East Asian Mathematical Journal
Vol. 27 (2011), No. 4, pp. 381-389

유연한 수학적 사고에 의한 개념의 동치성 비교 - 사례 연구 -

이 병 수

ABSTRACT. The flexible mathematical thinking - the ability to generate and connect various representations of concepts - is useful in understanding mathematical structure and variation in problem solving. In particular, the flexible mathematical thinking with the inventive mathematical thinking, the original mathematical problem solving ability and the mathematical invention is a core concept, which must be emphasized in all branches of mathematical education.

In this paper, the author considered a case of flexible mathematical thinking with an inventive problem solving ability shown by his student via real analysis courses. The case is on the proofs of the equivalences of three different definitions on the concept of limit superior shown in three different real analysis books. Proving the equivalences of the three definitions, the student tried to keep the flexible mathematical thinking steadily.

I. 서론

유연한 수학적 사고(flexible mathematical thinking)는 개념들을 다양하게 표현하고 또 그들을 관련짓는 능력을 의미한다. 따라서 수학적 사고의 유연성은 수학 구조와 문제 풀이의 변화를 이해하는데 있어서 유용하다. NCTM(2009, pp. 9-10)에서 언급한 많은 중요한 추론 습관 중에는 다음의 네 습관이 유연한 수학적 사고를 보충한다. 첫째는 이미 배워 습득한 개념을 새로운 문제 상황에 응용하며 필요시에는 바꾸고 확장하는 것이고, 둘째는 다른 수학적 영역과 다른 내용 그리고 다른 표현들과 교차 관련된 것을 찾고 이용하는 것이며, 셋째는 그 문제를 풀기위한 다른 접근법 및 다른 사람에 의해 제안된 접근법과 조화시키는 것이며,

2011년 1월 7일 투고, 2011년 8월 17일 수정, 2011년 8월 31일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97C30
Key words: 유연한 수학적 사고, 완비성 공리, 상극한, Bolzano-Weierstrass 정리

넷째는 해를 좀 더 광범위한 문제들의 족으로 일반화시키고 다른 문제와의 관련성을 찾는 것이다. 실제로, 사고의 유연성은 학생들이 그들의 수학적 지식을 새로운 개념에 응용하는데 있어서 본질적인 것이므로 유연성은 문제 풀이에서 핵심적인 성분이다(Warner et al., 2003). 따라서 대학 수학을 공부하는 학생들이 해석적 사고와 대수적 사고를 하는 데에 본질적으로 필요한 개념을 유연하게 이해할 수 있는 방법을 스스로 탐색하는 것은 바람직하다. 수학문제 상황에서 사고의 유연성은 문제해결이 시작되는 문제의 이해단계와 문제해결이 본격적으로 이루어지는 문제풀이의 과정단계에서 모두 중요한 역할을 한다. 문제의 이해단계에서 학습자가 기존의 특정 내용 지식이나 통념에 고착될 경우 문제의 이해 자체가 어려울 수 있다. 혹시 문제를 이해했다고 하더라도 문제풀이의 과정단계에서 기존에 알고 있었거나 문제풀이 과정에서 자신이 고안해낸 특정한 (혹은, 틀에 박힌, 통상적인, 틀린, 비효율적인) 해법이나 관점에 고착되어 문제풀이가 더 이상 진전되지 않을 수 있다(최영기, 도종훈, 105쪽). 또한 문제 해결의 방법이나 결과의 독창성과 다양성은 문제 상황에 대한 문제해결자의 관점이 얼마나 새롭고 다양한가에 의존한다는 면에서 사고의 유연성 특히, 문제해결과정에서 사고(발상)의 전환 능력이 창의적 문제해결의 핵심적인 한 측면임을 분명히 보인다(도종훈, 189쪽).

소고에서는 수학 문제를 대하는 것을 두려워하지 않으며, 질문하는 것을 두려워하지 않으며, 스스로 적극적으로 나서서 자신이 혼자서 공부한 결과를 가져와 의견을 나눌 것을 제시한 학생의 학습 태도에 감명을 받아 그의 제안에 따라 매주 3시간씩 도제식 학습과 같은 학습 기회의 결과로 나온 그의 학습결과를 소개하고자 한다.

