옥트리 기반의 적응적 사면체 요소망 구성

김철원, 박석훈, 최민규

광운대학교

acekcw@gmail.com, attackyourheart@gmail.com, mgchoi@kw.ac.kr

Octree-Based Adaptive Tetrahedral Meshing

Chul Won Kim, Suk Hoon Park, Min Gyu Choi

Kwangwoon University

요 약

본 논문에서는 양질의 이면각을 가진 사면체로 물체 내부를 채우는 볼륨 요소망 구성 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안한 방법은 실행시간이 빠르고 안정적이며 구현이 쉬운 장점을 가지고 있다. 효율적인 공간 활용을 위해 옥트리를 사용함으로써 물체 내부에서 표면에 이르기까지 다양한 크기의 사면체를 활용할 수 있다. 최소 이면각을 최대화하고 최대 이면각을 최소화하는 양질의 요소망을 얻기 위하여 옥트리의 인접 셀들 사이의 레벨 차이를 제한하며, 옥트리 및 요소망 생성 속도를 높이기 위하여 정규 격자에서의 부호거리장을 사용한다. 본 논문에서 제안한 요소망 구성 방법은 유한요소법 기반의 변형체 시뮬레이션이나 사면체 기반의 유체 시뮬레이션 등에서 유용하게 활용될 수 있다.

Abstract

This paper proposes a volume meshing method that fills the inside of an object with tetrahedra, of which dihedral angles are good. The suggested method is fast, stable and easy to implement. It can also utilize an octree structure to space-efficiently fill an object with graded tetrahedra by reducing the total number of tetrahedra. To obtain a high-quality mesh with good dihedral angles, we restrict the octree such that any pair of neighboring cells only differs by one level. To efficiently construct a restricted-octree and generate a volume mesh from the octree, we utilize a signed distance field of an object on its bounded workspace. The suggested method can be employed in FEM-based simulation of large elasto-plastic deformation and tetrahedral-mesh-based simulation of fluid flow.

키워드: 볼륨 요소망 생성, 사면체 요소망, 옥트리, 부호거리장

Keywords: volume meshing, tetrahedral mesh, octree, signed distance field

1. 서론

편미분 방정식을 지배 방정식으로 가진 유체의 흐름이나 고체의 변형 등과 같은 물리적 현상을 수치적으로 시뮬레이션하는데 있어서 가장 널리 사용되는 방법은 유한요소법이다. 컴퓨터 그래픽스에서 시뮬레이션의 대상이 되는 대부분의 물체는 복잡한 형상으로 이루어져 있으며 이러한 물체에 유한요소법을 적용하기 위해서는 물체의 내부를 사면체와 같은 간단한 형태의 요소들로 채운 요소망이 필요하다. 유한요소법을 적용한 시뮬레이션의 정확도는 요소망을 구성하는 사면체들의 이면각과 밀접한 관련이 있다. 이면각이 0°와 180°에 가까울수록 얇은 사면체가 만들어지며 그에 따라 유한요소법의 정확도가 떨어지게 된다[1, 2]. 또한 유한요소법의 수행 시간은 요소의 개수에 비례하며 요소의 개수가 많을수록 수행 시간이 길어지게 된다. 따라서 효과적인 시뮬레이션을 위해서는 비교적 적은 개수의 요소로 이루어지고 양질의 이면각을 가진 요소망이 요구된다.

복잡한 형상의 물체를 간단한 형태의 요소들로 분할하는 요소망 구성은 공학과 컴퓨터 과학에서 오랫동안 활발히 연구되었으며 다양한 형태로 응용되고 있다. 이차원 공간상에서

투고일: 2010-04-15 / 심사일: 1차 2010-04-25 / 게재확정일: 2010-05-03

삼각형의 허용 각도를 어느 정도 보장하는 요소망 생성 알고리즘들로는 격자점 기반의 삼각화[3], Delaunay 삼각화[4], 쿼드트리 기반의 삼각화[5] 등이 있다. 사면체 요소망 생성에 Delaunay 삼각화나 옥트리를 이용하여 최소 이면각을 이론적으로 보장하는 연구들도 제안되었지만 보장되는 최소 이면각이 너무 낮았다[1, 2, 6, 7, 8]. 최근에 들어 양질의 이면각을 보장하기 위해 체심 입방 격자 구조(BCC)에서의 Delaunay 삼각화를 채택하여 물체의 표면을 감싸는 사면체 요소망을 생성하는 방법이 제안되었다[9]. Labelle와 Shewchuk은 이 방법을 확장하여 요소망의 경계가 물체의 표면에 놓일 수 있도록 하였으며 옥트리를 도입하여 가능한 적은 개수의 사면체를 사용하도록 하였다[10]. 하지만 물체의 내외부를 판단하는데 있어서 절단 함수(cut function)를 사용함으로써 사면체화보다 물체 내외부의 판별에 더 많은 계산 시간이 소요되었다. 또한 비정규적인 옥트리의 사용으로 인해 구현이 쉽지 않다.

