungnam University
449 Woryeoung-dong, Masanhapo-gu, Changwon-si, Gyeongsangnam-do
E-mail address: nym4953@@kyungnam.ac.kr