Ⅱ. 교사와 학생의 역할

수학을 공부하는 바른 방법은 먼저 개념의 정의와 정리의 서술 내용을 읽고, 그 다음에 책을 접어 옆에 두고 그 정리에 대한 적절한 증명을 찾으려고 노력을 하는 것이다. 만일 정리가 쉽지 않다면 그 시도는 실패할 수도 있다. 그렇지만 그 자체가 바로 교육적이며 또한 그 만큼 유익하다. 수동적으로 학습에 임하는 학생은 진부한 계산법과 기적을 가지고 올 만한 재능을 똑같이 발휘할 수도 있다. 그리고 나중에 스스로 해결해야 할 경우가 되어서는 그 내용들이 쉽게 다가옴을 발견할 것이다. 능동적으로 학습에 임하는 학생은 무엇에 문제가 있는 가를 발견하며, 저자의 증명 방법을 알기 위해 유연한 사고를 가지고 그 추론에 더욱 더 접근을 잘하게 되며 결국에는 책에도 없는 답을 만들어 내는 경우도 있다.

한편, 수학을 이해하고 가르치는 것은 반드시 문제풀이를 통해서 이루어져야 하기 때문에 수학을 학습지도 하는데 있어서의 성공을 위해서는 첫째, 수학의 명제와 서술 과정에 관한 지식이라는 자원과 둘째, 문제 풀이의 기술과 전략, 예를 들면, 증명 과정 중에 앞으로 또는 뒤로 왔다 갔다 하면서 확인하는 것과 그림을 이용하는 것 등이며 셋째, 어떠한 자원과 기술 전략을 언제 어떻게 사용할 것에 대한 조절과 결정이며, 마지막으로 문제에 접근하는 방법을 결정할 수 있다는 믿음의 네 가지 범주가 필요하다(Schoenfeld, 1985). 그러나 여기서 하나 더 본질적으로 필요한 것은 학습자의 유연한 사고를 바탕으로 한 창의적인 학습 습관이다. 수학을 학습하고 배우는 바람직한 방법은 수학적 사고를 바탕으로 하여 마냥 수학을 하는 것이다. 소크라테스(Socratic) 방법 또는 텍사스(Texas) 방법으로 이름이 지워진 이러한 주장(tenet)은 직접 자력으로 수학을 하는 것을 의미한다. 그렇게 되면 학생은 유연한 수학적 사고와 창의적 사고를 스스로 배양하게 된다. 이 방법은 교사가 관련된 수학적 내용을 많이 알고 있으나, 학습자와 수학적 내용 사이에서 그냥 입을 다물고 마냥 서름서름한 관계를 유지하는 역할을 해야 하는 것을 암시하고 있다(Halmos, 1982, vii). 물론 꼭 말을 해야 할 경우 외에는 가급적이면 그렇게 서름서름한 역할을 하면 할수록 학습자들의 수학적 내용에 임하는 학습 자력을 신장시킬 수 있기 때문이다. 이러한 상황은 수업 시간에 교사가 강의를 일사처리로 완벽하게 하는 것이 오히려 학습자의 학습 자력을 신장시키는데 역효과를 가져 올 수 있음을 암시한다. 교사가 강의 내용을 완벽하게 알고 있으면서 강의의 속도를 빠르게 혹은 천천히 조절하거나, 또는 교과서에 활용되고 있는 증명의 틀이나 교과서에 있는 학습 내용의 틀에 매이지 않고 기본적인 큰 틀을 유지하면서 교사 나름대로 학생 중심의 학습 지도의 틀을 만들어 가면서 수업을 진행하면 학생들이 스스로 교사의 증명 틀과 교과서의 증명 틀을 비교하면서 자신들의 증명 틀을 만들어 가며 나름대로 바람직한 자신만의 수학적 자력을 얻게 되어, 수업과 관련된 의문을 가지고 적극적으로 질문을 하게 되는 계기를 마련하게 된다.

해석학에 관련된 여러 종류의 책의 내용을 비교해 보면 가끔은 수리 논리적으로 동치인 개념에 대해 수학적 정의의 표현이 다른 경우가 있다. 물론 수학적 의미는 동등하나 서술적 표현이 다를 뿐이다. 예를 들면, 어떤 책에서 완비성 공리로 소개된 수학적 내용과 또 그 공리를 바탕으로 도출된 수학적 정리가 다른 책에서는 반대로 수학적 정리가 완비성 공리로 완비성 공리가 수학적 정리로 나타난다. 물론 그 공리와 정리는 수리 논리적으로 서로 동치이다.

