대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 2, 135-148. May 2011

중학교 기하에서의 공리와 증명의 취급에 대한 분석

이 지 현*

우리나라 중학교 수학 2에서는 공리의 역할을 하는 명제를 공리라는 명시 없이, 실험에 의해 확인한 옳은 결과로만 받아들여 증명에 사용한다. 그러나 공리 개념은 경험적 입증과 연역적 증명, 직관기하와 논증기하, 증명과 증명이 아닌 것의 차이를 이해하는데 매우 중요한 것이다. 본 연구의 교과서 분석과 영재학생들을 대상으로 한 인식조사 결과는, 공리와 증명의 취급에 대하여 우리나라 교과서가 가진 한계와 문제점을 보여주고 있다.

Ⅰ. 서론

그리스인들은 공리로부터의 연역이라는 방법을 창안하여, 기하학을 경험적 학문에서 연역적 학문으로 바꾸어 놓았다. 유클리드 《원론》의 연역적 전개는, 어떤 기하학적 명제가 경험적으로 참일 수 있으나 그것의 수학적 정당화는 경험에 의존하지 않는다는 것을 명확히 하였다. 그런데 그리스인들은 그로부터 나머지 명제를 연역할 수 있는 기초인 공리를 임의의 가정 이상의 공간에 대한 자명한 진리로 간주하였다(Mueller, 1969: 290). 공리를 자명한 진리로 본 그리스적 관점은, 유클리드의 다른 공리에 비하여 자명하지 않았던 평행공리를 공리로 인정하는데 심각한 장애 요인이었다. 많은 수학자들이 평행공리를 다른 공리로부터 증명하고자 시도하였다. 결국 비유클리드 기하학의 출현은 어떤 체계에서 한 명제의 공리 혹은 정리의 지위를 결정하는 것은 그 명제가 가진 자명성의 정도가 아니라 바로 "그 명제가 체계의 다른 명제들과 독립인가?"의 문제라는 것이 밝혀지게 된 계기가 되었다(Dodes, 1966: 32)[1].

현대수학에서의 공리는 자명한 진리가 아닌 단순히 참이라고 가정하는 명제이므로, 어떤 공리를 수용할 때 자명성에 호소하는 것과 같은 별도의 정당화는 불필요하다. 그러나 학교 수학에서는 자명한 진리로서의 공리를 쉽게 찾아볼 수 있다. Human과 Nel(1987)은 여전히 일부 교과서에서 공리를 자명한 진리라고 기술하고 있음을 지적하였다. 자명한 진리가 아닌 임의의 가정으로서의 공리의 성격에 대한 이해는 수학교사들에게도 부족한데, Cristofferson(1933)은 많은 수학교사들이 유클리드의 공리를 필연적으로 참인 명제로 이해한다고 하였다. De Villiers (1984: De Villiers, 1986에서 재인용)의 연구에서도 약 50%의 예비교사들이 여전히 공리를 자명하기 때문에 증명 없이 수용한다고 생각하고 있었다.

우리나라 중학교 수학 2에서는 증명을 도입

* 서울 전자고, leeji_hyun@naver.com

1) 어떤 명제 A가 공리체계 S 에서 공리인가 정리인가는 다음과 같이 결정된다. 공리체계 S에서 A대신 A의 부정($\sim A$)으로 바꾼 새로운 체계 S' 역시 무모순이면, 명제 A는 공리체계 S에서 공리이다. 그러나 새로운 체계 S'가 모순이면, 명제 A는 공리체계 S에서 정리이다(Cederberg, 1989: 4).

하면서 공리라는 용어를 사용하지 않기 때문에, 공리의 역할을 하는 명제를 실험에 의해 확인한 옳은 결과로 받아들여 증명에 사용하게 된다. 예를 들어 “평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 동위각의 크기는 서로 같다.”와 그 역은 중학교 기하에서 공리라고 할 수 있는데, 이러한 평행선의 성질은 공책 혹은 모눈종이에 그려진 평행선 혹은 두 개의 삼각자를 이용한 측정으로 밝힌 옳은 사실로 수용한다. 공리의 역할을 하는 명제를 ‘공리’라는 명시 없이 직관적으로 정당화하여 수용하는 우리나라 교과서의 접근 방식에 대하여, 몇몇 연구자들이 외국 교과서와의 비교를 통하여 그 문제점을 지적하였다. 김홍기(2004: 117-118)는 중학교 기하에서의 공리에 대한 직관적인 정당화가 논리적인 문제점도 야기할 수 있다고 하면서, 중학교 수준에서 공리의 역할을 하는 명제를 공리라고 명시할 수 없다면 ‘실험으로 밝힌 사실’보다는 ‘이미 알려진 사실’로 취급하여야 한다고 지적하였다. 러시아 교과서와 비교 분석한 한인기(2005: 536-537)역시 우리나라 교과서에서는 직관적으로 정당화되는 성질과 엄밀한 증명이 필요한 명제를 구분하는 명확한 기준이 없음을 지적하였다.

평행선의 성질과 같은 명제에 대하여 직관적인 정당화를 제시하는 것은, 공리라는 명시 없이도 공리의 역할을 하는 명제를 증명의 출발점으로서 학생들이 자연스럽게 수용하도록 하기 위한 교수학적 변환의 산물이다. 그러나 이러한 교수학적 변환은 의도하지 않은 결과도 가질 수 있다. Faucett(2006: 21-22)는 학생들이 어떤 명제는 관찰로 자명한 참이라고 받아들이면서, 동시에 같은 정도로 자명해 보이는 어떤 명제에 대해서는 관찰에 의해 도달한 결론을 의심하는 것에 모순과 혼란을 느낄 수 있다고 지적하였다. 이 연구의 목적은 공리를 실험 혹은 관찰을 통하여 직관적으로 정당화되는 사실로만 취급함으로서 누락되거나 파손될 수 있는 공리 및 이와 관련된 증명의 의미를 분석하는 것이다. 먼저 공리를 도입하지 않는 우리나라 교과서와 공리를 도입하는 미국 일부 교과서에서, 공리 및 증명 개념에 대한 다른 교수학적 변환 사례를 비교 분석한다. 또 중학교 영재학생들을 대상으로 공리의 직관적 정당화에 대한 인식을 조사하여, 공리 및 증명에 대한 학교수학의 교수학적 변환에 대하여 논의하고자 한다.

