<**학술논문**> DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2011.35.9.1091 ISSN 1226-4873

임의 형태의 삼차원 균열 모델링 및 해석§

박재학*† · G.P. Nikishkov**
* 충북대학교 안전공학과, ** The University of Aizu, Japan

Modeling and Analysis of Arbitrarily Shaped Three-Dimensional Cracks

Jai Hak Park*† and G.P. Nikishkov**
* Dept. of Safety Engineering, Chungbuk Nat'l Univ.
** The University of Aizu, Japan

(Received April 18, 2011 ; Revised May 18, 2011 ; Accepted July 15, 2011)

Key Words : Three-dimensional Crack(삼차원 균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Mesh Generation(격자생성), Symmetric Galerkin Boundary Element Method(대칭 Galerkin 경계요소법)

초록: SGBEM-FEM 교호법은 유한 물체 내에 존재하는 삼차원 균열을 해석하는 유용한 방법으로 알려져 있다. 이 방법으로 일반적인 평면 혹은 비평면 삼차원 균열에 대한 정확한 응력강도계수를 구할 수 있다. 기존의 방법에서는 균열을 모델화 하는데 8 절점 사각형 경계요소를 사용한다. 그러나 임의 형상의 균열의 경우는 3 절점 삼각형 요소를 사용하여 균열을 모델화 하는 것이 더 편리하다. 따라서 본 논문에서는 3 절점 삼각형 요소와 7 절점 사각형 요소를 사용하여 전진 프런트 법으로 균열을 모델링 하였다. 사용된 균열 모델의 정확성을 검토하기 위하여 몇 가지 형상의 균열에 대하여 응력강도계수를 구하여 기존의 해와 비교하였다.

Abstract: The SGBEM-FEM alternating method has been known to be a very effective method for analyzing three-dimensional cracks in a finite body. The accurate values of the stress intensity factor can be obtained for a general planar or nonplanar three-dimensional crack. In the existing method, eight-noded quadrilateral boundary elements are used to model a crack. In some cases, three-node triangle boundary elements are more convenient for the modeling of a crack with a general shape. In this study, a crack is modeled with three-noded triangular and seven-noded quadrilateral elements by using the advancing-front mesh generation method. The stress intensity factors are obtained for cracks with several shapes and the accuracy of results is examined.

1. 서 론

구조물에 존재하는 균열의 위험성을 평가하기 위해서는 균열에 대한 파괴변수를 정확하게 평가할 수 있어야 한다. 구조물에 존재하는 균열의 형상은 임의 형상이지만 해석할 때에는 이를 타원형 내부균열 혹은 반타원형 표면균열로 가정하여 해석을 한다. 그러나 보다 정확하게 균열을 평가하기 위해서는 임의형상의 균열을 그대로 모델링하여 해석하는 것이 필요하다.

SGBEM(symmetric Galerkin boundary element method) – FEM(finite element method) 교호법은 임의 형상의 평면 및 비평면 삼차원 균열에 대하여 SIF(stress intensity factor)를 정확하게 구할 수 있음이 알려져 있다.(1~3) 이 방법은 균열이 포함되지 않은 유한요소 해와 무한 물체 내에 존재하는 균열에 대한 경계요소 해를 번갈아 해석함으로써 원하는 해를 얻는 방법이다. 그러나 이 때 사용된 경계요소는 8 절점 사각형 요소로 임의형상의 균열을 모델링 하는 데에는 불편한 점이 있었다. 따라서 본 논문에서는 3 절점 삼각형 요소를 새로이 프로그램에 첨가하여 균열을 모델링하고 또한 해석하려고 한다.

이러한 균열 모델링 방법은 앞으로 금속 결정을 고려한 부식균열 성장 해석과 같이 성장 중 균열 형상이 아주 불규칙한 경우의 해석에 유용하게 사

§ 이 논문은 2011 년도 대한기계학회 재료 및 파괴부문 춘계학술대회(2011. 4. 21.-22., 제주대) 발표논문임
† Corresponding Author, jhpark@chungbuk.ac.kr

용될 수 있을 것이다.

제안된 방법의 정확성을 검토하기 위하여 원형 균열 및 사각형 균열에 대하여 SIF 를 구하여 기존 해와 비교하였다.

