

# 주파수영역 오차함수의 모델링과 분석을 통한 제로위상 FIR 필터 설계

종신회원 전 준 현\*

## Design of Zero-phase FIR Filters Through the Modeling and Analysis of A Frequency-domain Error Function

Joonhyeon Jeon\* *Lifelong Member*

### 요 약

MAXFLAT(maximally flat) FIR 필터 설계는 폐쇄형 솔루션을 제공하는 장점이 있으나 설계의 정확성을 위하여 평탄차수를 정확하고 효율적으로 결정하는 문제가 아직 남아 있다. 본 논문에서는 폐쇄형 솔루션에서 주파수영역 오차함수를 모델링하고 분석하므로써 직접적이고 정확하게 평탄차수를 결정하는 방법을 제안하였다. 마지막으로 주파수영역 오차함수를 바탕으로 제안한 차단주파수와와 최소거리 방식이 기존의 Herrmann 방식에 비해 매우 정확하고 효율 적이라는 것을 입증하였다.

**Key Words** : MAXFLAT FIR, nonrecursive filter, zero-phase filter, FIR, digital filter

### ABSTRACT

Maximally flat (MAXFLAT) FIR filter design provides the advantage of giving a closed-form solution , but there still remains a problem of exactly and efficiently choosing the order of flatness for the accurate design of filters. This paper provides, through the modeling and analysis of a frequency-domain error function in the closed-form solution, how to determine the order of flatness. A proposed method, based on the frequency-domain error function, is accomplished by computing a minimum distance between its peak frequency and specified cutoff frequency. It is also shown that the proposed scheme is computationally efficient and accurate than the empirical formula given by Herrmann

### 1. 서 론

일반적인 MAXFLAT(maximally flat) FIR(Finite Impulse Response) 필터 설계는 폐쇄형(closed form)에서 주파수 응답함수(frequency response function)를 제공하는 장점이 있으나 아직까지 차단주파수오차(cutoff frequency error)가 발생하는 설계적인 문제점이 남아 있다<sup>[1-7]</sup>. 이것은 기존의 폐쇄형 솔루션(closed form solution)들이 설계된 필터의 통과대역(pass

band)과 정지대역(stop band)에서 MAXFLAT 진폭응답을 완벽하게 구현하지만, 폐쇄형에서 필터 평탄차수  $K$ 의 부정확성으로 인하여 천이대역(transition band)에서 원하는 차단주파수응답(desired cutoff frequency response)을 제공하지 못하기 때문이다<sup>[4-7]</sup>. 따라서 필터 설계에서 정확히 요구된 필터 차단주파수(filter cutoff frequency response)를 갖는 MAXFLAT FIR 필터들을 얻기 위해서는 주어진 필터차수  $2N$ 과 차단주파수에 대해  $K$ 을 정확하게 결정할 수 있는 분명

※ 본 논문은 교육과학기술부 지식경제부의 출연금으로 수행한 출연금으로 수행한 산학협력중심대학육성사업의 연구 결과입니다.

\* 동국대학교 서울캠퍼스 공과대학 컴퓨터정보통신공학부 (memory@dgu.edu)

논문번호 : KICS2011-01-036, 접수일자 : 2011년 1월 13일, 최종논문접수일자 : 2011년 6월 23일

한 관계식(accurate expression)이 필요하다. 그럼에도 불구하고 대부분의 방법들은 다양한 폐쇄형 함수들을 제시 하였으나 근사화된  $K$ 을 구하는 경험적인 관계식(empirical relation)들을 사용하였다<sup>[4-7]</sup>. 이 경우 설계된 필터의 진폭응답에서 심각한 차단주파수 오류가 발생하며, 정확한 진폭응답을 요구하는 디지털 신호처리 시스템에서 많은 문제가 발생하게 된다. Herrmann<sup>[4]</sup>이  $K$  결정을 위한 경험적인 관계식을 발표한 이래 많은 설계 방식들에서 그의 공식을 사용하거나 정확도를 높이기 위한 분석이 이뤄졌다<sup>[6,7]</sup>. 예로서 Miller<sup>[5]</sup>와 Thajchayapong등은 Herrmann이 제안한 경험적 관계식을 수정 없이 그대로 사용하였으며<sup>[6]</sup>, 또한 RAJAGOPAL등은 Herrmann이 사용한 경험적 관계식에 대한 이론적 분석을 제공하였으나 문제 해결 방법은 제시하지 않았다<sup>[7]</sup>. 최근에 발표된 일반화된 폐쇄형 솔루션(Generalized closed-form solution)<sup>[8]</sup>은 필터의  $N$ 과  $K$ 에 관계없이 “cutoff-error free”을 갖는  $N$ 개의 선형위상 필터들을 얻을 수는 있으나, MAXFLAT 진폭응답을 갖는 하나의 필터를 얻기 위한  $K$ 의 결정 방식이 간접적이고 경험적 관계식일 뿐만 아니라 복잡한 단점이 있다<sup>[8]</sup>. 이와 같이 현재까지 발표된 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식들에서 폐쇄형 솔루션들은 성공적으로 제안되었으나 필터를 정확하게 구하기 위한  $K$ 의 결정에 대한 문제점은 아직 남아 있음을 알 수가 있다. 따라서 본 논문에서는  $K$ 을 명료하고 정확하게 결정하는 방법을 도출하기 위하여 참고문헌 [8]의 발전된 폐쇄형 솔루션을 수정 보완하여 주파수영역 오차함수를 모델링(frequency-domain error function)하고 분석을 하였다. 또한 이를 바탕으로 기존에 가장 많이 알려진 Herrmann의 경험적 관계식을 분석하고 문제점을 규명하였다. 마지막으로 주파수영역 오차함수를 기반으로 제안된 차단주파수와 최소거리 방식을 Herrmann<sup>[4]</sup>과 참고문헌 [8]의 폐쇄형 솔루션에 적용하여 성능을 평가 분석하였다.

