

단층래티스 구형돔의 형상계수(S)에 관한 고찰

Shape Factor(S) of Single-Layer Latticed Spherical Domes



정 환 목*
Jung, Hwan-Mok

1. 구조물의 일반적 형상계수 고찰¹⁻¹²⁾

이 세상에 존재하는 많은 구조물은 다양한 형상을 가지고 있으며, 이 형상을 간단명료하게 수식으로 나타낸 것이 형상계수이다. 구조물의 형상계수를 통하여 체계적인 연구가 가능하며, 구조계획 및 설계 시 해석모델의 기준으로도 활용할 수 있다.

1차원 부재로서 길이 L인 단일봉의 형상을 나타내는 계수로는 세장비(λ)가 있으며,

$$\lambda = \frac{L}{i} \quad (1)$$

이다. Euler에 의한 단일봉의 좌굴하중 P_{cr} 은

$$P_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 EI}{l_k} \quad (2)$$

이며, Euler에 의한 단일봉 좌굴응력도 σ_{cr} 은

$$\sigma_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (3)$$

이다. 식(1)~(3)에서 L : 봉의 길이, i : 단면2차 반지름, α 는 계수, E : 영계수, I : 단면2차모멘트, l_k 는 좌굴길이이다.

식(3)은 단일봉의 형상계수인 세장비를 도입함으로써 좌굴응력도를 아주 간단명료하게 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

2차원 부재로서 두께 t인 얇은 판의 형상을 나타내는 형상계수로는 변장비(λ_p)가 있으며,

$$\lambda_p = \frac{a}{b} \quad (4)$$

이다. 이때 판의 좌굴하중 F_{cr}

$$F_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (5)$$

이다. 식(4)과 (5)에서 a, b : 각각 판의 가로, 세로길이, t는 판의 두께, ν 는 프와송비이다.

3차원 균질등방성인 구형셀의 형상을 나타내는 계수로는 구형셀형상계수(λ_s)가 있으며,

* 정회원 · 경동대학교, 교수

$$\lambda_s = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{a}{\sqrt{Rt}} \quad (6)$$

식(6)에서 ν 는 프와송비, a 는 저면직경, R 은 곡
울반경, t 는 셸두께를 나타낸다.

구심외압을 받는 구형셸의 좌굴하중값 q_{cr} 은

$$q_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{t}{R}\right)^2 \quad (7)$$

이다.

3차원 편평셸의 형상을 나타내는 계수로는 편평셸
형상계수(λ_{ss})가 있으며,

$$\lambda_{ss} = 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{H/t} \quad (8)$$

식(8)에서 H 는 셸의 높이를 나타낸다.

3차원 이방성셸의 형상을 나타내는 계수로는 이방
성셸형상계수(λ_s)가 있으며,

$$\lambda_s = \frac{a}{\sqrt{R}} \sqrt[4]{\frac{K}{D}} \quad (9)$$

이다. 단, a : 저면길이, K : 면내축강성, D : 면
외휨강성을 나타낸다.

2. 단층래티스 돔의 형상계수(S)³⁻¹⁰

단층래티스 돔의 경우에 대해서는 아직 학계에서
일반화된 형상계수가 없으므로 단일봉의 세장비를
응용한 형상계수 λ_b 를 도입하거나 이방성셸의 형상
계수 λ_s 를 도입하는 방법이 고려되어 질 수 있다.
그러나 λ_b 를 도입할 경우 돔의 부재좌굴 평가는 가
능할지 모르지만 전체좌굴에 대한 평가가 곤란하며
한편 λ_s 를 도입할 경우 전체좌굴의 평가는 가능할
지 모르나 반대로 부재좌굴에 대한 평가를 할 수가
없다.