II. 공리 및 증명에 대한 교수학적 변환 사례의 비교: 우리나라와 미국교과서

우리나라 교육과정에서 증명이 본격적으로 도입되기 전인 중학교 수학 1까지 취급하는 기하는 직관기하로 분류된다. 즉 작도나 실습을 통하여 얻어진 결과들에 대하여, 그에 대한 증명이 명시적으로 다뤄지지 않는다. 그러나 다음과 같이 증명을 도입하는 중학교 수학 2부터 취급하는 기하는 논증기하로서, 모든 정리에 대하여 가정과 결론을 명확히 설정하고 기존의 밝혀진 사실을 토대로 논리적이고 정확한 증명과정을 요구한다(윤성식 외 5인, 2009: 184-185).

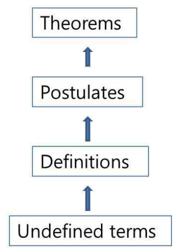
> 하지만 측정이나 실험에 의해 어떤 명제가 참임을 알아보는 것은 그 성질을 추측하거나 이해하는 데는 도움이 되지만, 측정이 오차가 있으므로 항상 옳다고 볼 수 없다.
> 따라서, 경험이나 실험에 따르지 않고 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 명제가 참임을 보이는 과정이 필요한데, 이러한 과정을 증명이라고 한다. …이제, 명제 ‘삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.’의 증명 과정을 살펴보자. <증명 생략>

> 위의 증명 과정 중에서
> ‘평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 엇각의 크기는 서로 같다.’
> ‘평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 동위각의 크기는 서로 같다.’
> 라는 명제를 사용하였는데, 이것은 증명에 의하여 이미 옳다고 확인된 명제이다.
> 이처럼 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 다른 명제를 증명할 때 자주 사용되는 것을 **정리**라고 한다.

위와 같은 우리나라 교과서의 증명에 대한 접근 방식은, 공리체계라는 형식적 기초 없이 학생들이 자명한 참으로 받아들이는 명제로부터 시작하여 국소적 정당화로서의 증명을 다룰 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 김홍기(2001: 291)는 위와 같은 우리나라 교과서의 접근 방식이 증명을 시작하기 위해 필요한 ‘이미 옳다고 밝혀진 성질’이 무엇인가에 대한 명확한 제시가 없다는 문제점을 지적하였다. 따라서 학생들은 어떤 성질이 증명 없이 받아들일 수 있는 가정이 되는지를 명확하게 생각할 수 없으므로 증명에서 한 발도 나가지 못할 수도 있다.

한편 ‘정리’라는 용어를 도입하면서도 공리라는 용어는 사용하지 않으므로, 사실 우리나라 교과서에서는 공리와 정리를 잘 구별할 수 없다. 위의 증명의 예시에서 정리로 언급한 평행선의 성질은, 중학교 수학 1에서 실험 혹은 관찰에 의하여 직관적으로 정당화한 성질이며 ‘증명된 명제’가 아니기 때문에 정리가 아니다. 정리라는 용어 사용의 이러한 문제점은 김홍기(2001: 292)가 이미 지적하였으나 여전히 일부 교과서에서 찾아볼 수 있었다.

다음으로는 공리 및 이와 관련된 증명에 대한 다른 교수학적 변환의 사례를 비교하기 위하여, 미국 교과서 4종을 살펴본다. 우리나라 교과서에서는 실험이나 측정만으로는 어떤 성질이 옳다고 단정할 수 없으며 이론적인 뒷받침을 바탕으로 한 증명의 필요성을 언급한다. 그러나 공리라는 용어를 사용하지 않기 때문에, ‘증명 없이 참이라고 가정하는 명제’라는 공리의 성격을 설명하지 못한다. 또 모든 명제를 증명할 수는 없으며, 모든 증명은 공리에 근거한다는 수학적 증명의 중요한 특징을 전달하기 어렵다. 그러나 본 연구에서 조사한 미국 기하 교과서 4종[2]에서는 모두 증명을 본격적으로 다루면서 공리를 도입하였다. 예를 들어 Tagliapietra와 Pilger(2000)의 교과서《Geometry for christian school》에서는 다음과 같이 공리와 증명에 대하여 서술하였다(Tagliapietra, Pilger, 2000: 16-17).



> 기하체계는 마치 사다리와 같이 단계적으로 구성된다. 기하체계에는 세 가지 무정의 용어, 많은 정의, 24개의 공리와 많은 정리가 있다. 이 체계에서 각 상위수준은 하나 혹은 그 이상의 하위수준으로부터 구성된다. … 기하체계의 최종적인 구성단위들은 바로 공리와 정리이다. 공리와 정리는 모두 용어(정의된 용어 혹은 무정의 용어) 사이의 관계를 기술한다.… 먼저 정의된 용어와 증명된 명제의 논리적인 연쇄로 어떤 명제가 참임을 밝힐 수 있을 때, 그 명제를 정리라 한다. 정리를 정당화하는 과정을 증명이라 한다. … 무정의 용어가 그로부터 다른

2) 본 연구에서 검토한 미국 기하 교과서 4종의 목록은 다음과 같다.
Jacobs, H. R. (2003). Geometry seeing, doing, understanding(3rd ed.). New York: W. H. Freeman and Company.
Serra, M. (2003). Discovering geometry: An investigative approach. Emeryville: Key Curriculum Press.
Rising, G. R. (1985). Houghton Mifflin unified mathematics 1, 2. Boston : Houghton Mifflin Co.
Tagliapietra, R., Pilger, K. D.(2000). Geometry for christian school(2nd ed.). Bob Jones University Press.
Tagliapietra와 Pilger(2000), Jacobs(2003)의 교과서는 직관기하를 다루고 있지 않으며 바로 기하체계로부터 시작한다. 반면 Serra(2003)와 Rising(1985)의 교과서는 직관기하를 먼저 다루고 후반부에 논증기하를 본격적으로 취급한다.

용어를 정의할 수 있는 출발점이 되는 것처럼, 공리는 그로부터 다른 정리를 증명할 수 있는 기본명제이다. 따라서 공리는 증명 없이 참이라고 가정된다.