제2장에서는 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계방식들의 폐쇄형 솔루션에 대한 분석과 평탄차수 결정시의 문제점을 설명하였으며, 제3장에서는 본 논문에서 제시한 주파수영역 오차함수의 모델링과 분석을 하였으며, 이를 바탕으로 평탄차수 결정을 위한 차단주파수와 최소거리 방식을 제안하였다. 제4장에서는 제안한 방식에 대한 성능을 평가하였으며, 끝으로 제5장에서는 결론을 맺었다.

## II. 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식 분석

### 2.1 폐쇄형 다항식

일반적으로 실계수가 대칭이고 제로위상을 갖는  $2N$ 의 필터 차수의 저역통과 FIR 필터의 전달함수  $H(z)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{2N} h_n z^{-N+n} \quad (1)$$

여기서  $h_n = h_{2N-n}$ 이다. 이 필터의 주파수응답은  $z = e^{jw}$ 을 대입하므로써 다음과 같이 표현될 수가 있다.

$$H(e^{jw}) = h_N + 2 \sum_{n=1}^N h_{N-n} \cos(nw) \quad (2)$$

이때 저역통과 FIR 필터가 통과대역 과 저지대역에서 MAXFLAT한 진폭응답(magnitude response)을 갖기 위해서는 필터의 진폭응답 함수  $H(w)$ 가 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다<sup>[4-8]</sup>.

$$\left[ \frac{\partial^k H(e^{jw})}{\partial w^k} \right]_{w=0} = 0, \quad k=1, 2, \dots, 2(N-K)+1 \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial^k H(e^{jw})}{\partial w^k} \right]_{w=\pi} = 0, \quad k=1, 2, \dots, 2K-1 \quad (4)$$

여기서  $N-K$ 와  $K$ 는  $w=0$ 과  $w=\pm\pi$ 에서  $H(e^{jw})$ 의 평탄 정도를 나타내는 파라메타들이다.

제로위상을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위하여 사용된 Herrmann<sup>[4]</sup>의 Hermite 다항식, Miller<sup>[5]</sup>의 등각사상 변환 함수, RAJAGOPAL등<sup>[7]</sup>의 Bernstein 다항식 그리고 “cutoff-error free”의 발전된 폐쇄형 솔루션<sup>[8]</sup>의 필터 계수를 얻기 위한 폐쇄형 전달함수는 아래와 같이 나타낼 수가 있다.

$$H(z) = \left( \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2} \right)^{2K} \left\{ \sum_{j=0}^{2(N-K)} g_j z^{-(N-K)+j} \right\} \quad (5)$$

여기서  $g_j = g_{2(N-K)-j}$ 이다. 따라서 식(1)의 임펄스 응답  $h_n$ 을 구하기 위해 필요한 중첩계수(interpolation coefficients)  $g_j$ 는 각 폐쇄형 솔루션들을 식(5)와 같은 전달함수로 변환하므로써 구할 수가 있으며, 이때 폐

쇄형 주파수 응답은 다음과 같이 표현될 수 있으므로

$$H(e^{jw}) = \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{2K} \times \left\{ g_{N-K} + \sum_{j=1}^{N-K} g_{N-K-j} \cos(jw) \right\} \quad (6)$$