아직 일반화되어 통용되고 있지는 않지만 M.
Yamada가 3-way Grid 단층래티스 구형돔에 대해
서 전체좌굴과 부재좌굴을 판단하는 기준으로서 제

안한 돔의 형상계수 S 는 길이가 다른 단일부재의
집합체로서 구성된 3차원 래티스돔의 형상을 단순명
료하게 표현하고 있다. 여기에서는 단일봉의 세장비
를 응용한 λ 및 이방성셸의 형상계수 λ_s 와 비교를
행하면서 단층래티스 돔의 형상계수 S 의 유도과정을
검토한다. 래티스 돔의 면내력에 의한 Euler 좌굴로
서 부재좌굴이 발생한다는 가정 하에 구한 단층래티
스 돔의 부재좌굴 내력값(q_{cmb})는

$$q_{cmb} = \frac{2\sqrt{3} \pi^2 EI_m}{R L^3} \quad (10)$$

이다. 단, 식(10)에서 I_m 은 부재의 최소단면2차모
멘트이다.

M. Yamada에 의한 3-way Grid 단층래티스 돔
의 전체좌굴 내력값(q_{cs})는

$$q_{cs} = 2.67 \frac{\sqrt{KD}}{R^2} \left(1 + \frac{D_{r\theta}}{7D}\right) \quad (11)$$

이다. 여기에서, 휨강성(D), 축강성(K), 비틀림강
성($D_{r\theta}$)는

$$D = 3 \frac{\sqrt{3}}{4L} EI \left(1 + \frac{GJ'}{3EI}\right)$$

$$K = 3 \frac{\sqrt{3}}{4L} EA$$

$$D_{r\theta} = \frac{\sqrt{3}}{4L} EI \left(1 + \frac{GJ'}{EI}\right)$$

이며, 여기에서 G 는 전단탄성계수, J' 는 비틀림
상수이다.

식(10)을 식(11)의 비(α m)로 나타내면

$$\frac{q_{cmb}}{q_{cs}} = \frac{29.5 \left(\frac{I_m}{J}\right)}{\left(1 + \frac{D_3}{7}\right) \left(3 + \frac{GJ'}{EI}\right)} \frac{1}{S^2} \quad (12)$$

이다. 여기서 $D_3 = D_{r\theta}/D$ 이다.

식(12)로부터 단층래티스 돔의 전체좌굴내력에 대

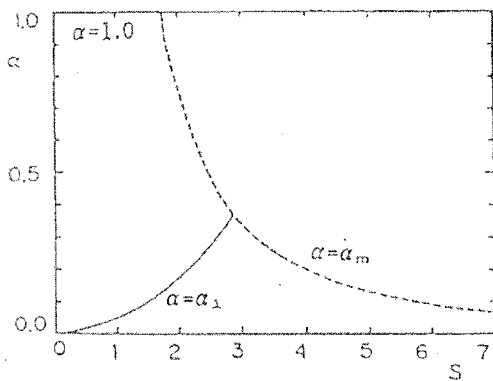
한 부재좌굴내력의 비는 S의 2승에 반비례하는 관계에 있음을 알 수 있다. 즉 양자의 관계를 나타내는 계수로서의 S의 타당성을 발견할 수가 있을 뿐만 아니라 셀의 형상계수와 비교해볼 때 돔의 형상계수로서도 그 타당성을 발견할 수가 있다.

M. Yamada는 부재좌굴과 전체좌굴을 구분할 수 있는 단층래티스 돔의 형상계수로서 식(12)에서 유도된 S를 제안했으며, 그 값은

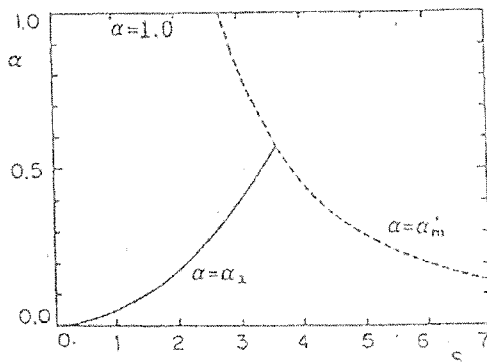
$$S = \frac{L}{\sqrt{R}}^4 \sqrt{\frac{K}{D}} \quad (13)$$

이다.