본 논문에서는 다각형으로 표현된 물체의 내부에서 표면에 이르기까지 다양한 크기의 사면체를 이용하여 요소망을 구성함으로써 가능한 적은 개수의 사면체를 생성하는 볼륨 요소망 구성 방법을 제안한다. 즉, 물체의 내부는 듬성한 사면체로 채우고 표면에 가까울수록 보다 조밀한 사면체를 사용함으로써 최종 요소망에서의 정점, 에지, 사면체의 개수를 줄이고자 한다. 이를 위하여 삼차원 공간상에서 복잡한 물체의 근사적 다해상도 표현에 널리 이용되는 옥트리 공간 분할을 사용한다. 또한 옥트리의 꼭지점들이 물체의 내부 또는 외부에 속하는지를 판단하는데 소요되는 시간을 단축하기 위하여 가장 조밀한 옥트리 셀들에 해당하는 정규 격자 상에서의 부호거리장(signed distance field)을 미리 계산하고 이로부터 상향 방식으로 옥트리를 구성한다.

2. 부호거리장 기반의 옥트리 구성

복잡한 형상을 가진 물체로부터 물체의 내외부 및 경계를 다양한 크기의 입방체 셀(cubic cell)로 분할하는 옥트리를 구성하기 위해서는 옥트리 셀과 물체 사이의 포함 관계가 정의되어야 한다. 본 논문에서는 주어진 물체의 표면이 삼각형들로 구성되어 있으며 삼차원 공간상에서 닫힌 표면을 형성한다고 가정한다. 삼각형이 아닌 다각형일 경우에는 삼각화를 미리 적용할 수 있으며, 열린 표면의 경우에도 빈틈을 메우는 방법(hole filling method)을 미리 적용할 수 있다.

옥트리를 구성할 작업 영역의 정규 격자점들에서 물체의 닫힌 표면을 기술하는 삼각형들까지의 부호거리장을 빠르게 계산하기 위하여 표면 주변의 격자점들에서 각도 가중치 법선 벡터[11, 12, 13]를 이용하여 부호를 가진 최단 거리를 계산한 후, 물체 내부의 격자점들에는 파면 전파(wavefront propagation)에 기반한 빠른 전진(fast marching) 기법[14]을 적용한다. 정규 격자에서의 부호거리장이 만들어지면 정규 격자를 최하위 셀로 간주한 후 옥트리 셀을 상향 방식으로 재귀적으로 병합함으로써 부호거리를 가진 옥트리를 구성한다.

2.1 부호거리장 구성

복잡한 형상을 가진 물체로부터 그 물체의 내부를 채우는 사면체 요소망을 만드는데 있어서 가장 많은 시간을 소요하는 작업 중의 하나는 공간상의 어느 한 점이 물체의 내부 또는 표면에 속하는지를 판단하는 것이다. 물체를 음함수(implicit function)로 기술한다면 이를 빠르게 계산할 수 있지만 임의의 형상을 가진 복잡한 물체를 음함수로 기술하는 것 자체가 또 하나의 어려운 문제이므로 본 논문에서는 삼각형들까지의 거리를 직접 계산하는 방식을 택한다.

부호거리장을 기반으로 높이 n의 옥트리를 구성한다고 하자. 이를 위해서는 물체의 바운딩박스 내에서 옥트리의 최하위 셀을 기본 격자로 가지는 최대 $(2^n + 1)^3$ 크기의 정규 격자를 만들고, 각 격자점에서 물체의 표면을 구성하는 삼각형들까지의 최단 거리 및 내외부 여부를 그 부호로 가지는 부호거리장을 계산해야 한다. 본 논문에서는 물체의 내부는 음, 외부는 양의 부호를 할당한다. 정규 격자 상에서 물체 표면까지의 부호거리장을 구하기 위해 매 격자점에서 모든 삼각형까지의 거리를 구하는 것은 시간 소모적이다. 본 논문에서는 부호거리장을 보다 빠르게 계산하기 위하여 물체 표면 주변의 격자점들에서만 최단 거리를 엄밀히 구하고[11], 내부의 격자점들에서는 파면 전파에 기반한 빠른 전진 기법[14]을 통해 근사적인 최단 거리를 구하는 방식을 택한다.

물체 표면 주변에서의 부호거리장을 구하기 위해 어느 한 삼각형은 유한한 개수의 격자 셀들에만 포함된다는 사실에 주목하자. 각 삼각형에 대해서 그 삼각형을 포함하는 최소 셀들의 격자점에서 그 삼각형까지의 최단 거리를 계산한 후, 격자점에 기록된 기존 거리보다 작다면 이를 갱신한다. 물체 표면을 구성하는 모든 삼각형들에 대해서 이와 같은 작업을 수행하고 나면 삼각형들이 직접 포함된 셀의 격자점에서는 물체 표면까지의 최단 거리가 올바르게 계산되었다고 할 수 있다. 또한 표면 주위에서 빠짐없이 다루어졌기 때문에 삼차원 공간상에서 파면을 형성하고 있다고 볼 수 있다.