Serra(2003)의 교과서《Discovering geometry: An investigative approach》에서는, 우리나라의 중학교 수학 1에서 중학교 수학 2로의 변화와 같이 직관기하를 다루다 맨 마지막 장에서 논증기하를 본격적으로 취급한다. 이 교과서에서의 직관기하단원에서는 우리나라 중학교 수학 1과 마찬가지로 기하학적 성질에 대한 실험적 정당화를 취급한다. 그러나 우리나라 중학교 수학 1과는 달리 이렇게 실험적으로 확인하는 기하학적 성질은 모두 '추측'이라고만 부르고 있다. 예를 들어 직관기하 단원에서 우리나라 중학교 수학 1에서도 다루는 "맞꼭지각의 크기는 서로 같다."에 대한 간단한 추론 과제를 다음과 같이 서술하였다(Serra, 2003: 121).

"두 각이 직선을 이루는 쌍이면 그들은 서로 보각이다(직선을 이루는 쌍의 추측(linear pair conjecture)."와 "맞꼭지각의 크기는 서로 같다(맞꼭지각 추측)."에 대해 귀납적으로 탐구하였다. 이 두 명제가 어떤 연관을 가지고 있는가? 즉 만약 "두 각이 직선을 이루는 쌍이면 그들은 서로 보각이다."를 참이라고 가정한다면, 명제 "맞꼭지각의 크기는 서로 같다."는 반드시 참이 된다는 것을 연역적 추론을 사용하여 보일 수 없을까?

여기서 "두 각이 직선을 이루는 쌍이면 그들은 서로 보각이다."는 나중에 공리로 취급하게 되는 명제이다. 이렇게 직관기하단계에서도 공리를 '실험으로 밝힌 사실'이 아닌 '참이라고 가정하는 사실'로 취급하고 있음을 살펴볼 수 있다. 이 교과서의 마지막 장에서는 증명이 무엇이며, 또 증명을 하기 위해 필요한 전제가 무엇인지를 다음과 같이 설명한다. 그리고 앞서 귀납적으로 탐구한 많은 기하학적 추측 중 그로부터 다른 명제를 증명할 수 있는 공리가 무엇인지를 제시하였다(Serra, 2003: 669).

지금까지 우리는 옛날 수학자들이 해왔듯이 귀납적으로 탐구하여 많은 기하학적 성질을 알아냈으며 이에 대한 추측을 생각해보았다. 이때 어떤 추측을 설명하기 위해서는 연역적 추론을 사용해야 한다. 이미 어떤 추측이 왜 참인가를 설명하기 위하여 비형식적인 증명을 하였다. 그럼에도 불구하고 모든 추측을 증명할 수는 없는데, 사실 우리는 증명에서 때때로 중요한 가정을 하거나 혹은 증명되지 않은 추측에 의존하였다. 증명의 결론은 증명의 모든 전제가 참이며, 또한 그 안의 모든 논증이 타당할 때 그리고 그때만이 참이다. 잘못된 가정은 틀린 결론에 도달하게 된다. 이제까지 당신이 했던 가정이 모두 믿을 만한 것이었는가?
이 장에서는 유클리드처럼 기하를 탐구하기로 한다. 우리는 정의, 성질, 공리라는 전제로부터 시작한다. 이러한 전제에 기초하여 기하학적 추측을 체계적으로 증명할 수 있다. 증명된 추측은 정리가 되며, 증명된 정리는 또 다른 추측을 증명할 때 사용된다.

기하학의 논리적 논증을 위한 전제
1. 정의와 무정의 용어
2. 산술・등식・합동의 성질
3. 기하학의 공리
4. 이미 증명된 기하학적 추측(정리)

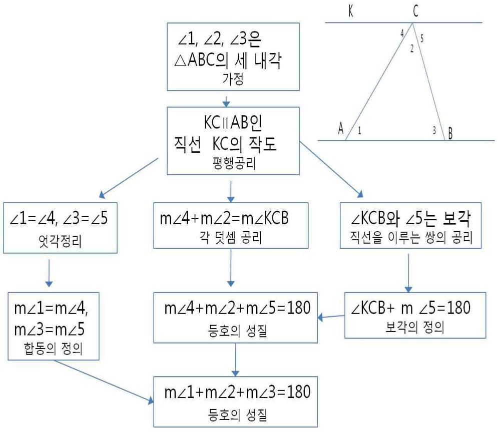
공리들을 토대로 앞에서 우리나라 중학교 수학 1에서와 같이 비형식적으로 다루었던 "삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이다."에 대한 증명을, 각 추론 단계에서의 가정을 정의, 공리, 정리 등으로 명확하게 밝혀 다음과 같이 제시하였다. 특히 점 C를 지나 변 AB에 평행한 보조선의 작도는 평행공리에 의해 가능하다고 밝히고 있다(Serra, 2003: 682).

삼각형 내각 합에 대한 추측을 증명하라: 삼각

형의 내각의 합은 180° 이다.

가정: $\angle 1, \angle 2, \angle 3$은 삼각형 $\triangle ABC$의 세 내각이다.

결론: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$



이 교과서에서는 연역적 증명이 직관기하에서 다루었던 비형식적 추론과 분명히 차별화되어 다뤄지고 있음을 알 수 있다. 이와 비교하여 공리를 명시적으로 도입하지 않는 우리나라 교과서에서는 직관기하와 논증기하의 구분, 혹은 중학교 수학 1과 중학교 수학 2에서 다루고 있는 추론의 차이는 증명하고자 하는 명제의 가정과 결론이 명시되어 제시된다는 것 이외에는 잘 드러나지 않는다.