각 폐쇄형 솔루션들로부터 얻어진  $H(e^{jw})$ 는 식(3)의 평탄조건을 만족한다. 이때 폐쇄형 솔루션들의 특징은  $g_j$ 가  $N$ 과  $K$ 만으로 표현될 수 있으므로 만일  $N$ 과  $K$ 가 주어진다면 필터 임펄스응답인  $h_n$ 은  $g_j$ 와 관계식으로부터 직접 구할 수가 있다는 장점이 있다 (참고문헌 [8]의 식(26)과 식(29) 참조). 따라서  $N$ 이 주어질 경우 식(6)에서처럼 설계되는 필터의 주파수응답은  $K$ 에 의해 결정되기 때문에  $K$ 을 정확하게 선택해야 하는 문제가 있다. 예를 들어 Herrmann은 식(2)에서  $\cos w = 1 - 2x$ 의 변환을 통하여 Hermite 보간 다항식(interpolation polynomial)을 기반으로 하는 다음과 같은 폐쇄형 다항식을 제안하였다

$$P_{N,K}(x) = (1-x)^K \sum_{j=0}^{N-K} d_j x^j, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7)$$

여기서

$$d_j = \binom{K-1+j}{j} = \frac{(K-1+j)!}{(K-1)! j!} \quad (8)$$

위의 Herrmann 다항식은 필터계수를 구하기 위하여 식(5)의 전달함수로 변환될 수 있는 가장 잘 알려진 폐쇄형 솔루션으로 나중에 발표된 Miller<sup>[5]</sup>의 등각 사상 변환 함수와 RAJAGOPAL 등<sup>[7]</sup>의 Bernstein 다항식들도 이와 동일한 형태의 폐쇄형 다항식으로 표현될 수 있음이 증명되었다.

### 2.2 Herrmann의 설계 방식<sup>[4]</sup>

앞 절에서 설명된 바와 같이 제로위상을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위하여 사용된 Herrmann<sup>[4]</sup>의 Hermite 다항식, Miller<sup>[5]</sup>의 등각 사상 방식, RAJAGOPAL 등<sup>[7]</sup>의 Bernstein 다항식은 모두 동일한 전달함수와 주파수응답함수로 표현할 수가 있다. 따라서 식(7)에  $x = (1 - \cos w)/2$  변환을 사용하여 Herrmann<sup>[4]</sup> 다항식의 저역통과 필터 함수  $H_0(e^{jw})$ ,  $-\pi \leq w \leq \pi$ 을 나타내면 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$H_0(e^{jw}) = \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{2K} \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left( \sin \frac{w}{2} \right)^{2j} \quad (9)$$

식(17)에서 주어진  $N$ 에 대하여  $H_0(e^{jw})$ 의 진폭응답특성은 평탄차수  $K$ 에 의하여 결정됨을 알 수가 있다. 그러나 필터차수  $2N$ 에 대하여  $N$ 개의 서로 다른 진폭응답을 나타내는  $N$ 개 필터가 존재한다. 따라서  $N$ 개의 다른 진폭응답들 중에서 원하는 차단주파수  $w = w_c$ 을 만족하는  $K$ 을 결정해야 한다. Herrmann<sup>[4]</sup>은 식(9)을 이용하여 주어진 차단주파수  $w_c$ (이때 식(7)의 다항식에서  $x_c = (1 - \cos w_c)/2$ 이 된다)를 갖는 필터의  $K$  값을 결정하기 위하여 다음과 같은 경험적인 관계식을 사용하였다.

$$K = N - \text{int} \left( \frac{1}{2} N (1 - \cos w_c) + 0.5 \right) \quad (10)$$

그러나 이러한 관계식은  $H_0(e^{jw})$ 가 결코 원하는 주파수응답을 만족하지 못하는 심각한 문제점을 갖고 있다. 예를 들어 그림 1은 식(10)에서  $w_c = 0.369\pi$ (이것은  $x_c = 0.3$ 에 해당된다)일 때 주어진  $N$ 에 대하여 다양한  $K$ 에 따른  $H_0(e^{jw})$ 의 응답 특성들을 나타낸 것이다. 그림에서 나타낸 바와 같이 필터 차단주파수가 요구되었던  $w_c = 0.369\pi$ 와 많은 차이가 있고, 이때 아래와 같은 차단주파수 이득오차(cutoff-frequency gain error)  $e_{-3dB}$ 을 발생시킨다.