2. 대칭 Galerkin 경계요소법

2.1 대칭 Galerkin 경계요소법

무한물체 내에 존재하는 균열 문제를 해석하기 위하여 Li 와 Mear 등[4,5]이 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하였다.

무한 물체 내에 임의 형태의 평면 또는 비평면 삼차원 균열이 존재하고, 균열면 상에는 임의의 트랙션(traction)이 작용하는 경우, 균열은 상하 균열면 사이의 변위 불연속의 연속된 분포로 나타낼 수 있다. Li 와 Mear[4]는 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weak singularity)을 갖는 경계적분방정식 (boundary integral equation)이 만족됨을 보였다.[1]

$$-\int_S\int_S D_\alpha u_i^*(\mathbf{z}) C_{\alpha i\beta j}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{z}) D_\beta u_j(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) dS(\mathbf{z}) = \int_S u_k^*(\mathbf{z}) t_k dS(\mathbf{z}) \tag{1}$$

여기서 S 는 균열면, u_i 는 균열면 사이의 변위의 불연속 성분, u_i^* 는 Galerkin 법에 사용되는 시험함수(test function)의 성분, t_k 는 균열면에 작용되는 트랙션의 성분, ξ 및 z 는 좌표이다. 또한 D_α 는 접선연산자(tangential operator)이고 $C_{\alpha i\beta j}(\zeta)$ 는 낮은 특이성을 가지는 커널이다. 이들에 대한 정의는 참고문헌 1 에 주어져 있다.

균열면을 몇 개의 균열요소로 나누고 요소 내 일점에서의 변위의 불연속과 트랙션은 균열요소의 절점에서의 값과 형상함수로 기술한다고 하면 적분방정식으로 표현된 식 (1)을 식 (2)와 같이 이산화(discretization) 할 수 있다.

$$-\int_S\int_S C_{\alpha i\beta j} D_\alpha N_a(z) D_\beta N_b(\xi) dS(\xi) dS(z)\, u_{jb} = \int_S N_a N_q dS(z)\, t_{iq} \tag{2}$$

여기서 N_b 등은 형상함수, u_{jb} 는 절점에서의 변위의 불연속, t_{iq} 는 절점에서의 트랙션이다.

식 (2)를 해석하여 균열격자 절점에서의 변위 불연속을 구하면 이로부터 모드 I, II 및 III 의 응력강도계수를 다음 식으로부터 구할 수 있다.[6]

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{E\sqrt{\pi}}{(1-\nu^2)} \frac{u_3}{4\sqrt{2r}} \\ K_{II} &= \frac{E\sqrt{\pi}}{(1-\nu^2)} \frac{u_2}{4\sqrt{2r}} \\ K_{III} &= \frac{E\sqrt{\pi}}{(1+\nu)} \frac{u_1}{4\sqrt{2r}} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 u_1, u_2 및 u_3 는 각각 SIF 를 계산하는 점에서의 국부좌표계 x_1, x_2 및 x_3 방향의 균열열림변위(crack opening displacement)이고, r 은 균열선단에서부터의 거리, E 는 탄성계수, ν 는 푸아송비이다. 국부좌표계는 균열선단에 접선방향을 x_1 으로, 균열면 상에서 균열선단에 수직한 방향을 x_2 로 균열면에 수직한 방향을 x_3 로 취한다.

SGBEM-FEM 교호법에서는 대칭 Galerkin 경계요소법으로 구한 무한물체 내에 존재하는 균열에 대한 해와 유한 물체 내에 존재하고 균열이 존재하지 않는 유한요소 해를 이용하여 유한 물체 내에 존재하는 균열에 대한 해를 구할 수 있다. SGBEM-FEM 교호법에 대한 자세한 사항은 참고문헌 1 에 언급되어 있다.

2.2 삼각형 및 사각형 경계요소

3 절점 삼각형요소에서 형상함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi,\eta) &= \xi(1-\eta) \\ N_3(\xi,\eta) &= \eta \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 ξ 및 η 는 요소 내 국부좌표계이며 $0 \le \xi, \eta \le 1$ 의 값을 취한다.