증명에 대한 우리나라 교과서와 미국 교과서의 접근은 '정리'라는 용어 사용에서도 비교해 볼 수 있었다. Serra(2003)의 교과서는 그 전까지 실험적으로 탐구한 기하학적 추측에 대한 증명이 기하학의 공리들에 의해 완전히 지지되고 있는지를 정확하게 검토한 후에 증명된 '추측'을 정리라고 바꾸어 부른다. Rising(1985)의 교과서도 《unified mathematics 1》에서는 직관기하를, 《unified mathematics 2》에서는 논증기하를 취급한다. 이때《unified mathematics 2》에서는 공리와 증명을 도입한 이후에 1권에서 '성질'이라고 불렀던 기하학적 명제를 정리라고 명시한다. 이렇게 미국교과서에서 정리라는 용어의 신중한 사용은 우리나라 일부 교과서에서 직관적으로 확인한 결과에 불과한 평행선의 성질을 나중에 정리라고 부르는 문제점과 비교되는 대목이다. 사실 우리나라 중학교 교과서에서 정리라는 용어는 피타고라스 정리를 제외하고는 거의 사용되지 않으며, 직관적으로 정당화하여 수용하는 공리의 역할을 하는 명제와 증명된 정리를 모두 '성질'이라고 한다. 그러나 본 연구에서 검토한 미국 교과서들은 논증기하를 본격적으로 다루면서 증명된 명제를 모두 정리라고 부르고 있었다.

III. 영재학생들의 공리에 대한 인식

1. 연구방법 및 연구 참여자

우리나라 교과서에서는 공리라는 용어를 사용하지 않기 때문에, 일반학생들에게는 교과서에서 사용하지 않는 용어인 공리에 대하여 묻기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 학교수학에서 간접적으로 전달되는 공리의 개념을 나름대로 이해하여 표현할 수 있는 영재 학생들을 연구대상으로 선정하였다. 그리고 공리의 뜻과 필요성 및 중학교 교과서에서의 공리에 대한 직관적 정당화에 대한 인식을 조사하기 위하여 2개의 설문 문항을 설계하였다[3].

2010년 1월, 서울대학교 과학영재센터 수학분과에 소속된 중학교 2학년 학생 24명이 본 연구의 조사에 참여하였으며, 각 문항마다 20분정도의 시간을 주고 자신의 생각을 자유롭게 쓰도록 하였다.

3) 설문지는 부록에 제시하였다.

2. 인식 조사 결과

가. 공리의 뜻과 필요성 및 예

문항 1에서는 공리의 뜻과 필요성을 설명하고, 알고 있는 공리를 예시하도록 하였다. 조사에 참여했던 모든 영재 학생들이 수학에서 모든 명제를 증명하는 것은 불가능하며, 증명 없이 수용하는 전제인 공리의 뜻과 필요성을 다음과 같이 옳게 설명하였다.

- 어떤 명제 A를 증명하려면 이를 위해 또 다른 명제 B를 이용해야 하고 또 명제 B의 타당성을 의심할 경우에는 이를 증명할 수 있는 또 다른 명제 C가 필요하다. 이러한 과정이 반복되면 결국 끝까지 증명이 불가능해지는 악순환에 빠지게 된다. 즉 이를 위해 증명할 필요가 없는 명제, 즉 공리가 필요한 것이다.

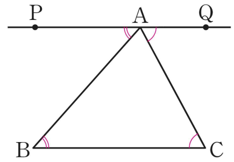
공리의 예에 대하여, 많은 학생들이 "두 점을 지나는 직선은 유일하다.", "직선은 무한히 연장할 수 있다."와 같은 유클리드 원론의 공리를 제시하였으며, 이러한 명제가 자명하기 때문에 공리라고 하였다. 이러한 답변에서 학생들이 공리를 '자명한 참인 명제'라고 생각하고 있음을 알 수 있었다.

나. 공리를 증명 없이 직관적으로 수용하는 이유

문항 2-1과 2는 "삼각형의 내각의 합은 180°이다."의 증명에서 사용되는 직관적으로 정당화되는 공리에 관한 학생들의 생각을 조사하기 위한 것이다. 중학교 교과서에서는 삼각형을 세 조각으로 잘라 세 각의 꼭지점이 한 점에서 만나도록 모아보는 실험을 통해서는 모든 삼각형의 내각의 합을 대해 확인할 수 없으며, 다음과 같은 논리적 증명이 필요하다고 설명한다.

(증명) 평행선의 성질을 이용하여 삼각형의 내각의 크기의 합을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC에서 꼭짓점 A를 지나면서 변 BC에 평행한 직선 PQ를 그으면



$\angle B = \angle PAB$(엇각), $\angle C = \angle QAC$(엇각)이므로

$$\angle A + \angle B + \angle C$$
$$= \angle A + \angle PAB + \angle QAC$$
$$= \angle PAQ = 180^\circ$$

그런데 이 증명에서 쓰인 평행선의 성질은 삼각형의 내각의 합과는 달리, 삼각자를 이용한 작도 활동으로 밝힌 실험적 결과를 옳은 것으로 받아들인다. 이와 관련하여 문항 2-1은, "삼각형의 내각의 합에 대해서는 증명이 필요하다면, 왜 평행선의 성질은 증명 없이 받아들여야 하는가?", 즉 "왜 공리를 증명 없이 수용하여야 하는가?"에 대한 영재학생들의 생각을 다음과 같은 친구의 질문상황에서 조사하였다.

문항 2-1. "선생님, 삼각형의 내각의 크기의 합을 결정할 때는 각도기로 관찰이나 실험한 결과를 믿을 수 없다고 하셨는데요, 그런데 왜 평행선의 성질('평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 같다')에 대해서는 각도기로 재 본 결과를 직관적으로 믿어야 하나요?"
소민이가 여러분의 친구라면 여러분은 소민이의 질문에 대하여 어떻게 설명하겠는가?

문항 2-1의 "공리를 왜 증명 없이 수용하여야 하는가?"에 대한 학생들의 답변을 다음 네 가지 유형으로 분류하였다. 먼저 유형 1의 학생들은, 직관적인 정당화와 관계없이 공리는 증명의 전제로서 도입되는 것이라고 하였다. 그리고 유형 2의 학생들은, "평행이면 동위각의 크기는 같다."라는 성질이 유클리드 평행공리와 동치 또는 그로부터 증명되는 정리라고 답하였다. 이러한 유형 1과 2는 옳은 반응이다.