3. 단층래티스 돔의 좌굴내력(α)과 형상계수(S)³⁻¹⁰와의 관계



(a) H형강



(b) 원형강관

〈그림 1〉 단층래티스 돔의 형상계수(S)와 좌굴하중계수(α)의 관계 그래프⁸⁾

〈그림1〉은 M. Yamada의 체계적 연구⁸⁾ 일환으로 개발된 그래프로 구심외압을 받는 3-Way Grid 구형돔의 전체좌굴, 부재좌굴, 절점좌굴의 발생영역과 좌굴하중크기(α)를 형상계수(S)로서 단순화하여 나타낸 것이다. 그림에서 $\alpha = 1.0$ 은 전체좌굴 영역, $\alpha = \alpha_m$ 은 부재좌굴영역, $\alpha = \alpha_1$ 은 절점좌굴영역을 나타낸다.

〈그림1〉의 a)는 H형강을 사용한 경우, b)는 강관을 사용한 경우이다. 여기에서 α 는 단층 래티스돔의 좌굴내력을 M. Yamada에 의해 제안된 래티스돔의 좌굴내력값(11식의 qcs)으로 무차원화하여 나타낸 값이다. 한편, 곡률반경과 부재 길이 및 단면만 결정되면 qcs값은 식(11)에 의해 간단하게 구할 수 있다. 따라서 래티스 돔의 형상 계수 S만 결정되면 〈그림 1〉의 그래프에 의해 제조조건에 따른 단층래티스 돔의 좌굴내력을 평가할 수가 있다. 즉, 이 그림을 활용하여 실무자들은 구조설계 초기단계에 직접적인 구조계산을 하지 않고도 거시적 관점에서의 구조내력과 좌굴형상 등을 쉽게 파악할 수 있다.

〈그림1〉 a)는 3-Way Grid Dome의 부재간 접합 상태가 강접합인 경우, H형강을 사용하는 돔의 형상 계수 S가 1.67이하이면 전체좌굴이 발생하고, 그때의 좌굴내력값은 식(10)의 qcs와 같다. S가 1.67보다 크면 좌굴내력은 $\alpha = \alpha_m$ 이며, 좌굴모-드는 부재좌굴이 발생하는 것을 의미한다. 한편 핀접합의 경우에는 S=2.9이하이면 좌굴내력은 $\alpha = \alpha_1$ 이며, 좌굴모-드는 절점좌굴이 발생하고 핀접합의 경우는 S가 2.9보다 크면 부재좌굴이 발생하며, 그때의 좌굴내력은 $\alpha = \alpha_m$ 이 된다.

〈그림1〉 b)는 강관을 사용하는 경우이며, 좌굴내력 및 좌굴모-드 평가방법은 H형강의 경우와 동일하다. 즉, 강접합의 경우 강관을 사용하는 돔의 형상 계수 S가 2.7이하이면 전체좌굴이 발생하고 S가 2.7보다 크면 부재좌굴이 발생한다. 핀접합의 경우에는 S=3.6이하이면 절점좌굴이 발생하고 3.6보다 크면 부재좌굴이 발생한다.

예를 들어 3-Way Grid Dome에서 강접합조건이며, 사용부재가 강관일 경우, $S=3.7$ 이면 이 돔의 좌굴내력값은 $q_{cr}=\alpha \times q_{cs}$ 이다. 이 경우 $\alpha =0.5$ 이므로 $q_{cr}=0.5 \times q_{cs}$ 이며, 좌굴형태는 부재좌굴을 발생시킨다.

4. 형상계수(S)를 통한 단층 래티스돔의 체계적인 연구 사례

〈표 1〉 Shape Factor (S)⁽¹⁴⁾

S	ϕ (mm)	t (mm)	I ($\times 10^4 \text{ mm}^4$)	i (mm)
1.9	600	2.45	20527	237
2.1	500	2.95	14024	197
2.3	400	3.69	9030	157
2.7	300	4.96	5006	117
2.9	250	6.00	3425	97
3.3	200	7.61	2131	76
3.9	150	10.49	1125	55
4.3	125	13.08	730	45
5.0	100	17.81	407	33

〈표1〉은 참고문헌 14에서 도입한 해석모델로서 R(50m)과 L(6.43m)은 동일하면서 래티스돔을 구성하는 프레임으로 강관을 사용하여 강관의 부재단면 크기를 변화시켜 다양한 형상계수(S)를 유도하여 해석모델로 사용한 것이다. 이 S를 대상으로 여러 가지 조건에 따른 단층래티스 돔의 특성을 체계적으로 연구한 사례를 소개한다.

