

# 실험 오차가 주파수 응답함수에 미치는 영향

## The Effects of Measurement Errors on Frequency Response Functions(FRFs)

정 해 일\*

Hae-il Jung\*

요 약

유한요소 해석(FEA: finite element analysis)의 발달로 복잡한 기계나 자동차 및 구조물에 대해서도 상세한 진동해석을 할 수 있게 되었다. 그러나, 복잡한 구조물을 정확하게 모형화하기 어렵고, 특히 접합부의 강성과 감쇠 특성을 알기 어렵고, 복잡한 형상을 단순화하는 과정에서 발생하는 오차 등의 이유로 유한요소해석 결과는 부정확할 수 있다. 반면에 실제 구조물의 실험 데이터로부터 추출한 실험적 모드해석(modal testing) 결과는 상세하지는 않지만 정확하다고 볼 수 있다.

그러나 실험 결과가 구조물의 진동 특성을 정확하게 나타낸다는 가정은 여러 가지 측정 오차로 인하여 정확하지 않을 수 있다. 이 논문에서는 실험적 모드해석의 기본이 되는 FRF(frequency response function; 주파수 응답함수)의 측정에 영향을 미치는 오차들을 측정 오차와 신호처리 오차로 구분하여 각각에 대해 세밀히 살펴보고, 그러한 오차들을 감소함으로써 보다 정확한 FRF를 구하는 방법에 대해서 고찰해보았다.

**Key Words** : Frequency Response Function, FEA, Modal Testing, Measurement errors

### ABSTRACT

Despite the highly sophisticated development of finite element analysis, a finite element model for structural dynamic analysis can be inaccurate or even incorrect due to the difficulties of correct modelling, uncertainties on the finite element input data and geometrical oversimplification, while the modal data extracted from measurement are supposed to be correct, even though incomplete. The assumption that the test results represent the true dynamic behaviour of the structure, however, may not be correct because of various measurement errors. The measurement errors are investigated and their effects on estimated frequency response functions(FRFs) are also investigated.

---

\* 한국기술교육대학교 기계정보공학부(hijung@kut.ac.kr)

제1저자 (First Author) : 정해일

교신저자 : 정해일

접수일자 : 2011년 4월 19일

수정일자 : 2011년 6월 05일

확정일자 : 2011년 6월 13일

## I. 서론

컴퓨터의 비약적 성능향상과 유한요소 해석(FEA: finite element analysis)의 발달로 복잡한 기계나 자동차 및 구조물에 대해서도 상세한 진동해석을 할 수 있게 되었다[1]. 그러나, 복잡한 구조물을 정확하게 모형화하기 어렵고, 특히 접합부의 강성과 감쇠 특성을 알기 어렵고, 복잡한 형상을 단순화하는 과정에서 발생하는 오차 등의 이유로 유한요소해석 결과는 부정확할 수 있다. 반면에 실제 구조물의 실험 데이터로부터 추출한 실험적 모드해석(modal testing) 결과는 상세하지는 않지만 정확하다고 볼 수 있다 [2].

그러나 실험 결과가 구조물의 진동 특성을 정확하게 나타낸다는 가정은 여러 가지 측정 오차로 인하여 정확하지 않을 수 있다. 이 논문에서는 실험적 모드해석의 기본이 되는 FRF(frequency response function; 주파수 응답함수)의 측정에 영향을 미치는 오차들을 측정 오차와 신호처리 오차로 구분하여 각각에 대해 세밀히 살펴보고, 그러한 오차들을 감소함으로써 보다 정확한 FRF를 구하는 방법에 대해서 고찰하고자 한다.

## II. 측정 오차

### 1. 구조물의 비선형성(non-linearity)

진동 해석의 기본적인 가정 중의 하나는 구조물이 선형이라는 것이다. 그러나 선형성 가정은 다음과 같은 이유로 유효하지 않을 수 있다.

- 1) 진폭이 큰 진동
- 2) 결합 부분이 느슨해짐
- 3) 비선형 강성
- 4) 비선형 감쇠 등

구조물이 비선형인 경우 한 주파수의 에너지가 이웃하는 주파수로 이동함으로써 왜곡된 FRF가 측정된다. 구조물의 비선형 효과를 줄이는 방법 중 하나는 가진 시 랜덤(random) 가진(excitation)을 사용하여 이러한 효과를 랜덤화시키는 것이다. 그리고, FRF를 구할 때 평균 횡수를 증가시켜 랜덤화된 효과를 상쇄시키는 것이다.