유형 1. (직관적인 정당화와 관계없이) 공리는 증명하지 않는 전제이다.
- 공리이기 때문에 증명할 수가 없다(증명을 하려면 또 다른 성질이 필요하므로 증명할 수 없는 성질이 생길 수밖에 없다)

유형 2. '평행이면 동위각이 같다'는 평행 공리에서 연역할 수 있는 정리이다.
-유클리드 기하의 평행 공리를 받아들인다면 동위각의 크기가 같다는 것을 쉽게 증명할 수 있다. 평행공리가 옳지 않다고 생각한다면 비유클리드 기하를 배울 수 있다. 비유클리드 기하에서는 평행공리가 성립하지 않고 동위각의 크기도 같지 않다.
-원래는 증명할 수 있는 거지만, 아직 중학교 교육과정을 그렇게 설정해 놓아서 그렇게 밖에 평행선의 성질을 설명할 수 없지만, 배운 것으로 증명할 수 있는 것은 증명할 수 있어야 한다. 본래 유클리드의 평행공리가 있는데, 그것을 이용하면 된다.

유형 3에 속하는 학생들은 다음과 같이 공리를 '자명하기 때문에 증명이 필요 없는 명제'라고 하였다. 유형 1로 분류된 반응이 자명성에 관계없이 공리는 증명하지 않는 전제로 수용한다고 설명한 반면에, 유형 3으로 분류된 반응은 공리를 증명 없이 수용하는 이유에 대하여 공리의 자명성을 언급하였다.

유형 3. 공리는 직관적으로 자명하므로 증명이 필요 없다.
-평행선의 성질은 증명이 필요 없는 기초적인 명제인 공리이다. 공리는 다른 명제를 증명할 때 쓰이고 자명한 것으로 증명이 필요 없다.

"평행이면 동위각의 크기는 같다."는 실험이나 관찰로 정당할 수밖에 없다고 하거나, 제시된 실험 외의 다른 정당화를 설명한 반응을 유형 4로 분류하였다.

유형 4. '평행이면 동위각이 같다'는 실험(관찰) 혹은 다른 방법으로 정당화될 수 있다.
-동위각의 크기가 같다는 것을 보이기 위해서는 각도기로 재서 증명하는 방법밖에 없으므로
-평행선의 성질에서는 꼭 각도기로 재볼 필요없이, 각도가 같다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면 평행선의 동위각은 어느 삼각자를 사용하든지 같게 나타나기 때문이다. 따라서 언제나 평행선들의 동위각의 크기는 같다.
-무한 평면은 넓이가 무한하기 때문에 어디든지 기준(또는 원점)이 될 수 있다. 즉 두 직선 L, M이 서로 평행하고 L, M사이의 최소 거리를 h라 한다면 직선 L을 기준으로 하였다가 기준을 h만큼 이동하여 보면 L의 자리에 M이 오게 된다. 즉 L과 M은 같은 상태라고 볼 수 있다. 또한 동위각을 이루는 또 다른 직선은 길이가 무한하므로 L과 이루는 각이나 M과 이루는 각이나 같게 된다. 즉 동위각은 같다(또는 유클리드 기하에서 공리이므로 자명하다).
-평행선의 정의는 아무리 늘여도 만나지 않은 둘 이상의 직선인데 이것을 좌표로 옮겨 나타낸다면(예: $ax+by=c, a'x+b'y=c'$라 하여 두 직선이 만나는, 즉 공통해가 없도록 하는 a, b, c, a', b', c'의 관계는 $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}, \frac{c}{a}\neq\frac{c'}{a'}$)이다. 이때 임의의 평행이 아닌 직선을 그었을 때 두 직선에 대한 동위각이 같음을 보일 수 있으므로 평행선의 성질이 성립함을 알 수 있다.

여기서 유형 3과 4의 학생들은 공통적으로 증명의 전제인 공리의 수용에서 직관적, 경험적 혹은 다른 정당화를 필요로 하고 있음을 알 수 있다. 그런데 공리는 자명한 참인 명제가 아니라, 참이라고 가정하는 명제인 까닭에 별도의 정당화는 부차적이다. 그러나 유형 3과 4의 반응은 학생들이 공리에 대한 직관적 정당화를 부차적인 것으로 생각하지 않으며, 공리를 증명의 기초가 되는 가정 이상의 자명한 참인 명제로 받아들인다는 점을 시사한다. 유형 1-4로 분류된 반응 이외의 오답으로는 다음과 같은 사례를 관찰할 수 있었다.

-유클리드 원론에서 유클리드는 동측 내각의 합

이 180도인 것을 평행선이라고 정의하였다. 동위각의 크기가 같다는 것은 동측내각의 크기가 같다는 것을 의미하고 이는 유클리드 공리에 의해 성립한다. 아직까지 수학자들이 평행에 관한 정확한 설명을 못하고 있다.

김홍기는 두 개의 삼각자를 이용한 작도 및 측정활동으로 “평행이면 동위각이 같다.”를 직관적으로 정당화하는 것이, 동위각을 같게 그린 두 직선을 평행이라 하고 이것을 다시 ‘평행선의 성질’에 의해 동위각이 같다고 말하는 순환논법으로 오해될 수 있음을 지적하였다. 이 학생 역시 평행선의 성질을 정당화하기 위하여 ‘서로 만나지 않는 직선’이라는 평행선의 정의를 ‘동측내각의 합이 180도인 것’으로 바꾸어 순환 논리에 빠지고 있다. 이러한 사례는 공리에 대한 직관적 정당화가 학생들에게는 논리적인 문제점까지도 야기할 수 있음을 보여준다.

문항 2-1에 대하여, 24명의 학생 중 유형 1은 5명, 유형 2는 4명, 유형 3은 3명, 유형 4는 6명, 그 외의 오답이 3명이었으며 나머지 3명의 학생들은 답변이 불충분하여 분류가 불가능하였다. 앞서 문항 1의 결과에서 모든 학생들이 공리의 뜻을 알고 있었음에도 불구하고, 공리에 대한 직관적인 정당화를 부차적인 것으로 간주하지 않았던 절반의 학생(12명)들은 증명 없이 참이라고 가정하는 명제라는 공리의 성격을 잘 이해하지 못하고 있었다.

다. 실험을 통해 확인한 공리를 이용한 증명에 대한 인식

문항 2-2는 관찰 혹은 실험으로 확인한 공리를 이용한 증명에 대한 생각을 알아보기 위하여, 문항 2-1과 마찬가지로 다음과 같은 친구의 질문상황을 제시하였다.