4.1 접합부 조건에 따른 좌굴 내력 검토

래티스돔 사고의 대부분은 접합부의 내력부족에 기인하고 있는 것으로 미루어 볼 때 부재간 접합부(Junction)의 내력은 매우 중요하다. 부재의 접합부 정착이 트러스축선과 편심이 발생하여 있든지 그 각도에 비뚤어짐이 있으면 부재 및 정착부에 휨모멘트를 발생시켜 접합부 내력 및 부재의 좌굴내력을 저하시키게 된다.

또한 접합부강성의 부족은 거시적으로 보아 등가

휨강성 및 등가축강성을 저하시킬 뿐만 아니라 좌굴내력에 큰 영향을 줌으로 접합부의 상세설계 및 시공에는 특별한 주의를 필요로 한다.

입체구조물의 조인트공법은 Mengerlinghausen⁽¹⁵⁾, Tsuboi & Makowski⁽¹⁶⁾ 등에 의해 개발되어 있다.

한편 래티스돔의 접합부의 강성조건에 대한 대부분의 연구는 완전히 강접합이든지 혹은 완전히 핀접합인 양극단의 조건을 해석대상으로 하고 있다. 그러나 실제구조물의 접합상태는 대부분 완전한 강접합도 완전한 핀접합도 아닌 그 중간적인 접합상태를 유지하는 경우가 많다. 이와 같은 실제구조물이 가지는 접합부의 강성상태에 따른 좌굴내력의 영향 등을 체계적으로 연구한 예는 많지 않다.

M. Yamada 등⁽¹⁷⁾은 3분할 및 6분할 단층래티스돔의 경우 실제구조물이 가질 수 있는 접합부의 강성상태를 이론적으로 모델화하여 좌굴내력에의 영향을 검토하고 있다. 그러나 좀더 폭 넓은 모델에 대한 검토가 필요시 되고 있으며 궁극적으로는 접합부 강성조건에의 영향을 고려한 일반화좌굴내력식이 요구되고 있는 실정이다.

강접합 및 핀접합을 포함하는 실제구조물의 경우 예상되어지는 접합부의 접합상태를 가정하여 그에 따른 좌굴특성을 파악하기 위해서 접합부에 집중하는 이상적인 회전스프링강성에 의해 접합부휨강성은 아래식으로 나타낸다.

$$K_{\theta} \times \frac{6EI}{L_i} \tag{14}$$

여기서 K_{θ} 는 무차원화한 휨강성의 계수를 나타낸다.

여기서 K_{θ} 가 10^5 이면 강접합을 의미하며 K_{θ} 가 10^{-5} 이면 핀접합을 의미하고 그 외의 값들은 강접합과 핀접합의 중간접합상태를 나타낸다.

〈그림2〉~〈그림4〉은 〈표1〉에 나타내는 것처럼 R(50m)과 L(6.43m)은 동일하면서 강관의 부재단면 크기를 변화시켜 다양한 형상계수(S)를 갖는 3-way grid latticed dome의 접합부 조건에 따른 좌굴내력

의 변화율을 나타낸다.¹⁴⁾ 여기에서 K_θ 가 10^5 은 강접합, $K_\theta = 10^{-5}$ 은 핀접합, $K_\theta = 10^4 \sim K_\theta$ 가 10^{-4} 은 반강접합을 의미한다.