### 2. 구조물의 시변성(nonstationarity)

모드 해석의 또 다른 가정은 구조물의 특성이 시간과 상관없이 항상 일정하다는 것이다. 그러나, 때로는 진동시험 중에 조인트 부분에서 미끄럼이 발생하거나 볼트가 풀림으로써 구조물의 특성이 변할 수 있다. 이러한 측정오차는 진동 시험 시 시험 절차를 엄격히 관리함으로써 줄여야한다.

### 3. 센서의 질량 추가 효과(mass loading effect)

가속도계를 구조물에 부착하면 국부 강성(local stiffness)이 변하고 전체 질량이 증가하여 불가피하게 구조물의 동특성을 변화시킨다. 가속도계가 부착된 부분의 가속도와 구조물의 고유진동수는 다음과 같이 변하게 된다[3].

$$a_m \approx a_t \frac{m}{m+m_a} \quad f_m \approx f_t \sqrt{\frac{m}{m+m_a}} \quad (1)$$

여기서  $a_m$ 은 측정된 가속도,  $a_t$ 는 실제 가속도,  $f_m$ 은 측정된 고유진동수,  $f_t$ 는 실제 고유진동수,  $m$ 은 가속도계가 부착된 부분의 유효질량,  $m_a$ 는 가속도계의 질량이다.

질량 추가 효과를 최소화시키기 위해서는 질량이 구조물의 유효질량의 1/10 이하인 가속도계를 선정하여야한다.

### 4. 가진기와 구조물의 상호작용

구조물을 가진하는 가진 신호가 랜덤 신호나 정현파와 같은 연속 신호(continuous signal)일 때, 가진기(shaker)는 실험 중 항상 구조물과 연결 상태를 유지해야 한다. 가진기의 축과 가진점의 연장선이 구조물의 질량중심을 통과하지 않으면 가진점의 움직임에 회전운동이 포함되어 가진력이 정확히 측정되지 않는다. 이 문제를 해결하는 방법은 스팅어(stinger)를 이용하여 가진기와 구조물을 연결하는 것이다. 스팅어는 축강성이 매우 커 가진력을 구조물에 정확히 전달하고, 횡강성이 매우 작아 모멘트 전달을 최소화할 수 있는 형상을 가져야 한다[4, 5].

스텅어의 효과이외에도, 가진기와 구조물 간의 상호작용은 구조물의 고유진동수에서 입력(힘) 스펙트럼에 '노치(notch)'를 발생시킨다[2]. 고유진동수 부근에서는 작은 힘을 가하더라도 큰 응답이 발생하기 때문에, 가진기에서 발생한 힘의 대부분은 가진기 내의 아마추어(armature) 질량을 가진시키는데 사용된다. 그림 1은 가진기/구조물의 모델을 보여준다.

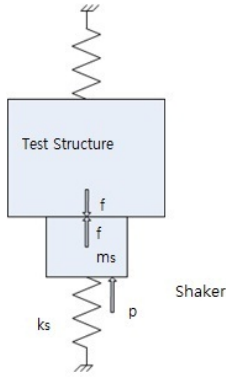


그림 1. 가진기/구조물의 상호작용  
Fig. 1. Shaker/Structure Interaction

구조물에 가해지는 실제 힘  $f$ 는 가진기에서 발생하는 힘  $p$ 로부터 다음과 같이 계산된다.

$$f = p - m_s \ddot{x} \quad (2)$$

여기에서  $m_s$ 는 아마추어 질량이다. 식(2)의 푸리에 변환은

$$F(\omega) = P(\omega) - m_s H(\omega) F(\omega) \quad (3)$$

따라서

$$F(\omega) = H_i(\omega) P(\omega) \quad (4)$$

여기서

$H_i(\omega) = \frac{1}{1 + m_s H(\omega)}$  이다.  $P(\omega)$ 가 일정하다면, 입력(힘) 스펙트럼  $G_{FF}(\omega)$ 와 출력(응답) 스펙트럼  $G_{AA}(\omega)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} G_{FF}(\omega) &= |H_i(\omega)|^2 G_{PP}(\omega) \\ &= \frac{G_{PP}}{\{1 + m_s H(\omega)\} \{1 + m_s H^*(\omega)\}} \\ &= \frac{G_{PP}}{1 + m_s^2 [\{Re(H(\omega))\}^2 + \{Im(H(\omega))\}^2] + 2m_s Re(H(\omega))} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G_{AA}(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_{FF}(\omega) \\ &= |H_i(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 G_{PP} \end{aligned} \quad (6)$$