문항 2-2. 소민 : “선생님, 그럼 삼각형의 내각의 합에 대한 ‘논리적인 증명’이라는 것도 결국 관찰이나 직관에 의해 얻은 ‘평행선의 성질’을 이용해야 한다면, 이러한 증명이 정말 논리적인 것이라고 할 수 있나요?”

여러분은 소민이의 생각에 대해 어떻게 생각하는가? 소민이가 여러분의 친구라면 어떻게 설명해줄 수 있을까?

문항 2-2에 대한 학생들의 반응은 다음과 같은 두 가지로 분류할 수 있었다. 먼저 유형 1의 학생들은 “공리는 참인 명제이므로, 삼각형의 내각의 합에 대한 증명도 옳다.”고 답변하였다.

유형 1. 공리는 참인 명제이므로, 삼각형의 내각의 합의 증명도 옳다.

- 관찰이나 직관에 의해 얻어진 성질이긴 하지만 확실하고 정확한 사실이므로 ‘평행선의 성질’을 이용한 증명 또한 논리적이라고 볼 수 있다.
- 문제를 풀 때 1+1=2임을 증명하면서 풀 수 없는 것처럼, 공리는 항상 참이 되는 논리적으로 기본적인 명제이므로 증명하지 않아도 논리적 증명이라 할 수 있다.

“삼각형의 내각의 합은 180도와 같은가, 아니면 더 적은가 혹은 더 큰가?”라는 삼각형의 내각의 합에 대한 세 가지 경우에 대하여, 유클리드 공리를 자명한 진리라고 받아들였던 그리스인들은 유클리드 공리로부터 유도되는 첫 번째 경우만이 참이며, 다른 두 가지 경우는 거짓이라고 보았다. 즉 그리스인들은 “삼각형의 내각의 합은 180도이다.”라는 결론이 평행공리라는 가정의 범위 내에서만 참임을 명확하게 깨닫지 못하였다. 반면 현대수학에서는 “평행선 수가 하나이다.”, 아니면 “하나 이상이다.” 혹은 “하나보다 작다.”는 공리에 따라 결정되는 각 체계에서는 세 경우 중 하나만이 참이며, 평행선의 갯수가 결정되지 않은 더 약한 체계에서는 두 가지 경우가 함께 일어나는 것도 가능하다. 또

물리적 실험이 세 가지 경우 중 어떤 것을 입증하는가는 순수수학이 아닌 응용수학의 문제라고 본다(Blanché, 1962: 4-5).

유형 2로 분류된 학생들은 유형 1과는 달리 모든 수학적 증명이 증명하지 않는 가정에 기초하며, 삼각형의 내각의 합에 대한 증명은 평행선의 성질이라는 가정 하에서 옳다는 점을 다음과 같이 서술하였다.

> 유형 2. 삼각형의 내각의 합에 대한 증명은 '평행선의 성질'이라는 가정 하에서 옳다.
> - 어차피 평행선의 성질을 증명하려면 또 다른 성질이 필요하고 또 이를 증명해야 하므로 완벽한 증명은 있을 수 없다. 즉 평행선의 성질은 관찰과 직관으로 증명한 것이 아니라 가정한 것이다.
> - 적어도 유클리드 기하학에서는 논리적인 증명이라고 할 수 있단다. 유클리드 기하학을 유클리드가 세운 5가지 공리를 공리로 한 기하학이란다. 5가지 공리는 누가 보더라도 직관적으로 참인 것 같지. 하지만 그것도 엄연한 가정이란다. 그러니까 그 가정 하에서는 논리적인 증명이라고 할 수 있지. 이 공리들이 아닌 다른 공리들을 가정한 다른 기하학도 있단다. 이러한 가정이 없다면 증명은 근본적으로 모두 논리적이지 않겠지.
> - 이러한 평행선의 성질이 성립한다는 가정 하에 하는 것이 유클리드 기하학이고 그 안에서의 증명은 논리적인 것이다. 그러나 평행선의 성질을 이용하지 않는 비유클리드 기하학은 따로 존재한다. 그 비유클리드 기하학 안에서는 논리적인 것이 아니다.

Faucett(2006)은 증명의 본질을 이해한다는 것은, 어떤 결론이 특정 가정의 범위 내에서만 성립한다는 사실을 인식하는 것이라고 보았다. 이런 관점에서, 유형 2로 분류된 학생들이 유형 1로 분류된 학생들보다 "삼각형의 내각의 합은 180°이다." 라는 결론이 평행선의 성질이라는 가정의 범위에서 성립함을 명확하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 총 24명 중 유형 1은 13명, 유형 2는 7명이었으며 그 외 나머지 4명의 반응은 답변이 불충분하여 분류 혹은 판단이 불가능하였다. 마지막으로 문항 2-2에 대한 다음의 반응은 공리에 대한 직관적인 정당화가 증명의 본질에 대해 혼동을 야기할 수 있음을 보여주는 사례이다.

> -우리가 공부하는 기하학은 모두 유클리드 기하나 비유클리드 기하 중의 하나인데 평행선의 성질이나 삼각형 내각의 크기의 합은 모두 유클리드 기하에 들어간다. 이 유클리드 기하라는 것은 모두 유클리드가 정의한 것으로 다른 사람들의 정의보다 비교적 좋기 때문에 정한 것이다. 그러므로 오차가 하나도 없이 정확한 풀이는 존재하지 않는다. 따라서 모든 정리의 증명은 약간의 직관과 관찰을 필요로 하는 것이다.

Ⅳ. 결론

본 연구에서는 공리 및 증명에 대한 학교수학의 교수학적 변환에서 누락 혹은 파손될 수 있는 점을 반성하기 위해, 우리나라 교과서와 미국 일부 교과서를 비교 분석하였으며 영재학생들을 대상으로 공리에 대한 인식을 조사하였다.