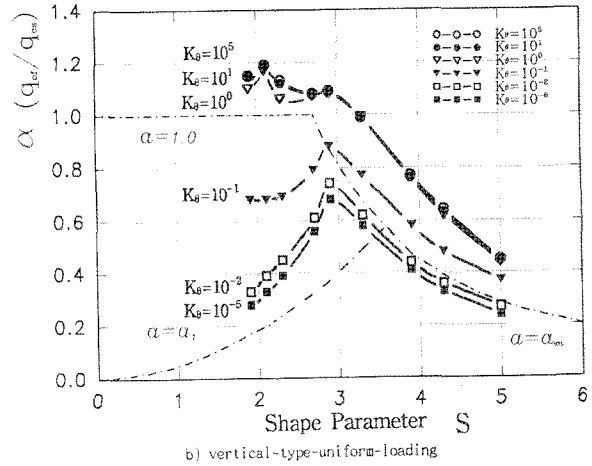
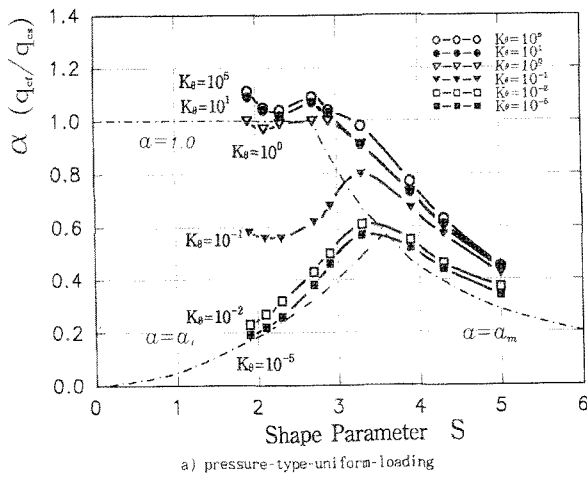
〈그림2〉는 접합부 조건에 따른 좌굴형태와 좌굴내력의 크기를 잘 나타내어 주는 그림이다. 즉 S가 작은 영역에 있는 모델의 경우 강접합에서는 전체좌굴, 핀접합에서는 절점좌굴, S가 큰 영역에서는 접합부 조건에 관계없이 부재좌굴이 발생하고 있는 것을 보여준다.

〈그림3〉은 접합부 조건에 따른 좌굴내력의 크기를 잘 나타내어 주는 그림이다. 즉 $K_\theta = 10^{-2} \sim K_\theta = 10^0$ 의 접합조건에서 좌굴내력의 크기가 급격하게

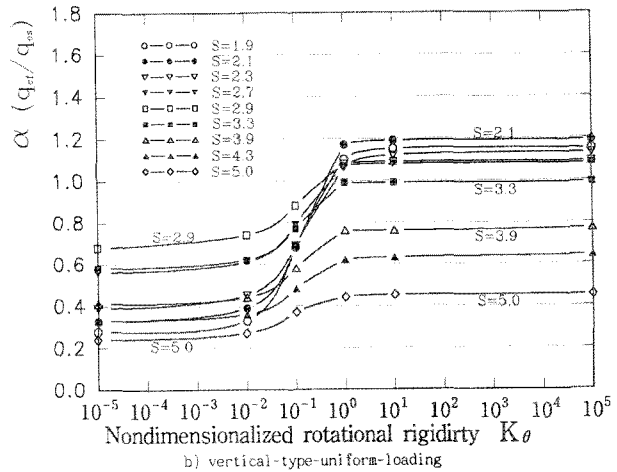
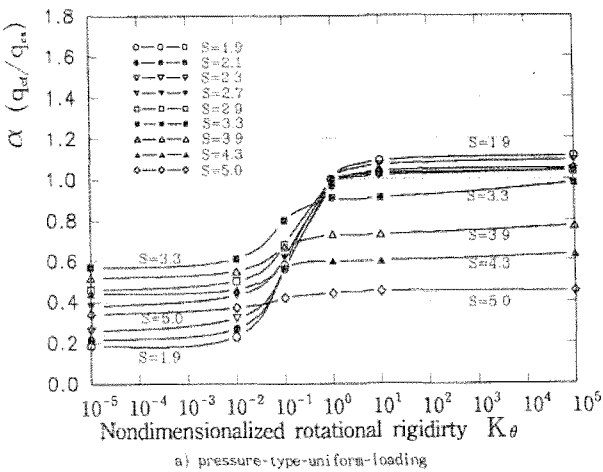
변하는 것을 알 수 있다.

〈그림4〉는 돔의 형상별 접합부 조건에 따른 좌굴내력의 저하율을 나타내는 그림이다. 접합부 조건에 따른 좌굴내력의 변화는 형상계수(S)에 따라 큰 차이를 보이고 있다.