$$e_{-3dB} = \frac{1}{\sqrt{2}} - H_0(e^{jw_c}) \quad (11)$$

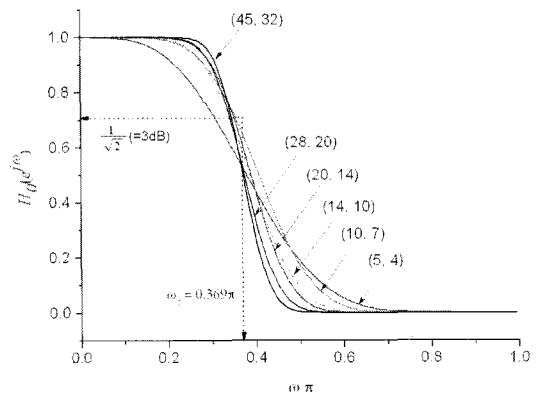


그림 1.  $H_0(e^{jw})$  응답 특성<sup>[4]</sup>

2.3 “cuoff-error free”를 갖는 설계 방식<sup>[8]</sup>

요구된 차단주파수를 갖는 제로위상의 MAXFLAT FIR 저역통과 필터를 정확하게 얻기 위해서는 먼저 임의의 차단주파수  $w_c$ 을 갖는 일반화된 폐쇄형 주파수 응답 함수가 반드시 필요하다. 따라서 참고문헌 [8]의 논문에서는 이러한 함수를 얻기 위하여 Herrmann이 제안한 식(9)의 폐쇄형 주파수 응답 함수에 새로운 차단 오차제어 계수(cutoff-error control coefficient)  $C_K$ 을 도입하여 “cuoff-error free”를 갖는 폐쇄형 주파수 응답 함수를 아래와 같이 제안하였다<sup>[8]</sup>.

$$H(e^{jw}) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{2K} \times \left\{ \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2j} + 2^{2(N-K)} C_K \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2(N-K)} \right\} \quad (12)$$

여기서 식(12)는 식(9)의 폐쇄형 주파수 응답을 포함한 주파수 응답으로 나타낸 것으로 참고문헌 [8]의 (21)식을 일부 수정하였으며, 계수  $\Omega_{N-K, K}$ 도  $2^{2(N-K)} C_K$ 로 변경하였다. 따라서 식(12)로부터  $C_K$ 는  $H(e^{jw})$ 가 항상 요구된 차단주파수를 만족하도록 -3dB 이득 조건인  $H(e^{jw_c}) = 1/\sqrt{2}$ 을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$C_K = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\cos \frac{w_c}{2}\right)^{2K} \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left(\sin \frac{w_c}{2}\right)^{2j}}{2^{2(N-K)} \left(\cos \frac{w_c}{2}\right)^{2K} \left(\sin \frac{w_c}{2}\right)^{2(N-K)}} \quad (13)$$

식(12)의  $H(e^{jw})$ 는  $C_K$ 에 의하여  $N-K$ 와  $K$ 에 관계없이  $w = w_c$ 에서  $-3dB (= 1/\sqrt{2})$  값을 항상 만족하며,  $C_K = 0$ 의 경우 식(9)와 동일함을 알 수가 있다. 그러나 식(12)의 주파수 응답을 갖는 필터는 주어진 필터차수  $N$ 에 대하여  $1 \leq K \leq N$ 에 해당하는  $N$ 개의 서로 다른 진폭응답을 갖는 필터가 존재하기 때문에 MAXFLAT 진폭응답을 갖는 필터를 선택하기 위한  $K$ 를 결정하는 문제가 남아 있다.

따라서 참고문헌 [8]에서는  $K$ 를 결정하기 위하여 참고문헌 [8]의 식(19)을 본 논문의 식(12)과 같이 수정하였을 때 다음과 같이 경험적이고 간접적인 관계식을 이용하였다.

$$-1 < C_K \leq 0 \quad (14)$$

즉, 주어진  $N$ 과  $w_c$ 에 대하여  $1 \leq K \leq N$  범위에서

$C_K$ 의 가장 작은 음의 값을 갖는  $K$ 을 식(14)의 범위 내에서 선택하는 컴퓨터에 의한 최적의 설계 방법으로 매번  $C_K$ 을 계산해야하는 어려움이 존재한다. 또한 참고문헌 [8]에서는 식(14)의 도출에 대한 정확한 분석이 이루어지지 않았었다.

III. 제안 방식

이제까지 설명된 바와 같이 식(12)의 폐쇄형 주파수 응답을 갖는 필터 설계는 “cuoff-error free”를 갖는 필터를 얻을 수가 있으나 MAXFLAT 주파수 응답을 얻기 위한 정밀한  $K$  값을 결정하는 방법론 적인 문제가 남아 있다. 본 장에서는 식(11)에서 주파수영역 오차함수를 모델링하고 분석하므로 써 기존 Herrmann이 제안한 경험적 관계식인 식(10)의 문제점을 파악하고 참고문헌 [8]에서 제시한 식(14)보다 간편하고 보다 정밀한  $K$  값을 결정하는 방법을 제시하고자 한다.