우리나라 중학교 수학 2에서는 공리의 역할을 하는 명제를 실험 혹은 관찰에 의해 확인한 옳은 결과로 받아들여 증명에 사용하고 있다. 우리나라 교과서는 공리라는 용어를 도입하지 않으므로, 증명의 전제를 '이미 옳다고 밝혀진 성질'과 같은 애매한 문구로 기술한다. 반면 본 연구에서 검토한 미국 교과서 4종에서는, 증명을 본격적으로 취급하면서 모두 공리라는 용어를 도입하여 증명 없이 참이라고 가정하는 명제인 공리의 성격과 모든 수학적 증명은 공리에 기초한다는 것을 설명하였다. 우리나라 교과서에서 중학교 수학 1의 직관기하와 증명을

본격적으로 다루기 시작하는 중학교 수학 2의 차이가 분명하지 않은 반면에, 공리를 도입하는 미국 교과서에서는 연역적 증명을 비형식적 추론과 분명하게 차별화하여 취급하였다. 이러한 점은 '정리'라는 용어 사용에서도 나타나는데, 우리나라 교과서는 사실 정리라는 용어를 거의 사용하지 않으며 공리의 역할을 하는 명제와 증명된 명제를 모두 '성질'이라고 부른다. 반면 미국 교과서들은 증명을 본격적으로 취급하면서 증명된 명제에 대하여 정리라는 용어를 사용하였다.

교과서에서 공리라는 용어를 사용하지 않음에도 불구하고, 본 연구에서 조사한 모든 영재 학생들은 공리라는 용어의 뜻을 알고 있었다. 그러나 절반가량의 영재 학생들이 증명 없이 참이라고 가정하는 명제라는 공리의 성격을 정확히 이해하고 있지는 못하였다. 영재 학생들은 공리를 '참으로 가정하는 명제'라기보다는 '자명한 참인 명제'라고 생각하고 있었으며, 공리의 수용에 직관적·경험적 혹은 다른 정당화를 필요로 하였다. 사실 공리에 대한 직관적 정당화는 공리라는 명시 없이 학생들이 그 명제를 다른 명제를 증명하기 위한 전제로서 쉽게 수용하도록 하기 위한 부차적인 것이지만, 많은 영재 학생들은 공리의 직관적인 정당화를 부차적인 것으로 보지 않았다. 또 "삼각형의 내각의 합은 180° 이다."라는 명제가 평행선의 성질이라는 가정의 범위 내에서 성립한다는 것을 명확하게 표현한 영재 학생들도 절반에 지나지 않았다.

Birkhoff and Beatley(1930: 86-87)는 증명 교육의 허점을 다음과 같이 지적한 바 있다. "학생들이 논리적 체계의 기본으로서 특정 가정의 필요성을 제대로 이해하는가? 학생들이 기하에서 모든 명제를 증명한다고 생각하지는 않는가? 우리가 반드시 어떤 명제들을 가정해야 되기 때문이 아니라, 보다 중요한 다른 문제로 서둘러 넘어가기 위하여 그것을 가정한다고 오해하지는 않는가? 기하뿐만이 아니라 모든 논리체계에 내재해 있는 특정 가정의 필요성을 학생들에게 제대로 강조하는가?". 본 연구의 교과서 분석 및 영재학생들의 인식 조사 결과는 우리나라 증명교육 역시 Birkhoff와 Beatley가 지적한 맹점을 가지고 있음을 시사한다.

증명에 대한 많은 연구(Chazan, 1993; Williams, 1979; 서동엽, 1999)들은 학생들이 경험적 입증과 연역적 증명을 잘 구별하지 못한다는 사실을 보고하고 있다. 어떤 명제는 경험적 입증으로 자명한 참이라고 받아들이지만 역시 자명해 보이는 어떤 명제는 경험적 탐구의 결론을 의심하고 증명하여야 하는 것도 학생들이 경험적 입증과 연역적 증명을 혼동하는 원인 중 하나로 생각된다. 학생들은 공리에 대한 직관적, 경험적 정당화도 그것에 대한 증명으로 오해할 수 있는데, 사실 연역을 수학의 방법론으로 확립한 유클리드조차도 SAS합동 조건에 대한 경험적 입증에 불과한 것을 그것의 증명이라고 생각하였다. 이 점에서 공리개념은 경험적 입증과 연역적 증명, 직관기하와 논증기하, 증명과 증명이 아닌 것의 차이를 이해하는데 매우 중요한 것이다. 그러나 우리나라 교과서에서는 공리를 '실험에 의해 밝힌 옳은 사실'로 소홀하게 도입, 취급하고 있으며, 결국 증명을 피상적으로 다루게 된다.[4] 중학교 기하에서 공리와 증명 취급의 문제점과 한계를 분석한 본 연구의 결과가 증명 교육에 대한 새로운 대

4) 최근 수립된 '창의 중심의 수학과 교육과정'에서는, 중학교 수학에서 증명을 기존의 논리적 형식 증명(정리, 가정-결론-증명으로 구분한 형식과 기호를 사용한 간결한 형태의 진술)을 크게 약화시켜 '정당화' 수준으로 취급한다(대한수학교육학회, 2011). 이렇게 중학교 수학에서 증명을 약화 혹은 삭제하자는 논의가 대두되고 있는 것은 물론 학생들에게 형식인 증명이 어렵다는 사실뿐만 아니라, 본 논문에서 지적한 바와 같이 증명을 다루긴 하지만 수박 겉핥기식으로 다룸으로서 실제적인 효과를 거두지 못한 것도 큰 원인이라고 생각된다.

안을 모색하는 기초자료가 되기를 기대한다.

참고문헌

김홍기(2001). 중학교 수학에서 증명을 위한 공리 취급에 관한 연구. **수학교육, 40**(2), 291-315.

김홍기(2004). 중학교 수학에서 기하 내용 취급에 관한 연구. **수학교육학연구, 14**(2), 111-127.

서동엽(1999). **증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색: 중학교 수학을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사논문.

대한수학교육학회(2011). **창의 중심의 수학과 교육과정 개정 시안 연구에 관한 세미나**. 제 62회 수학교육학 집중 세미나 자료집.

윤성식, 조난숙, 김화영, 조준모, 장홍월, 김해경 (2009). **중학교 수학 2**. 서울 : 더텍스트.

한인기(2005) 한국과 러시아의 7-8학년 수학교과서 도형영역에 나타난 직관적 정당화와 엄밀한 증명. **수학교육, 44**(4), 535-546.

Birkhoff, G.D. & Beatley, R. (1930). A new approach to elementary geometry. In *The teaching of geometry: Fifth yearbook*(pp. 86-95). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanché, R. (1962). *Axiomatics*(G. B. Keene Trans.). London : Routledge.