균열선단에서의 특이성을 나타내기 위해서는 균열선단 요소는 8 절점 사각형 요소를 사용하여야 한다. 따라서 본 해석에서는 균열선단을 따라서는 사각형 요소를 사용하고, 내부는 삼각형 요소를 사용하여 모델링 하였다. 이때 사각형 요소와 삼각형 요소의 연결을 위하여 Fig. 1 과 같은 7 절점 요소를 사용하였다. 이때 형상함수는 다음과 같이

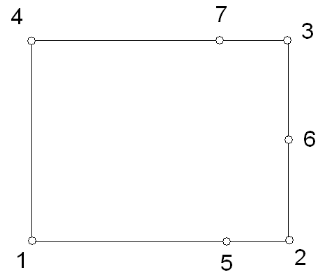


Fig. 1 7-node quadratic boundary element

된다. 여기서 $0 \le \xi, \eta \le 1$ 의 값을 취한다.

$$\begin{aligned} N_5(\xi,\eta) &= 4\xi(1-\xi)(1-\eta) \\ N_6(\xi,\eta) &= 4\xi(1-\eta)\eta \\ N_7(\xi,\eta) &= 4\xi(1-\xi)\eta \\ N_1(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1-\eta) - 0.5\times N_5 \\ N_2(\xi,\eta) &= \xi(1-\eta) - 0.5\times(N_5+N_6) \\ N_3(\xi,\eta) &= \xi\eta - 0.5\times(N_6+N_7) \\ N_4(\xi,\eta) &= (1-\xi)\eta - 0.5\times N_7 \end{aligned} \tag{5}$$

7 절점요소의 경우도 Fig. 1 의 5 번 및 7 번 절점을 변 1, 2 및 변 4, 3 의 1/4 지점으로 옮기면 변을 따라 $1/\sqrt{r}$ 의 응력의 특이성을 나타낼 수 있다. 이때 균열선단은 변 2, 3 이 된다.

3 절점 요소와 7 절점 요소를 프로그램하여 기존의 대칭 Galerkin 경계요소 프로그램[1]에 추가하였다. 프로그램은 Fortran 언어로 작성되었다. 경계요소법에서 절점 1, 4, 5 및 7 에서의 변위의 불연속을 구하게 되고 이 값과 식 (3)을 이용하여 복합모드의 SIF 를 구하게 된다.

2.3 균열격자 생성

격자의 형태는 균열해에 큰 영향을 미친다. 균열선단에서의 특이성을 유지하기 위하여 균열선단을 따라서 Fig. 1 의 7 절점 사각형 요소를 1 층 배치하였고 그 내부는 삼각형 요소를 사용하여 격자를 형성하였다. 삼각형 요소를 사용한 격자생성에서는 전진 프런트(advancing-front) 격자생성법[7]을 사용하였다. 격자생성 방법은 다음과 같다.

1. 균열 선단 안쪽에 7 절점 사각형 요소를 사용하여 균열요소 층을 1 층 배치한다.
2. 균열요소 층 안쪽을 격자 형성의 프런트로 취하고 프런트 상에 주어진 요소 크기 변수에 따라 에지를 정의한다.
3. 각 에지에서 삼각형 요소를 만드는 경우 가장 이상적인 점의 위치를 계산한다.
4. 이상적인 위치의 근처에 이미 형성된 절점이 있는지 찾는다. 절점이 있으면 그 절점을 사용하여 요소를 정의한다. 없다면 새로운 절점을 생성하여 요소를 정의한다.
5. 새로 정의된 요소가 기존의 요소와 겹치는지 검토한다. 겹치지 않으면 그 요소를 형성한다. 겹치면 4 번 과정으로 가서 새로운 점을 찾거나 생성한다.
6. 새로운 프런트를 정의한다.
7. 균열면 전체를 채울 때까지 2 번에서 6 번까지의 과정을 반복한다.
8. 격자 최적화(mesh optimization)를 수행한다.