3.1 주파수영역 오차함수의 모델링과 분석

앞서 설명한 “cuoff-error free”를 갖는 폐쇄형 주파수 응답 함수인 식(12)의  $H(e^{jw})$ 는 Herrmann에 의해 주어진 식(9)의 폐쇄형 주파수 응답  $H_0(e^{jw})$ 을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$H(e^{jw}) = H_0(e^{jw}) + A(e^{jw}) \quad (15)$$

여기서  $A(e^{jw})$ 는 주파수영역 오차함수로서

$$A(e^{jw}) = 2^{2(N-K)} C_K \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{2K} \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2(N-K)} \quad (16)$$

와 같으며, 이때 식(13)의  $C_K$ 는 아래와 같이 다시 표현될 수가 있다.

$$C_K = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - H_0(e^{jw_c})}{2^{2(N-K)} \left(\cos \frac{w_c}{2}\right)^{2K} \left(\sin \frac{w_c}{2}\right)^{2(N-K)}} \quad (17)$$

이때  $w = w_c$ 에서  $A(e^{jw_c})$ 는 식(17)을 식(16)에 대입하므로 써 아래와 같이 표현되며

$$A(e^{jw_c}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - H_0(e^{jw_c}) \quad (18)$$

식(11)의 Herrmann 오차인  $e_{-3dB}$ 와 같음을 알 수 있다. 식(15)로부터  $H(e^{jw})$ 는 주어진  $K$ 에 대하여 분명한 두 개의 주파수 함수의 합으로 이뤄진 것을 알 수가 있는데, 하나는 “필터 통과대역과 정지대역의 평탄”의 주파수 응답을 나타내는  $H_0(e^{jw})$ 와 다른 하나는 “주파수영역 오차 특성”을 나타내는  $A(e^{jw})$ 이다. 식(15)을 기반으로 하는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터들의 이상적인 설계는  $A(e^{jw})=0$ 을 위한  $K$ 을 선택하는 것이나 식(6)과 같이 표현되는 폐쇄형 솔루션에서는 실제로 불가능하다. 이것은  $C_K=0$ 을 만족 하는 정수 값  $K$ 이 존재하지 않기 때문이다. 그러므로 폐쇄형 솔루션에서의 최적 설계는  $A(e^{jw})=0$  ( $0 \leq w \leq \pi$ )에 가장 근접하도록 하는  $K$ 을 결정하는 것이다.

식(16)으로부터  $A(e^{jw})$ 은  $w=0$  과  $w=\pi$ 에서 “제로 이득”을 갖는 반면 “bell-curve shape”의 이득을 갖는 스펙트럼을 나타냄을 알 수가 있다. 따라서  $A(e^{jw})$ 는 단 하나의 최대 진폭을 갖으며, 이를 통하여  $A(e^{jw})$ 의 진폭응답 특성을 정의할 수가 있다. 만일 주어진  $N$ ,  $K$ 와  $w_c$ 에 대하여  $w=w_K$  ( $0 \leq w_K \leq \pi$ )에서  $A(e^{jw})$ 의 최대진폭을  $A(e^{jw_K})$ 라고 하였을 때,  $w_K$ 는  $\partial A(e^{jw})/\partial w=0$ 로부터 아래와 같이 얻을 수가 있으며

$$w_K = \arccos\left(\frac{2K-N}{N}\right) \quad (19)$$

그때  $A(e^{jw_K})$ 는  $w=w_K$ 일 때의 식(19)을 이용하여 구한 다음의 변환 식들을 식(16)에 대입하므로써

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{w_K}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1+\cos w_K) = \frac{K}{N} \\ \left(\sin \frac{w_K}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1-\cos w_K) = 1 - \frac{K}{N} \end{aligned} \quad (20)$$

아래 식과 같이  $K$ 에 관하여 표현될 수가 있다.

$$A(e^{jw}) = 2^{2(N-K)} C_K \left(\frac{K}{N}\right)^{2K} \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{2(N-K)} \quad (21)$$

식(21)에서  $1 \leq K \leq N$ 에 해당되는  $N$ 개의 서로 다른  $A(e^{jw_K})$ 가 존재함을 알 수가 있으며, 만약 식(19)에 따라  $w_K=w_c$ 을 만족하는  $K$ 가 선택되어 질

수 만 있다면  $A(e^{jw_K})$ 의 가장 작은 진폭의 값은 식(18)의  $A(e^{jw_c})$ 가 된다.

$$\begin{aligned} A(e^{jw_K})|_{w_K=w_c} &= A(e^{jw_c})|_{w_c=w_K} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{K}{N}\right)^{2K} \sum_{n=0}^{N-K} \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{2(N-K)} \end{aligned} \quad (22)$$

이때  $C_K$ 는 또한  $K$ 에 관하여 표현되질 수가 있다.

$$C_K = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{K}{N}\right)^{2K} \sum_{n=0}^{N-K} \left(1 - \frac{K}{N}\right)^n}{2^{2(N-K)} \left(\frac{K}{N}\right)^K \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{N-K}} \quad (23)$$