아마추어 질량이 크다면 구조물에 가해지는 힘이 감소하기 때문에 입력잡음의 영향은 증가한다. 따라

서, 고유진동수 부근에서 보다 정확한 FRF를 측정하기 위해서는 아마추어 질량이 작아야 한다.

5. 측정 잡음(measurement noise)

진동 실험을 통하여 측정되는 FRF에는 다음과 같이 정의되는  $H_1(\omega)$ 과  $H_2(\omega)$ 의 두 종류가 있다.

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{G_{FA}(\omega)}{G_{FF}(\omega)} \\ H_2(\omega) &= \frac{G_{AA}(\omega)}{G_{AF}(\omega)} \end{aligned} \quad (7)$$

입력(힘)과 출력(응답) 신호에 잡음이 없다고 하면 두 함수는 동일한 결과를 준다. 그러나, 실제로는 측정신호에는 항상 어느 정도의 잡음이 존재하기 때문에 두 함수의 값에는 차이가 존재한다. 측정된 신호  $f(t)$ 와  $a(t)$ 에 측정 잡음  $m(t)$ ,  $n(t)$ 가 포함되어 있다고 하면, FRF는 다음과 같이 표현된다[6].

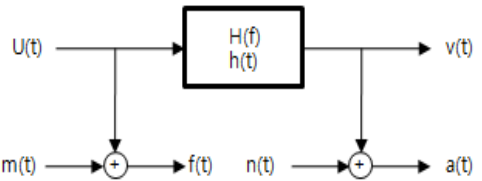


그림 2. 측정 신호와 잡음  
Fig. 2. Signals with Measurement Noise

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{G_{FA}(\omega)}{G_{FF}(\omega)} = \frac{H(\omega)}{1 + r_i} \\ H_2(\omega) &= \frac{G_{AA}(\omega)}{G_{AF}(\omega)} = H(\omega)(1 + r_o) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $H(\omega)$ 는 정확한 FRF이고,  $r_i$ 는 입력신호에 대한 입력잡음의 비  $\frac{G_{MM}}{G_{UU}}$ ,  $r_o$ 는 출력신호에 대한 출력잡음의 비  $\frac{G_{NN}}{G_{VV}}$ 이다. 고유진동수 부근에서는 응답이 커지기 때문에  $r_o$ 가 아주 작아진다. 따라서,  $H_2(\omega)$ 가  $H_1(\omega)$  보다 정확한 FRF를 추정한다. 반면에, 반공진주파수 부근에서는  $r_i$ 가 아주 작아지기 때문에  $H_1(\omega)$ 이 보다 정확해진다. 다음 식으로 정의되는 상관도(coherence) 함수

$$\begin{aligned} \gamma^2(\omega) &= \frac{|G_{FA}(\omega)|^2}{G_{FF}(\omega)G_{AA}(\omega)} \\ &= \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} = \frac{1}{(1+r_i)(1+r_o)} \end{aligned} \quad (9)$$

는 입력과 출력신호에 포함되어 있는 잡음의 정도를 나타내는 척도가 된다. 이 함수의 값이 0.95 이상인 경우 측정된 FRF를 신뢰할 수 있고, 0.9 이하인 경우에는 신뢰도가 떨어진다.

### III. 신호처리 오차

#### 1. 누설(leakage)

푸리에 변환(Fourier transformation)을 컴퓨터로 처리하기 위해 개발된 DFT(discrete Fourier transform) 알고리즘은, 변환하고자 하는 신호는 시간 창문(time window)의 주기를 가지고 있다고 가정한다[2]. 이 가정이 엄격히 만족되지 않으면 한 주파수 성분의 에너지가 인접한 주파수로 누설되는 현상이 발생한다. 이 현상을 누설이라 한다.