일반적으로 수학적 사고가 경직되어 있으면 두 개념간의 서술적 차이에 대해 인지적 거부감을 가질 수 있지만, 만일 수학적 사고가 유연하다면 유연할수록 두 개념간의 서술적 차이에 대해 거부감을 느끼는 정도가 낮을 것이고 반대로 의욕

적으로 학습에 임할 수도 있을 것이다. 수학적 사고의 유연성은 수학 문제풀이 상황에서 수학적 사고의 고착을 극복하여 다양하고 독창적인 결과를 도출해 내려는 수학에 임하는 긍정적인 학습태도를 끌어 낼 수 있다. 이는 정의적 영역과 인지적 영역 및 신체적 영역의 발전적이고 시너지적인 결과를 유도한다. 그러한 결과로 보다 향상된 수학적 능력의 향상을 기대할 수 있다.

학습자가 주어진 증명을 이해하고자 할 때나, 또는 문제풀이를 할 때에 하나의 아이디어나 한 가지 방법에 지나치게 매달려 시간과 기운을 거의 다 소모하고서도 시원한 해결을 보지 못했다면, 역효과를 가져 와 오히려 유연한 사고의 자연스런 성장을 방해하는 결과를 초래할 것이다. 따라서 좀 더 실질적인 학습 효과를 얻기 위해 플라스 학습이 마이너스 학습으로 변하기 전에 또 다른 문제 해결법을 찾거나 이해의 방향을 바꾸는 것이 바로 유연한 학습 태도이다.

수학적 문제해결은 인지적인 사고과정과 정의적 특성이 결합된 상태에서 행하여진다. 다시 말하면, 학생들이 어떤 한 수학적인 문제에 접했을 때, 이를 해결하기 위한 그들의 행동은 문제의 표상(representation), 문제의 해결방법을 찾는 것과 같은 인지적 과정에 의해서만 결정되지는 않는다. 그들의 행동은 그 문제로부터 지각된 그들의 감정(정서 상태), 태도, 신념 등과 같은 여러 종류의 정의적 특성에 의하여 영향을 받을 수 있다(전 평국, 26쪽). 따라서 정의적 특성의 효율적인 이용은 학습자의 유연한 수학적 사고의 신장을 가져 온다.

학습자의 평소의 학습능력으로 볼 때 주어진 문제를 충분히 풀 수 있다고 하더라도, 그 학습자의 그 날의 몸 상태나 기분 또는 의욕에 따라서 그 문제를 전혀 풀지 못할 수도 있다. 이러한 상황은 교사의 입장에서도 마찬가지이다. 한 교사가 서로 다른 두 반에서 한 시간 간격으로 똑같은 내용으로 강의를 할 때도 그 학급의 학습 분위기나 학습자들의 태도에 따라 교사의 의욕이나 기분이 변하게 되어 수업의 질은 엄청나게 달라진다. 이처럼 강의를 하는 교사나 강의를 받는 학생도 인지적 능력만으로 학습의 효과를 기대할 수는 없다. 인지적 능력위에 정의적 영역과 신체적 영역의 수준에 따라 더욱 더 나은 학습 효과를 기대할 수 있다. 그래야만 유연한 수학적 사고의 신장을 기대할 수 있다.

Ⅲ. 문제풀이 사례

실수계(real number system)를 포함한 바나(Banach) 공간에서 완비성 공리(completeness axiom)는 다양한 극한과정을 정의하고 발전시켜나가는데 필수적인 내용이다. 예를 들면, 실수계에서 단조수열의 경우에는 그 수열의 수렴성과 유계성은 서로 동치 개념이다. 그러나 일반적으로 유계인 수열의 경우 그 수렴

여부를 보장할 수는 없지만, 그 수열이 수렴하는 부분수열을 가지는 것은 보장된다. 후자의 수학적 특성은 Bolzano-Weierstrass의 정리로 해석학의 주요한 내용이다. 주어진 유계수열 (a_n) 의 상극한에 관한 세 가지 정의들을 소개하고 각각의 특징을 다룬 후 서로의 동치성을 규명하는데 있어서 참여한 학생의 수학적 사고의 유연성을 체크한다.

3-1. 유계 수열의 상극한에 관한 세 가지 정의들

정의 1 (Johnsonbaugh & Pfaffenberger, 1981).
(a_n) 이 유계인 실수열이라 하자. 이때 (a_{n_k}) 가 (a_n) 의 수렴하는 부분수열이고
$\mathcal{L}_a = \left\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L \in \mathbb{R} \mid (a_{n_k}) \text{는 } (a_n) \text{의 수렴하는 부분수열} \right\}$ 이면
$\limsup a_n = \mathrm{lub}\,\mathcal{L}_a$ 이다.