또한 식(19)로부터  $K$ 는 다음 아래 식과 같이 나타낼 수가 있다

$$K = \frac{N(1+\cos w_K)}{2} = N - \frac{N(1-\cos w_K)}{2} \quad (24)$$

### 3.2 평탄차수 $K$ 결정을 위한 방법

평탄함수  $H_0(e^{jw})$ 와 오차함수  $A(e^{jw})$ 로 기술되는 식(15)의 주파수 응답  $H(e^{jw})$ 을 갖는 필터 설계의 경우 서로 다른 진폭응답을 갖는  $N$ 개의 다른 필터들 가운데 MAXFLAT 진폭응답을 갖는 최적 필터를 얻기 위한  $K$ 을 선택하는 문제가 아직 남아 있다. 식(15)에서  $A(e^{jw})$ 는  $H(e^{jw})$  스펙트럼에 정확한 차단주파수 응답을 제공하는 반면  $w=w_K$ 주변에 불필요한 진폭을 갖는 스펙트럼을 제공한다. 따라서 앞서 설명한 바와 같이 폐쇄형 솔루션에서의 최적 설계는  $A(e^{jw})=0$  ( $0 \leq w \leq \pi$ )에 가장 근접하는, 즉  $A(e^{jw_K})=0$ 에 근사하도록 하는  $K$ 을 결정하는 것이다. 예를 들어 그림 2는  $N=15$ 와  $w_c=0.369\pi$ 일 때  $K$  증가에 따른  $A(e^{jw_K})$ 와  $H(e^{jw})$ 을 나타낸 것이며, 표1에서는 관련된 파라미터 값들을 보여준다. 결론적으로  $K=10$ 일 때  $A(e^{jw_K}) \approx 0$ 으로 인한  $H(e^{jw_K})$ 는 어떠한 진폭 오차도 갖지 않는 MAXFLAT 주파수 응답을 갖는다는 사실을 알 수가 있다. 이것은  $K=10$  (식(19)로부터 얻은  $w_{10}=0.393\pi$ )일 때,  $A(e^{jw_K})$ 의 가장 적은 음의 진폭(smallest negative amplitude) 값에 해당되는  $A(e^{jw_{10}})=-0.0145$ 을 갖기 때문이다. 이때  $w_K-w_c$ 는 가장 적은 양의 값(smallest positive value)인  $w_{10}-w_c=0.0228\pi$ 을 갖는다는 사실을 알 수가 있

다. 특히,  $w_K$ 가 주어진  $w_c$ 로부터 멀어질수록 통과대역에서  $A(e^{jw}) > 0$ 에 의한 오버슈트(overshoot) 또는 정지대역에서  $A(e^{jw}) \ll 0$ 에 의한 언더슈트(undershoot)와 같은 왜곡이 발생함을 알 수가 있다. 결론적으로 식(15)에서 MAXFLAT 주파수 응답을 갖는 필터를 실현시키기 위한  $K$ 는 식(19)에 따라 얻어진  $w_K$ 가 다음 식의 표현과 같이  $w_K - w_c$ 의 가장적인 양의 값을 갖을 때 얻어진다.

$$K := (w_K - w_c > 0)_{min} \quad (25)$$

현재까지의 결과를 바탕으로 하였을 때, 그림 3은 폐쇄형 솔루션을 사용한 MAXFLAT FIR 필터의 설계과정을 예로써 나타낸 것이다.

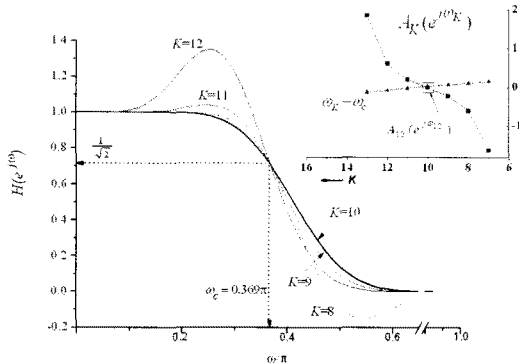


그림 2.  $N=15$ 와  $w_c = 0.369\pi$ 일 때 증가하는  $K$ 에 따른  $A(e^{jw_K})$ 와  $H(e^{jw})$

표 1. 그림 1과 관련된 파라미터들

parameters	K					
	7	8	9	10	11	12
$N-K$	8	7	6	5	4	3
$C_K$	-0.784	-1.176	-1.342	-0.207	4.673	17.152
$w_K/\pi$	0.521	0.479	0.436	0.392	0.346	0.292
$\frac{w_K - w_c}{\pi}$	0.152	0.110	0.067	0.023	-0.024	-0.074
$A(e^{jw_c})$	-0.278	-0.243	-0.162	-0.015	0.192	0.410
$A(e^{jw_K})$	-1.621	-0.608	-0.227	-0.015	0.200	0.604
$\delta_U/\delta_S$	-1.7011)	-0.1501)	-1E-71)	0	0.0402)	0.3492)