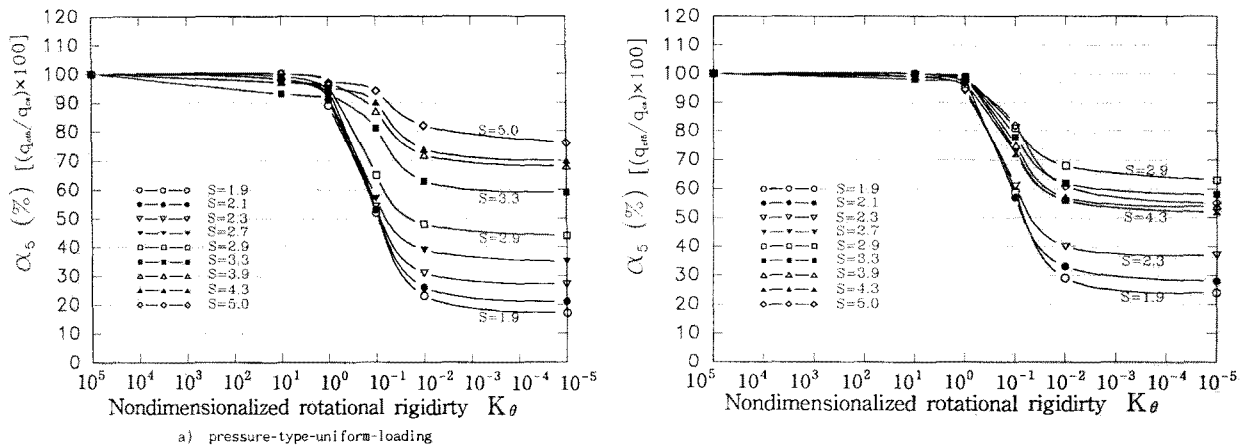
실제 구조물의 접합조건은 강접합과 중간접합의 상태가 많을 것으로 판단되어지며, 실제구조물 설계에서 중간접합 상태의 구조물은 〈그림2〉~〈그림4〉의 결과를 참조하면 많은 도움이 되리라 판단된다. 이처럼 래티스돔의 형상계수 S를 도입함으로써 복잡한 접합부조건을 갖는 래티스돔의 안전문제에 대해서도 매우 체계적이고 시스템적인 연구가 가능하게 된다.



〈그림 2〉 돔의 형상계수 S 에 따른 좌굴내력



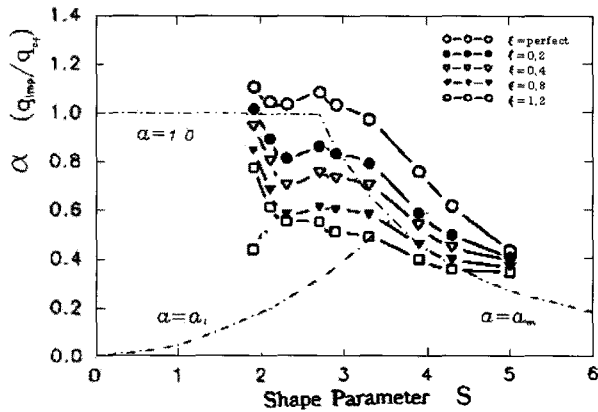
〈그림 3〉 돔의 접합조건에 따른 좌굴내력



〈그림 4〉 형상계수(S)에 따른 좌굴내력의 저하율

4.2 시공애러에 의한 좌굴 내력 검토

〈그림5〉는 참고문헌 14에서 얻어진 결과이며, 시공애러(ξ)에 대한 단층 래티스돔의 좌굴내력을 형상계수(S)에 따라 체계적으로 연구한 사례이다.



〈그림 5〉 시공애러를 고려한 α -S의 관계곡선¹⁴⁾

이 외에도 작용하중에 따른 래티스 돔의 특성 등 다양한 관점에서 체계적으로 연구하는데 형상계수(S)를 도입하면 매우 편리할 것이다.

5. 결론

3차원 대공간 구조물 중에서 단층래티스 구형돔에 대해 일반적으로 사용되는 형상계수는 아직 없지만, M. Yamada에 의해 개발된 식(13)의 형상계수 S를

사용함으로써 단층래티스 구형돔의 고유한 좌굴형태인 전체좌굴, 부재좌굴, 절점좌굴 뿐만 아니라 다양한 조건에서의 좌굴내력과 특성을 쉽게 파악할 수 있었다.