정의 2 (정동명, 조승제, 2004, Bartle & Sherbert 2000).
(a_n) 이 유계인 실수열이고, $A_k = \{a_n \mid n \ge k\}$, $s_k = \sup A_k$ 이면
$\limsup a_n = \lim s_k = \inf\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 이다.

정의 3 (Bartle, 1976).
$\limsup a_n = \inf\{v \in \mathbb{R} \mid \text{부등식 } v < a_n \text{을 만족하는 자연수 } n \text{은 많아야 유한이다}\}$.

3-2. 각 정의들의 특성 비교

1. 정의 1에서는, 주어진 유계수열의 부분수열에 관한 개념과 수열에 관한 Bolzano-Weierstrass 정리를 이용하여 수렴하는 부분수열들의 극한들의 집합의 상한을 주어진 수열의 상극한으로 정의했다.
2. 정의 2에서는, 주어진 유계수열에서 가산 무한개의 무한집합을 생성하여 그 가산 무한개의 무한집합의 각각의 상한을 구한 후 그 상한들의 집합의 하한을 주어진 수열의 상극한으로 정의했다. 이 정의는 온전히 완비성 공리만을 이용한 정의로 정의 1이 완비성 공리와 함께 유계수열은 수렴하는 부분수열을 가진다는 Bolzano-Weierstrass 정리를 이용한 것에 비해 단순하다.
3. 정의 3에서는, 주어진 유계수열의 원소들의 집합인 유계 무한집합의 집적점(cluster point)중에서 제일 큰 값은 그 집합의 기껏해야 유한개보다 작은 실수들의 집합의 하한이라는 사실을 원래의 유계수열에 적용한 정의로서 주어진 유계수열의 상극한은 기껏해야 유한개의 항보다 작은 실수들의 집합에서의 하

한을 말한다(Bartle, 123쪽). 이 정의는 정의 1과 정의 2가 상한에 관한 완비성 공리를 이용한 것과는 달리 하한에 관한 완비성 공리만을 이용했다.

3-3. 학생이 보인 사고의 유연성

1. 먼저, 그는 정의 2를 처음 학습한 후, 이해를 돕기 위해 관련 자료를 찾다가 정의 1과 정의 3이 정의 2와 서로 다른 명제를 사용하여 표현한 것에 조금은 당황했으나 흥미로움을 느꼈다.

2. 그가 정의 2를 처음 학습할 때는 완비성 공리만 이용되었다는 것을 알았지만, 정의 1에서는 완비성 공리와 함께 Bolzano-Weierstrass 정리가 이용된 것에 대해 의문을 가지게 되었다. 조건이 하나 더 붙은 정의에 대해 무엇인가 잘못된 정의가 아닐까? 하는 의문을 가지고 두 정의를 비교해야 하겠다는 유연한 사고를 하게 되었다. 또한 정의 2에서 다루지 않은 부분수열이 다루어진 것도 그에게는 관심거리 중의 하나였다.

3. 또한, 그는 정의 3이 유계수열의 유계인 무한집합의 집적점(cluster point)중에서 제일 큰 값을 주어진 수열의 상극한으로 정의했으며, 정의 1과 정의 2와는 다르게 하한에 관한 완비성 공리만을 이용한 것에 흥미를 가져 서로를 비교하기로 했다.

3-4. 세 정의의 동치성

다음의 정리들은 학생(정 대혁, 경성대학교 교육대학원 재학)에 의해서 증명된 것으로, 정의 1, 정의 2 그리고 정의 3이 서로 동치임을 보인 것이다.

정리 1. 정의 1과 정의 3은 서로 동치이다.
증명. $A=\{v\in\mathbb{R} \mid v<a_n$ 을 만족하는 자연수 n은 많아야 유한이다$\}$ 이라고 두고 $\mathrm{lub}\,\mathcal{L}_a=m$, $\inf A=s$ 라고 하자. 여기서 m , $s\in\mathbb{R}$ 이다.
만약 $s<m$ 라고 하면 적당한 $L\in\mathcal{L}_a$ 이 존재하여 $s<L<m$ 을 만족한다. 그러나 $L\in\mathcal{L}_a$ 이므로 $\lim a_{n_k}=L$ 인 $\langle a_n\rangle$ 의 부분수열 $\langle a_{n_k}\rangle$ 가 존재하고, 이때 $k\ge N \Rightarrow s<a_{n_k}<2L-s=L+(L-s)$ 을 만족하는 적당한 자연수 N이 존재한다. 따라서 $k\ge N$ 에 대하여 $s\le v<a_{n_k}$ 를 만족하는 $v\in A$ 가 존재한다. 이는 A의 정의에 모순이므로 $s\not< m$ 이다.