형성된 격자의 질(quality)을 나타내기 위하여 삼각형 요소에 대하여 다음과 같은 Q 를 정의한다.[7]

$$Q = \alpha \frac{h_{\max} p}{S} \tag{6}$$

여기서 $h_{\max}$ 는 삼각형 요소의 가장 긴 에지의 길이, p 는 삼각형 요소의 둘레 길이의 반, S 는 요소의 면적, α 는 상수이다. $\alpha = 1/(2\sqrt{3})$ 의 값을 주면 정삼각형에 대하여 Q 값이 1 이 된다.

정삼각형 요소가 가장 좋은 해를 주게 되고, 요소의 형태가 정삼각형에서 벗어날수록 Q 값이 1 보다 커지게 된다. 따라서 격자의 질을 높이기 위해서는 가능한 고려하는 요소들의 Q 값을 최소화 하는 것이 필요하다.

Fig. 2 에서 격자생성 과정을 그림으로 보여주고 있다. Fig. 2(a)에서와 같이 균열선단 뒤쪽에 높이 h_c 의 균열요소 층을 둔다. 다음에 삼각형 요소에 대한 초기의 격자 생성을 시작하며 이때 격자 생성 프런트는 AE 선이 된다. AE 선을 몇 개로 나누어 에지를 정의한다. 에지 AB 에 대하여 꼭지점의 위치 F 점을 정의한다. 크기에 대한 제한이 없는 경우 이상적인 F 점의 위치는 Q 값이 1 이 되는 위치이다. 또는 요구되는 요소의 크기가 주어진 경우는 요구조건에 맞게 요소의 높이 h 를 정의한다. 점 F 가 정의되고 새로운 요소 ABF 가

정의되면 프런트 AB 를 없애고, 대신 AF 와 FB 를 프런트로 등록한다.

Fig. 2(b)는 4 개의 삼각형 요소가 형성된 다음을 보여주고 있다. 현재 상태에서의 격자형성 프런트는 AF, FB, BG, GC 등이 된다. 프런트 FB 를 에지로 하여 요소를 정의하는 경우를 고려하면 이상적인 꼭지점 위치 근처에 이미 G 점이 생성되어 있으므로 이 경우는 삼각형 FBG 가 생성된다. 그리고 에지 FB 와 BG 를 프런트 목록에서 제거하고 새로이 에지 FG 를 프런트 목록에 추가한다. 이러한 과정을 프런트 목록에 에지가 없어질 때까지 계속한다.

2.4 균열격자의 최적화

격자의 형성이 끝난 후 최적화를 수행한다. 최적화로 에지 스와핑(edge swapping)과 절점 이동을 통한 평탄화(smoothing) 방법을 사용한다.(7) 에지 스와핑은 Fig. 3 과 같이 이미 형성된 삼각형 요소

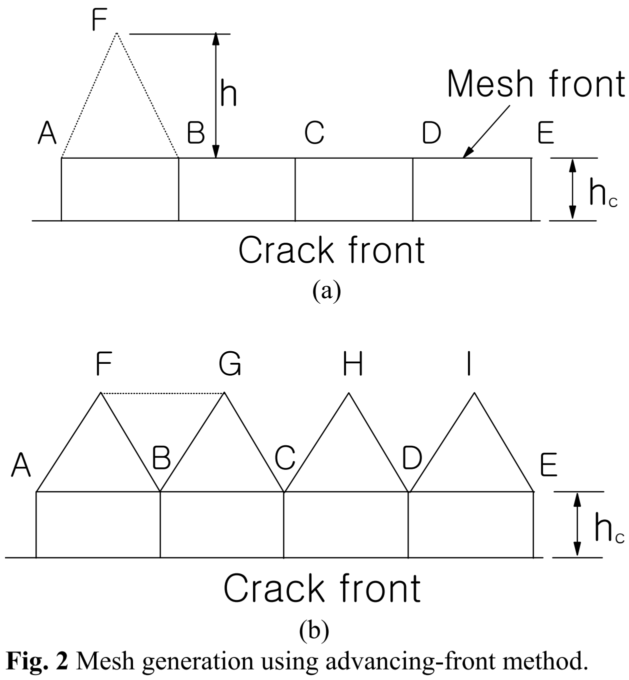


Fig. 2 Mesh generation using advancing-front method.