Cederberg, J. N. (1989). A course in modern geometries. New York : Springer.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cristofferson, H. (1933). *Geometry Professionalized for Teachers*. Columbia University.

De Villiers, M. D. (1986). The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching. RUMEUS studies in mathematics education, 2. University of Stellenbosch.[http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf]

Dodes, I. A. (1966). Mathematics: Its structure, logic and method. In E. G. Begle (Ed.), *The role of axiomatics and problem solving in mathematics*. Boston, MA: Ginn and Company.

Fawcett, H. P. (2006). **증명의 본질**(장경윤, 류현아, 한세호 역). 서울 : 경문사. (원저는 1966년 출판).

Human, P. G., & Nel, J. H. (1987). Alternative instructional strategies for geometry education: A theoretical and empirical study. Final report of the University of Stellenbosch experiment in mathematics education (USE- ME) project. [http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/usewo1.htm]

Jacobs, H. R. (2003). *Geometry seeing, doing, understanding*(3rd ed.). New York : W. H. Freeman and Company.

Mueller, I. (1969). Euclid's elements and the axiomatic method. *British Journal for the Philosophy of Science, 20*(4), 289-309.

Serra, M. (2003). *Discovering geometry: An investigative approach*. Emeryville : Key Curriculum Press.

Rising, G. R. (1985). *Houghton Mifflin unified mathematics 1, 2*. Boston : Houghton Mifflin Co.

Tagliapietra, R., Pilger, K. D. (2000). *Geometry for christian school*(2nd ed.). Bob Jones University Press.

Williams, E. (1979). *An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation. Edmonton : University of Alberta.

An Analysis on the Treatment of Axiom and Proof in Middle School Mathematics

Lee, Ji Hyun (Seoul Electronics High School)

Middle school mathematics treats axiom as mere fact verified by experiment or observation and doesn't mention it axiom. But axiom is very important to understand the difference between empirical verification and mathematical proof, intuitive geometry and deductive geometry, proof and nonproof. This study analysed textbooks and surveyed gifted students' conception of axiom. The results showed the problem and limitation of middle school mathematics on the treatment of axiom and proof.

* Key Words : axiom(공리), proof(증명), axiomatic system(공리체계), Greek geometry(그리스 기하학).

논문접수 : 2011. 3. 27
논문수정 : 2011. 5. 4
심사완료 : 2011. 5. 20

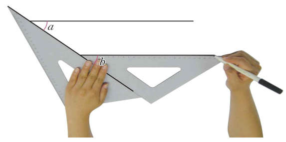
[부록설문지]

[1] 수학에서 **'공리'의 의미**에 대하여 아는 대로 쓰고 알고 있는 공리를 제시해 보시오. 또 수학에서 **'공리'**가 **왜 필요**하다고 생각하는가? 그 이유를 설명하시오.

[2] 다음은 중학교 1학년 소민이가 학교에서 '평행선의 성질'과 '삼각형의 내각의 합'에 대하여 배운 내용입니다.

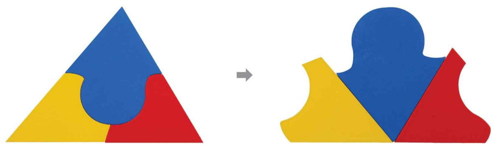
선생님은 먼저 다음과 같은 활동으로 평행선의 성질 즉, "평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 같다."에 대해 설명하셨다.

오른쪽 그림과 같이 두 개의 삼각자를 사용하여 평행선을 그어 보고, $\angle a$와 $\angle b$의 크기를 비교하여 보자.



그리고 삼각형의 내각의 합을 알아보기 위하여 다음활동을 하였다.

$\boxed{1}$ 활동지의 예각삼각형을 점선을 따라 자른다.
$\boxed{2}$ 위 $\boxed{1}$에서 자른 세 조각을 세 각의 꼭짓점이 한 점에서 만나도록 모은다.

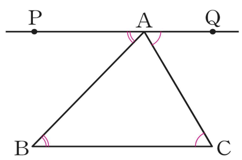


(1) 예각 삼각형의 내각의 크기의 합은 얼마인가?
(2) 직각삼각형, 둔각삼각형에 대해서도 위와 같은 활동을 해 보고, 각 삼각형의 내각의 크기의 합이 얼마인지 말하여 보자.

선생님: 그러나 이러한 몇 가지 실험으로는 모든 삼각형에 대하여 조사할 수 없을 뿐만 아니라, 정말 정확히 180도인지도 알 수 없습니다. 그래서 논리적인 증명이 필요합니다.

그리고 선생님은 전 시간에 배운 '평행선의 성질'을 이용하여 다음과 같이 증명하였다.

(증명) 평행선의 성질을 이용하여 삼각형의 내각의 크기의 합을 구하여 보자.
오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서
꼭짓점 A를 지나면서 변 BC에 평행한 직선 PQ를 그으면
$\angle B = \angle PAB$ (엇각),
$\angle C = \angle QAC$ (엇각) 이므로
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle PAB + \angle QAC$
$= \angle PAQ = 180^\circ$



그런데 선생님의 설명을 들은 소민이는 다음과 같은 질문을 하였다.

“선생님, 삼각형의 내각의 합을 결정할 때는 각도기로 관찰이나 실험한 결과를 믿을 수 없다고 하셨는데요, 그런데 왜 평행선의 성질(‘평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기는 같다’)에 대해서는 각도기로 재 본 결과를 직관적으로 믿어야 하나요?”

[2-1] 소민이가 여러분의 친구라면 여러분은 소민이의 질문에 대하여 어떻게 설명하겠는가?

[2-2] 소민이는 또 이렇게 질문하였다.

“선생님, 그럼 삼각형의 내각의 합에 대한 ‘논리적인 증명’이라는 것도 결국 관찰이나 직관에 의해 얻은 ‘평행선의 성질’을 이용해야 한다면, 이러한 증명이 정말 논리적인 것이라고 할 수 있나요?

여러분은 소민이의 생각에 대해 어떻게 생각하는가? 소민이가 여러분의 친구라면 어떻게 설명해줄 수 있을까?