만약 $m<s$ 라고 하면 $m<r<s$ 인 $r\in\mathbb{R}$ 이 존재하여 $r\notin A$ 이므로 $r<a_n$ 인 자연수 n이 무한히 많이 존재한다. 따라서 임의의 자연수 n_k에 대하여 $r<a_{n_k}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_{n_k}=a$ 를 만족하는 실수 $a(>r)$와 부분수열 $\langle a_{n_k}\rangle$ 가 존재하고 이때, $a\in\ell_a$ 이다. 이것은 $m<r$ 에 모순이고 $m\nless s$ 이다. 결과적으로 $s\nless m$, $m\nless s$ 이므로 $s=m$ 이다.

정리 2. 정의 2와 정의 3은 서로 동치이다.
증명. $A=\{v\in\mathbb{R}\mid v<a_n$ 을 만족하는 자연수 n은 많아야 유한이다$\}$, $\inf\{s_k\mid k\in\mathbb{N}\}=t$, $\inf A=h$ 라고 하자.
이때 $a_n>s_k \Rightarrow 1\le n<k \Rightarrow s_k\in A$

따라서 $\{s_k\mid k\in\mathbb{N}\}\subset A$ 이고 $h\le t$ 이다. … ①

$t>h$ 라고 가정하자. 그러면 $h\le v<t$ 인 $v\in A$ 가 존재하여 임의의 자연수 n에 대하여 $v<s_k$ 이고 결국 $v\notin\{s_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ 이다. 이것은 $\{s_k\mid k\in\mathbb{N}\}\subseteq A$ 에 모순이다.

따라서 $t\le h$ 이다. … ②
그러므로, ①과 ②에 의해서 $\inf\{s_k\mid k\in\mathbb{N}\}=\inf A$ 이다.

정리 3. 정의 1과 정의 2는 서로 동치이다.
증명. $\mathrm{lub}\,\ell_a=t$, $\lim s_k=h$ (t와 h는 실수) 라고 하자.
이때 $s_1=\sup A_1$ 이므로, $s_1-1<a_{n_1}\le s_1$ 을 만족하는 자연수 n_1이 존재한다.
마찬가지로 $s_2=\sup A_2$ 이므로, $s_2-\frac{1}{2}<a_{n_2}\le s_2$ 를 만족하는 자연수 $n_2(>n_1)$ 를 잡을 수 있으며 일반적으로, 임의 $k\in\mathbb{N}$ 에 대해, $s_k-\frac{1}{k}<a_{n_k}\le s_k$ 를 만족하는 자연수 $n_k(>n_{k-1})$ 를 잡을 수 있다.

따라서 임의의 $k\in\mathbb{N}$ 에 대하여 $s_k-\frac{1}{k}<a_{n_k}\le s_k$ 를 만족하는 증가하는 자연수열 $\langle n_k\rangle$ 가 존재한다. 조임정리에 의해 $\lim a_{n_k}=\lim s_k$ 이고, 또한 $t=\mathrm{lub}\,\ell_a$ 이므로, 결과적으로, $h\le t$ 이다.