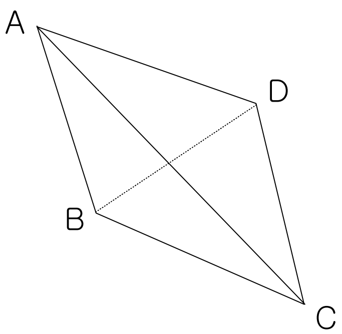


Fig. 3 Edge swapping.

ABC 와 ACD 에서 에지를 AC 에서 BD 로 바꾸어 더 좋은 형상을 가지는 삼각형 요소 ABD 와 BCD 가 형성되도록 하는 방법이다.

절점 이동을 통한 평탄화는 다음과 같이 행해진다.(7)

1. 움직일 절점 P 를 선택한다.
2. 볼(ball)을 구한다. 볼이란 절점 P 를 꼭지점으로 가지고 있는 모든 요소의 집합을 뜻한다.
3. 볼의 외부 에지들을 구한다. 외부 에지란 P 를 포함하는 요소들에서 P 를 포함하지 않는 에지들을 뜻한다. 이들을 f_i 라 한다.
4. 어떤 한 f_i 에 대하여 요소의 모양이 최적이 되는 P 의 위치를 구하고 이를 I_i 라 한다.
5. 현재 각 f_i 와 P 가 이루는 요소에 대한 Q 값을 계산하고 이를 Q_i 라 한다.
6. P 의 새로운 위치 P^*를 다음 식으로부터 구한다.

$$P^* = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i I_i\right) / \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad (7)$$

여기서 n 은 볼 내 요소의 수이다.

2.5 프로그램의 작성

앞에서 설명한 전진 프런트 격자생성법을 프로그램으로 작성하여 기존의 균열해석 프로그램(1)에 추가하였다. 프로그램을 위해서 본 논문에서 기술하지 않은 기법들이 사용되었다. 프로그램을 작성한 후 테스트를 통하여 일관성 있게 균열 격자를 형성할 수 있도록 하였다.

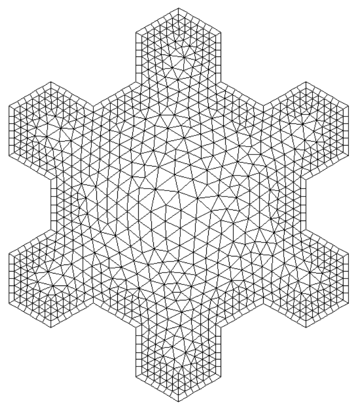


Fig. 4 Example of crack mesh generated by advancing-front mesh generation method

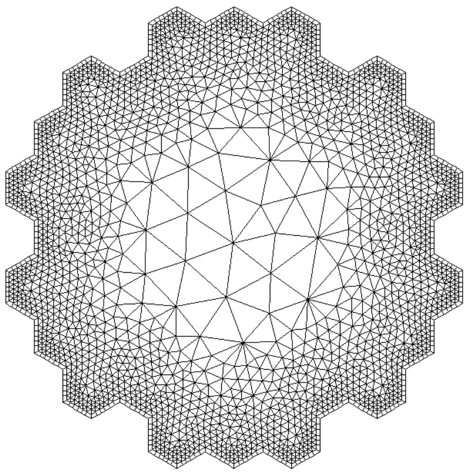


Fig. 5 Example of crack mesh generated by advancing-front mesh generation method

이러한 과정으로 생성된 균열격자의 예를 Fig. 4 및 Fig. 5 에서 보여주고 있다. 본 문제에서는 균열 선단 근처에서 작은 크기의 요소를 형성하고 균열 선단에서 먼 곳에서는 큰 크기의 요소를 형성하여도 되므로 요소의 크기를 균열선단으로부터의 거리의 함수로 주었다.

얻어진 균열격자를 이용하여 균열선단을 따라서의 SIF 를 해석할 수 있다. 그러나 정확성에 대한 확인 후 결과를 이용할 필요가 있으므로 본 논문에서는 결과를 싣지 않는다.