- 참고문헌 -

- Huang, N.C., Unsymmetrical Buckling of thin Shallow Spherical Shells, J. APPL.MECH., 9, 1964, pp.447-457.
- Huang, N.C., Axisymmetrical Creep Building of Clamped Shallow Spherical Shells, Journ, Appl.Mech.32, 1965, pp.323-330.
- K. Heki, On the Effective Rigidity of Lattice Plates, RECENT RESEARCHES OF STRUCTURAL MECHANICS-Contributions in Honour of the 60th Birthday of Prof.Tsubio, Unosheten, Tokyo, 4, 1968, pp. 31-46
- 日置興一郎 他, 스페스프레임(立體格子構造)의設計·解析·施工, 昭和57年度文部省科學研究費補助金, 總合研究(B)研究報告書, 1983, pp.137-164.
- Yamada, M. et al., Theoretical and Experimental Study on the Buckling of Rigidly Jointed Single Layer Latticed Spherical Shells under External pressure, Shell, Membranes & Space Frame, Proceedings of the IASS Symposium, Osaka, 1986, pp 113-120

6. 山田大彦, 單層 라チ스돔의座屈耐力評價法, 第2回, シェルと空間構造に關する 日・韓コロキウム, 同論文集, 東京, 8.1987, pp.43-150.
7. M. Yamada, An Approximation on the Buckling Analysis of Orthogonally Stiffened and Framed Spherical Shell, Shell and Spatial Structure Engineering, IASS Symposium, Rio de Janerio, Pentech Press, pp. 177-193, 1988.
8. 山田大彦, 單層 라チ스돔의安定解析 -その現狀と問題點-, 4章, 連續體近似による單層ラチス돔の座屈耐力評價について, 日本建築學會シェル空間構造運營委員會, スペースフレーム小委會, 8.1989, pp.191-254.
9. 日置興一郎, 單層ラチス돔の安定解析-その現象と問題點-, 1章, 라チ스돔의不安定現象의概說, 日本建築學會シェル空間構造運營委員會, 스페스프레小委員會, pp.1-23, 8.1989.
10. 半谷裕彦, 單層 라チ스돔의安定解析 -その現狀と問題點-, 2章, 單層ラチス돔の座屈荷重評價, 日本建築學會シェル空間構造運營委員會, 스페스프레小委員會, 8.1989, pp.25-70
11. 山田大彦, 大橋智樹, 6角形ネットワークを持つ單層ラチス돔の變形, 應力並びに座屈特性に關する研究, 日本建築學會學術講演集, 關東, 10.1988, pp.1425-1426
12. H. M. Jung and M. Yamada, Buckling of Rigidly-Joint Single-Layer Latticed Domes with Square Network -Theoretical and Experimental Basic Study-, Proceedings of 3rd Summer Colloquium on SHELL AND SPATIAL STRUCTURES, 1990. 8, pp. 625-636
13. H. M. Jung et al, A Study on Buckling Characteristics of Single-Layer Latticed Domes with Triangular Network, Second Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, 8.1993
14. 권영환, 삼각형 네트워크를 갖는 단층 래티스돔의 좌굴특성에 관한 연구, 부산대학교 박사학위논문, 8.1993.
15. Mengerinhausen, M., Raumbachwerke aus Staben und Knoten, Bauverlag GMBH, Wiesbaden und Berlin, 1975.
16. Tsuboi, Y. and Kawaguchi, M., The Space Frame for the Symbol Zone of EXPO '70, Proc. of the Pacific Symposium Part 2, Tokyo, Japan, 1972, pp.893-904.
17. Yamada, M., Yamamoto, H., Wang, L. and Jung, H.M., On the Effect of Joint Flexibility and Loading Condition on the Buckling Characteristics of the Single-Layer Latticed Domes, Proceedings of the Symposium for 30 Anniversary of IASS. 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures, CEDEX, Madrid, Spain, vol.4, September, 1989, pp.503-518.