또한, 임의의 $\langle a_n\rangle$ 의 수렴하는 부분수열 $\langle a_{n_k}\rangle$ 에 대하여 $a_{n_k}\le s_{n_k}$, $\forall n_n\in\mathbb{N}$ 이다. 따라서 $\lim a_{n_k}\le\lim s_{n_k}$ 이고, $t\le h$ 이다.
따라서 $t=h$, 즉 $\mathrm{lub}\,\ell_a=\lim s_k$ 이다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 해석학 강좌를 운영하는 과정에서 얻어진 한 학생의 유연한 수학적 사고에 의한 수학적 발명의 사례를 제시하였다. 그는 한 개념에 대해서 정의가 다른 3종류의 책을 바탕으로 그 정의들의 특성을 비교 연구하고 그 정의들이 서로 동치인 것을 나름대로 증명한 것을 가져와 일대일로 그 증명의 참, 거짓에 관해 진지하게 다루었다. 그것은 그의 수학적 능력에 따라서 그의 학습 의욕이 성장한다는 것 보다는 반대로 그의 유연한 수학적 사고를 바탕으로 한 학습의욕에 따라서 그의 수학적 능력이 성장하고 있다는 것을 확연히 느낄 수 있는 계기였다. 이는 정의적 영역과 신체적 영역이 인지적 영역의 발달에 지대한 영향을 끼치는 것을 의미한다고 할 수 있다. 유연한 수학적 사고, 유연한 창의적 문제해결 능력, 수학적 발명 등은 수학교육의 전 과정에서 강조되어야 하는 핵심개념들이라 할 수 있다. 특히 대학의 교육과정에 적절한 수준에서의 유연한 수학적 사고를 바탕으로 한 창의적 사고의 형성을 위한 여지를 마련해야 한다. 이것은 많은 수학적 개념에 대해 초등 및 중등학교 수준의 수학교육 뿐 만 아니라, 대학교 수준의 수학교육에서도 적극적인 교수학적 관심과 연구가 이루어져야 함을 의미한다고 할 수 있다. 수학자들의 창조적인 작업의 결과는 논증적인 추론, 즉 하나의 증명이라는 주장은 유연한 사고에 의한 창의적인 수학활동 즉 수학적 발명에서 증명의 역할의 중요성을 의미하기 때문이다.

본 연구에서는, 정규 수업 시간이 아닌 학습 시간을 따로 마련하여 매주 3시간씩 세미나를 통해서 얻은 결과를 제시했다. 교육대학원 수학교육 전공에 재학 중인 그의 요청에 의해 매주 목요일 오후 2시-5시에 학생 스스로가 발표 준비에 적극적으로 임하겠다는 구두 각서를 받고 시작했지만, 학생 스스로 세미나 준비에 임하는 학습 태도는 매우 적극적이었고 진지했다. 그 결과로 그는 자발적으로 상극한에 관한 서로 다른 정의의 동치성에 관해 조사를 하고 증명하였다.

같은 개념을 다양하게 표현하고, 다양한 표현들 간의 관계를 조사하여 새로운 아이디어를 창출하는 가장 기본적인 학습 도구는 수학적 사고의 柔軟性이라고 할 수 있다. 이것은 발명적 수학적 사고(inventive mathematical thinking)에 직결되어 창의적인 수학 문제풀이 능력을 신장한다. 따라서 학습자와 교사는 서로 합심하여 학습자의 정의적 영역을 광범위하게 활용하여 학습자의 수학적 사고의 유연성 향상에 최선을 다하는 것이 보다 나은 학습 환경이 될 것이다.

참고문헌

[1] 도종훈, 수학문제 해결과정에서 사고(발상)의 전환과 불변성의 인식, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 2009, 5, 제 48권 제 2호, 183-190.

[2] 전평국, 정의적 특성이 수학적 문제 해결에 미치는 영향, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제 30권 제 3호 (1991, 12), pp. 25-38.

[3] 정동명・조승제(2004), 실해석학 개론, 서울:경문사.

[4] 최영기, 도종훈, 수학적 사고의 유연성과 확산적 사고, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 2005, 2, 제 44권 제 1호, 103-112.

[5] R. G. Bartle (1976), The Elements of Real Analysis. 2nd Ed., John Wiley & Sons Inc. New York.

[6] R. G. Bartle & D. R. Sherbert (2000). Introduction to Real Analysis, 3rd Ed., John Wiley & Sons Inc. New York.

[7] P. R. Halmos (1982), A Hilbert Space Problem Book, Springer-Verlag, New York.

[8] R. Johnsonbaugh & W. E. Pfaffenberger (1981), Foundations of Mathematical Analysis, Marcel Dekker, Inc., New York.

[9] NCTM, Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making, www.nctm.org/hsfocus (2009, pp. 9-10).

[10] A. Schoenfeld (1985), Mathematical Problem Solving, Academic Press, New York.

[11] L. B. Warner, L. J. Alock, J. Coppolo Jr. and G. E. Davis, How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding?, International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference (Honolulu, HI, Jul 13-18, 2003), v4 p371-378.

Byung-Soo Lee
Department of Mathematics
Kyungsung University
Busan 608-736, Korea
E-mail address: bslee@ks.ac.kr