3. 균열해석

3.1 원형 균열의 해석

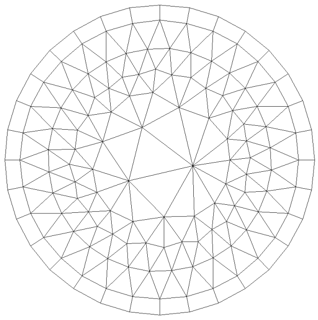
제안된 균열 격자의 정확성을 검토하기 위하여 원형 균열을 해석하여 해석해와 비교하였다. 무한 물체 내에 반지름이 a 인 원형 균열이 존재하고, 균열면에 수직으로 σ 의 트랙션이 작용된다고 한다. Fig. 6 에 도시된 2 가지 균열 격자를 사용하여 SIF 를 구하였고, 그 결과를 Table 1 에 정리하였다. SIF 는 이론해 $K_o = (2/\pi)\sigma\sqrt{\pi a}$ 에 대하여 무차원화 되었다. Table 1 에서 볼 수 있는 바와 같이 Mesh A 를 사용하는 경우 1.5%의 오차를, Mesh B 를 사용하는 경우 2.4%를 보여 비교적 정확한 값을 주고 있음을 알 수 있다.

3.2 사각형 균열의 해석

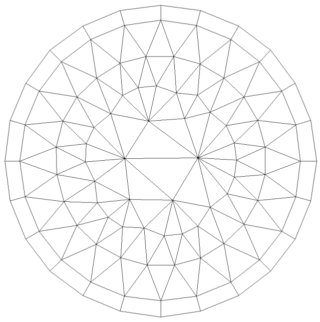
무한 물체 내에 두 변의 길이가 각각 $2a$ 및 $2b$ 인 사각형 균열이 존재한다고 하자. 균열면에 수직으로 σ 의 트랙션이 작용되고 있다. 사각형 균열에서 길이 $2b$ 인 에지의 중간 점을 A 라고 할 때 이점에서의 SIF 를 다음과 같이 표시한다.

Table 1 SIF results for a penny-shaped crack

Mesh	Num. of nodes	Num. of elements	K_I / K_o	Error (%)
A	211	228	1.015	1.5
B	150	154	1.024	2.4



(a) Mesh A



(b) Mesh B

Fig. 6 Boundary element meshes used in the analysis of a penny-shaped crack

$$K_{I,A} = F_{I,A}\sigma\sqrt{\pi a} \quad (8)$$

Fig. 2 에 도시된 균열요소 층의 높이 h_c 의 영향을 보기 위하여 몇 가지 h_c 값이 대한 해석을 하였다. $b/a = 1$ 인 경우에 대하여 해석하였고 사용된 균열 격자 중 한가지는 Fig. 7 과 같다. 균열격자는 전진 프런트 격자생성법을 사용하여 생성하였다. Fig. 8 은 h_c 에 따른 $F_{I,A}$ 의 결과를 보여주고 있다. h_c 가 증가함에 따라 $F_{I,A}$ 도 점차 증가하고 있음을 알 수 있다. h_c 가 내부의 삼각형 요소에 비하여 너무 작거나 너무 큰 경우에 정확성이 감

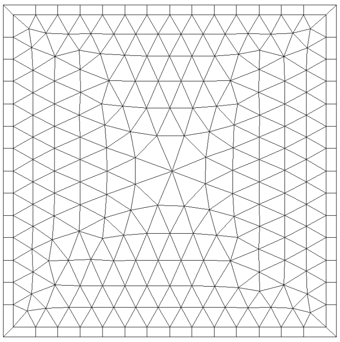


Fig. 7 Boundary element mesh for a rectangular crack when *b/a*=1

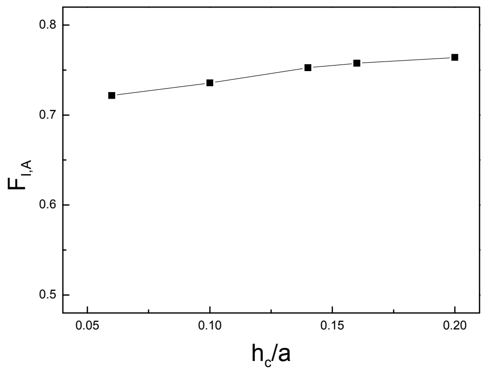


Fig. 8 Variation of $F_{I,A}$ as a function of h_c/a for a rectangular crack when *b/a*=1