- 1)  $\delta_U$  : peak undershoot
- 2)  $\delta_S$  : peak overshoot

#### IV. 실험 결과

본 장에서는 앞서 설명한 주파수영역 오차함수 모

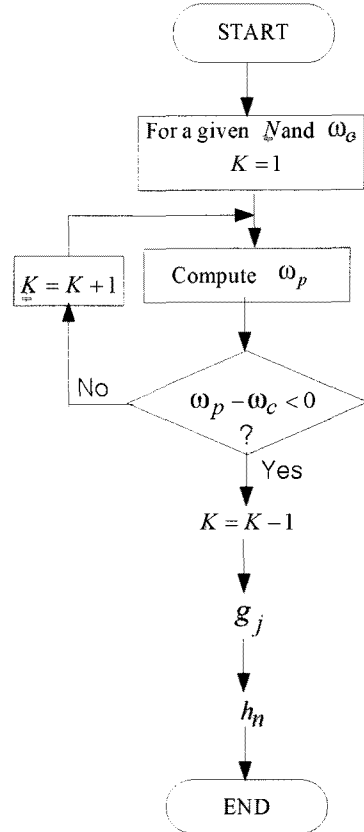


그림 3. MAXFLAT FIR 저역 필터를 얻기 위한 설계과정

델팅과 분석 결과로서 도출된 차단주파수 근접에 의한 평탄차수  $K$ 의 결정 방식을 식(9)와 식(12)의 폐쇄형 솔루션에 적용하였을 때의 필터 주파수응답 특성을 나타내었으며, 이를 바탕으로 제안한 차단주파수와 의 최소거리 방식의 타당성을 입증하고자 한다. 그림 4는  $w_c = 0.369\pi$ 일 때 임의의 필터차수  $N$ 에 대하여 식(10)의 Herrmann 방식과 제안된 식(25)의 제안 방식에 적용하였을 때 얻어진  $K$ 들에 대하여 비교한 결과이다. 그림 5는 그림 4의  $K$  결과 값들을 Herrmann 의 폐쇄형 솔루션인 식(9)의  $H_0(e^{jw_c})$ 에 적용하여 차단이득오차인 식(11)의  $e_{-3dB}$ 을 비교한 것이며, 그림 6은 주어진  $N=20$ 일 때 Herrmann의 폐쇄형 솔루션인 식(9)에 의해 설계된 필터의 주파수 응답을 비교한 것이다. 그림 5와 그림 6에서 나타난 바와 같이 제안된 방식 식(25)가 Herrmann이 사용한 경험적인 식(10)보다 줄어든  $e_{-3dB}$ 을 갖는 것을 알 수가 있다. 그림 7은 식(12)의 폐쇄형 솔루션  $H(e^{jw})$ 에 적용하였을 때 주파수 응답을 나타낸 것으로 평탄한 주파수 응답을 갖는 것을 알 수가 있다.