유한 푸리에 변환은 실제 함수  $v(t)$ 에 다음 식으로 정의되는 사각 창문함수  $u(t)$ 의 곱으로 생각할 수 있다.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t \geq T) \end{cases} \quad (10)$$

따라서,  $x(t)$ 의 푸리에 변환은  $u(t)$ 와  $v(t)$ 의 푸리에 변환의 컨볼루션이다. 즉,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\Omega - \omega) V(\Omega) d\Omega \quad (11)$$

여기서,  $U(\omega) = T \left\{ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right\} e^{-i\omega T/2}$

마찬가지로, 변환된 스펙트럼  $\hat{G}(\omega)$ 는 창문 스펙트럼(window spectrum)  $W(\omega)$ 와 실제 스펙트럼  $G(\omega)$ 의 컨볼루션이 된다[7].

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= W(\omega) * G(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(\Omega - \omega) G(\Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $W(\omega) = T \left\{ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right\}$  이다.

그림 3은 누설오차를 보여준다. (a)와 같이 신호의

주기가 시간 창문함수의 주기 T의 정수배인 경우에만 결과 스펙트럼이 정확하다. (b)와 같이 신호의 주기가 시간 창문함수의 주기의 정수배가 아닌 경우에는 기록시간(time record) 끝에서 불연속점이 발생하여 DFT 결과가 부정확해진다.

누설오차는 다음과 같은 방법을 이용하여 감소시킬 수 있다.

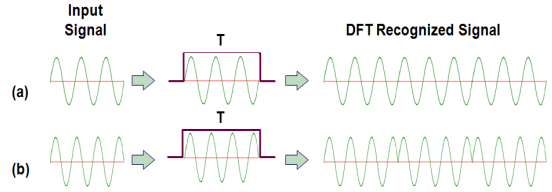


그림 3. 누설오차  
Fig. 3. Leakage Error

- 1) 창문함수 주기의 정수배인 주기함수를 가진함수로 사용
- 2) 주파수 분해능 증가
- 3) 적절한 창문 함수 사용

분석하고자 하는 시간 영역 데이터에 적절한 시간 창문 함수를 적용하면 누설오차를 줄일 수 있다. 분석에 어떤 시간 창문 함수가 사용되는가에 따라 누설 오차의 크기가 결정되기 때문에 적절한 시간 창문 함수의 선택이 중요하다. 일반적으로, 랜덤가진(random excitation)이나 사인가진(sinusoidal excitation)에 의해 발생하는 연속적인 신호에는 Hanning 창문함수가 사용되고, 충격가진(impact excitation)에 의한 신호에는 사각 창문함수(rectangular window)나 힘 창문함수(force window)와 지수 창문함수(exponential window)가 사용된다.

다음 식으로 정의되는 Hanning 창문함수의 스펙트럼은

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (13)$$

다음과 같이 계산된다.

$$W(\omega) = \left[ \frac{8}{3\omega^2 T} + \frac{2}{3T} \left\{ \frac{1}{\left( \omega + \frac{2\pi}{T} \right)^2} + \frac{1}{\left( \omega - \frac{2\pi}{T} \right)^2} \right\} + \frac{4}{T} \frac{1}{\left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 - \omega^2} \right] \sin^2 \frac{\omega T}{2} \quad (14)$$

식 (12)의 적분은 다음의 Simpson의 공식을 이용하여 수치적으로 구할 수 있다.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = h\left(\frac{1}{3}f_1 + \frac{4}{3}f_2 + \frac{2}{3}f_3 + \dots + \frac{2}{3}f_{N-2} + \frac{4}{3}f_{N-1} + \frac{1}{3}f_N\right) + O(N^{-4}) \quad (15)$$

따라서 Hanning 함수가 사용된다면 스펙트럼은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \hat{G}_i = & \frac{1}{2T} \left[ \frac{4}{3} W_{2.5}(G_{i+2.5} + G_{i-2.5}) \right. \\ & + \frac{4}{3} W_{1.5}(G_{i+1.5} + G_{i-1.5}) + \frac{2}{3} W_1(G_{i+1} + G_{i-1}) \\ & \left. + \frac{4}{3} W_{0.5}(G_{i+0.5} + G_{i-0.5}) + \frac{2}{3} W_0 G_i \right] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $W_i$ 는  $\frac{i}{T} Hz$ 에서 창문 스펙트럼(window spectrum)의 값이고,  $G_i$ 는  $\frac{i}{T} Hz$ 에서 실제 스펙트럼의 값이다.