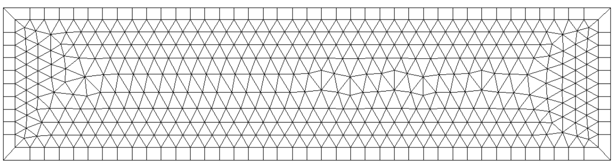


Fig. 9 Boundary element mesh for a rectangular crack when *b/a*=4

소할 것이므로 가장 정확성이 좋은 h_c 의 값이 있을 것으로 판단된다. 따라서 알려진 해를 이용하여 정확한 해를 주는 h_c 의 크기를 정한 후 균열격자를 형성하는 것이 필요하다.

b/a = 1, 2, 4, 8, 12 및 16 에 대하여 SIF 를 구하였다. 이때 h_c/a =0.16 의 값을 사용하였다. Fig. 9 는 b/a =4 인 경우의 균열격자이다.

균열해석을 한 결과는 Fig. 10 과 같다. 정확성을

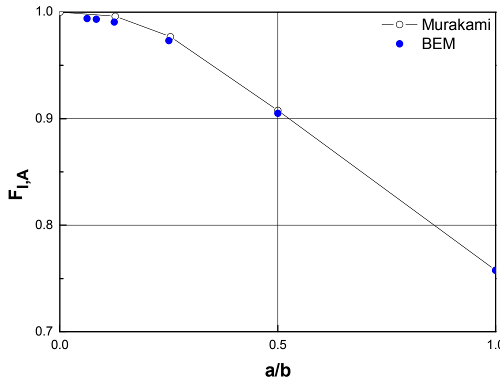


Fig. 10 $F_{I,A}$ as a function of *a/b*

검토하기 위하여 기존의 결과도 함께 도시하였다. b/a 가 아주 작아지는 경우, 즉 a 에 비하여 b 가 아주 커지는 경우 SIF 는 2 차원 중심균열에 대한 값인 $F_{I,A}$=1 이 되어야 하며 Fig. 10 에서 그러한 경향을 보여주고 있다. 또한 기존의 결과(8)와도 유사한 결과를 얻었다.

4. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 3 절점 삼각형 요소와 7 절점 사각형 요소를 사용하여 임의 형상의 삼차원 균열의 모델링을 편리하게 행할 수 있다.

(2) 임의 형상의 삼차원 균열의 모델링에 전진 프런트 격자형성법이 유용하게 사용될 수 있다.

(3) 원형 균열과 사각형 균열에 대하여 이론해와 기존 해에 가까운 정확한 SIF 를 구할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2010 년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

(1) Nikishkov, G.P., Park, J.H. and Atluri, S.N., 2001, "SGBEM-FEM Alternating Method for Analyzing 3D Non-planar Cracks and Their Growth in Structural Components," *Comp. Modeling in Engng & Sci.*, Vol. 2, No. 3, pp. 401~422.

(2) Park, J.H., Kim, M.W. and Nikishkov, G.P., 2010,

"SGBEM-FEM Alternating Method for Simulating 3D Through-Thickness Crack Growth," *Comp. Modeling in Engng & Sci.*, Vol. 68, No. 3, pp. 269~296.
(3) Park, J.H. and Nikishkov, G.P., 2010, “Examination and Improvement of Accuracy of Three-Dimensional Elastic Solutions Obtained Using Finite Element Alternating Method,” *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 34 , pp. 629~635.
(4) Li, S. and Mear, M.E., 1998, "Singularity-reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three Dimensional Linear Elastic Media," *Int. J. Fracture*, Vol. 93, pp. 87~114.
(5) Li, S., Mear, M.E. and Xiao L., 1998, "Symmetric Weak-Form Integral Equation Method for Three-Dimensional Fracture Analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 151, pp. 435~459.
(6) Anderson, T.L., 2005, *Fracture Mechanics*, 3rd ed., CRC Press.
(7) Frey, P.J. and George, P.L., 2000, *Mesh Generation*, Hermes Science Publishing, Oxford.
(8) Murakami, Y., *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon, Vol. 2, pp. 808~809.