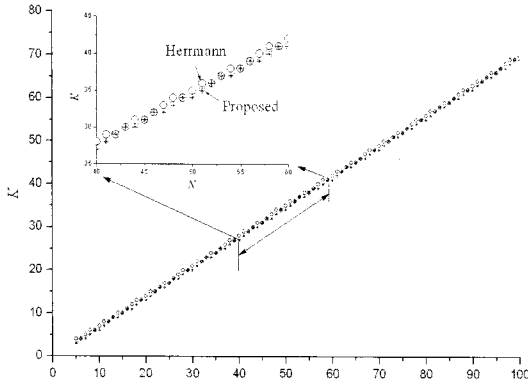


그림 4.  $\omega_c = 0.369\pi$ 일 때  $N$ 에 따른  $K$  값 결정방식 비교

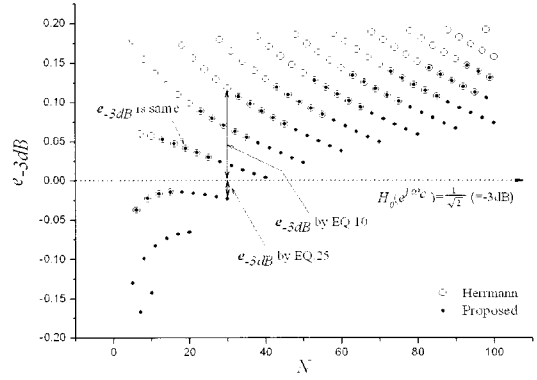


그림 5. 그림 4에 따른  $H_0(e^{j\omega})$ 의  $e_{-3dB}$  비교

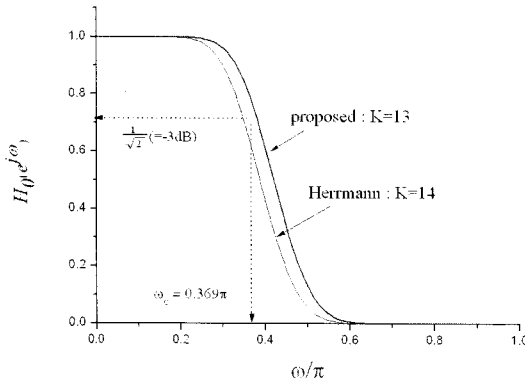


그림 6.  $N=20$ 일 때 두 방식의  $H_0(e^{j\omega})$  비교

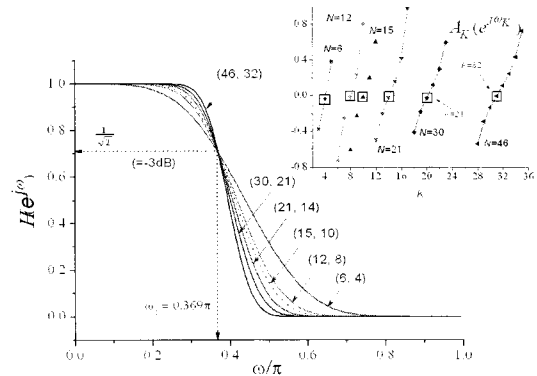


그림 7. 차단주파수와의 최소거리 방식을 적용한  $A(e^{j\omega})$ 와  $H(e^{j\omega})$  응답 특성

## V. 결론

본 논문에서는 먼저 폐쇄형 주파수 응답을 제공하는 MAXFLAT FIR 필터 설계에서 매우 중요한 평탄차수 결정을 위해 기존에 제안되었던 Herrmann<sup>[4]</sup>과 JEON<sup>[8]</sup>의 문제점을 분석하였다. 이러한 기존 방식들이 갖고 있는 경험적이면서 부정확하거나 컴퓨터에 의한 최적의 설계 방법으로 계산효율이 복잡하다는 단점을 극복하기 위하여 폐쇄형 주파수응답함수에서 주파수영역 오차 함수를 모델링하고 분석하여 차단주파수 근접에 따른 평탄차수  $K$ 의 결정 방식을 제안하였다. 제안된 차단주파수와의 최소거리 방식은 기존의 방식들에 비해 간단하며 실험결과 JEON<sup>[8]</sup>의 성능에 근접하며, 계산적인 효율이 뛰어난이 입증되었다.

## 참고 문헌

[1] J. L. Sullivan and J. W. Adams, "A new

nonlinear optimization algorithm for asymmetric FIR digital filters," in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS)*, 2, pp.541-544, 1994.

- [2] Saed Samadi and Akinori Nishihara. : 'The world of flatness,' *IEEE Trans. Circuits and Systems Magazine*, Third quarter 2007, pp.38-44.
- [3] 전준현, "제로위상을 갖는 광대역저역통과 MAXFLAT FIR 필터설계를 위한 새로운 폐쇄형전달함수" *한국통신학회논문지*, Vol.32, No.7, pp.658-666, August 2007
- [4] O. Hemmann. "On the approximation problem in nonrecursive digital filter design." *IEEE Trans Circuit Theory* 18 pp.411-413. 1971
- [5] J.A. Miller, "Maximally flat nonrecursive digital filters," *Electron. Lett.* Vol.8, pp.157-158, Mar. 1972.

- [6] P. Thajchayapong, M. Puangpool and S. Banjongjit, "Maximally flat f.i.r filters with prescribed cut-off frequency," *Electron. Lett.* Vol.16, pp.514-515, June 1980.
- [7] L. R. Rajagopal and S. C. Dutta Roy, "Design of Maximally-flat FIR filters using the bernstain Poynomial," *IEEE Trans.on circuits and system*, Vol.cas-34, No.12, pp.1587-1590, Dec. 1987.
- [8] 전준현, "MAXFLAT FIR 필터의 일반적이고 간편한 설계를 위한 새로운 기술", 한국통신학회논문지, Vol.35, No.4, pp.377-385, August 2010

전 준 현 (Joonhyeon Jeon)

종신회원



1984년 동국대학교 전자공학과  
학사

1986년 한국과학기술원 전기 및  
전자 공학석사

1991년 한국과학기술원 전기 및  
전자 공학박사

1991년~1999년 한국통신 인  
터넷 연구실장 및 사업부장

2000년~2001년 한누리투자증권 리서치팀 이사

2000년~2001년 드림라인 전무

2001년~현재 동국대학교정보통신공학전공 부교수  
<관심분야> 영상통신, 영상압축, 에너지변환 등