표 1로부터 분석시간의 정수 배가 아닌 신호에 적용할 때 Hanning 함수가 사각 함수 보다 더 좋은 결과를 준다는 것을 알 수 있다.

표 1. 창문함수의 비교  
Table 1. Comparison of Window Functions

Window	3 dB Bandwidth	Highest Sidelobe	Sidelobe fall-off rate
Rectangular	0.9 Δf	-13 dB	20 dB/decade
Hanning	1.4 Δf	-32 dB	60 dB/decade

## 2. 평균의 효과

오차에는 바이어스 오차와 랜덤 오차가 있다. 바이어스 오차는 측정이나 분석에서 발생하는 체계적인 오차이며, 랜덤 오차는 평균을 무한히 긴 시간 동안 수행하지 않아서 발생한 추정치의 표준편차이다.

$H_1(\omega)$ 나  $H_2(\omega)$ 를 이용하여 FRF를 추정할 때, 크기와 위상각에 모두 랜덤 오차가 존재한다. 크기에 포함된 정규 랜덤 오차와 위상각의 랜덤오차는 다음과 같다[8].

$$\epsilon_r[|\hat{H}(\omega)|] \approx \sqrt{\frac{1-\gamma^2(\omega)}{\gamma^2(\omega)2n_d}} \quad (17)$$

$$\sigma[\hat{\phi}(\omega)] \approx \sin^{-1}\{\epsilon_r[|\hat{H}(\omega)|]\}$$

여기서  $\gamma^2(\omega)$ 는 상관도 함수이고,  $n_d$ 는 평균 횟수이다. 따라서 상관도 함수의 값이 1에 수렴하고, 평균횟수가 증가할수록 크기와 위상각의 랜덤오차는 줄어들어 보다 정확하게 FRF를 추정할 수 있게 된다.

## V. 결론

자동차 같은 복잡한 시스템을 정확하게 모델링하기 어렵고, 복잡한 형상을 단순화하는 과정에서 발생하는 오차 등의 이유로 유한요소해석에 의한 진동 해석 결과는 부정확한 반면 실제 구조물의 실험 데이터로부터 추출한 실험적 모드해석 정확하다고 볼 수 있다. 그러나 실험 결과가 구조물의 진동 특성을 정확하게 나타낸다는 가정은 여러 가지 측정 오차로 인하여 정확하지 않을 수 있다.

이 논문에서는 실험적 모드해석의 근간이 되는 FRF의 측정에 영향을 미치는 오차들을 살펴보고, 그러한 오차들을 감소함으로써 보다 정확한 FRF를 측정할 수 있는 여러 가지 방법을 제시하였다.

## 참고 문헌

- [1] S. S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [2] D. J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application 2nd ed.*, Research Studies Press Ltd., 2000.
- [3] M. R. Ashory, "Correction of mass-loading effects on transducers and suspension effects in modal testing", *Proc. IMAC 16*, pp. 815~828, 1998.
- [4] J. Chiang and Y. F. Chou, "The effects of stingers on receptance function measurements", *Transactions of ASME 118*, pp. 220~226, 1996.
- [5] K. G. McConnell, J. Dong, E. Zander and S.

- Thekentattil, "Effect of stinger stiffness on measured accelerance", *Proc. IMAC 15*, pp. 672~678, 1997.
- [6] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley & Sons, 1993.
- [7] D. E. Newland, *An Introduction to Random Vibrations and Spectral and Wavelet Analysis 3rd ed.*, John Wiley & Sons, 1993.
- [8] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random Data : Analysis and Measurement Procedures 3rd ed.*, John Wiley & Sons, 2000.

정 해 일 (Haeil Jung)

정회원



1992년 4월 : 임페리얼 컬리지  
(공학박사)

1984년~1995년 9월 :  
기아자동차 중앙기술연구소

1995년 9월~현재 :  
한국기술교육대학교  
기계정보공학부교수

<관심분야> 신호분석, 진동 소음 제어