물체 내부의 거리가 계산되지 않은 격자점들에서 물체 표면까지의 거리를 구하기 위해서 표면 주변의 거리가 계산된 격자점들, 즉 파면에 속한 점들의 거리를 내부로 빠르게 전진시키는 기법을 적용한다. 먼저 파면에 속한 모든 격자점들을 거리를 키(key)로 가지는 우선순위 열(priority queue)에 집어넣는다. 거리가 최소인 점 p를 우선순위 열에서 뽑아낸 후, p에 인접하고 아직 거리가 계산되지 않은 모든 격자점 p_i에 대해서 격자점 p의 거리에 p와 p_i 사이의 거리를 합한 거리를 기록한 후 우선순위 열에 집어넣는다. 이를 우선순위 열이 텅 빌 때까지 수행한다. 이와 같이 거리에 따라 파면을 연속적으로 전파시킴으로써 물체 내부의 모든 격자점에서 물체 표면까지의 거리를 근사적으로 구할 수 있다. 또한 이와 동시에 물체

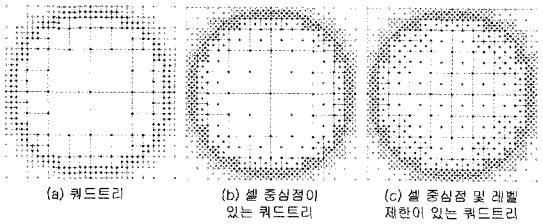


그림 1: 부호거리장으로부터 구성한 쿼드트리: 빨간점은 외부점, 파란점은 내부점, 녹색점은 셀 중심점을 나타낸다.

외부의 격자점들에 대해서도 마찬가지 방법으로 표면까지의 거리를 계산할 수 있다. 물체 표면 경계의 사면체를 생성할 때에만 정확한 최단 거리가 필요하기 때문에 초기 파면 이외의 점에서는 근사적으로 구한 최단 거리만으로도 충분하다.

부호거리장을 만들기 위해서는 어느 한 격자점에서 물체 표면까지의 최단 거리뿐만 아니라 그 격자점이 물체의 내부인지 외부인지 알아야 한다. 이를 위하여 Bærentzen과 Aænas[11]가 제안한 바와 같이 물체 표면 주변의 격자점에서 삼각형까지의 최단 거리를 구할 때 격자점과 가장 가까운 삼각형 위의 점에서 법선 벡터를 구하고 그 점에서 격자점을 향하는 방향 벡터와 내적을 취하여 격자점이 물체의 외부에 있는지 또는 내부에 있는지를 판별한다. 이때 가장 가까운 점이 삼각형의 에지나 꼭지점에 있을 수 있기 때문에 이러한 경우에도 안정적인 결과를 낼 수 있도록 각도 가중치 법선 벡터[11, 12, 13]를 이용한다.

2.2 옥트리 구성

본 논문에서는 최종 요소망에서의 정점, 에지, 사면체의 개수를 줄이기 위하여 물체 내부에서 표면에 이르기까지 다양한 크기의 사면체를 이용하여 요소망을 구성한다. 즉, 물체의 내부는 듬성한 사면체로 채우고 표면에 가까울수록 보다 조밀한 사면체로 채우고자 한다. 이를 위하여 삼차원 공간상에서 복잡한 물체의 근사적 다해상도 표현에 널리 이용되는 옥트리 공간 분할을 사용한다.

물체의 내부 및 경계를 포함한 옥트리를 구성하기 위해 부호거리장이 정의된 정규 격자를 옥트리의 가장 조밀한 셀로 간주한 후 상향 방식으로 병합해 나간다. 이때 모든 꼭지점이 양의 부호를 가진 셀, 즉 물체 외부의 셀은 최종 사면체 요소망에 기여하는 바가 없기 때문에 옥트리에 포함시키지 않는다. 또한 물체 표면에서 가장 조밀한 사면체 요소를 생성하기 위하여 물체 경계에 놓인 셀들은 병합하지 않는다. 즉 물체 내부에 속하는 셀들만을 재귀적으로 병합해 나간다. 이때 3.1절의 사면체화를 위하여 말단 셀들의 면, 에지, 정점 사이의 인접 관계 및 물체 표면까지의 부호거리를 기록해둔다.

옥트리 셀을 손쉽게 사면체화할 뿐만 아니라 양질의 이면각을 얻기 위하여 그림 1에 예시된 바와 같이 각 셀의 중심에 중심점을 추가하였다. 셀 중심점의 부호거리로는 셀 꼭지점들에서의 부호거리 평균을 사용할 수도 있으며, 보다 엄밀한 부호거리를 얻기 위해서는 부호거리장을 구성할 정규 격자의 크기를 줄일 수 있다. 셀 중심점을 사용하더라도 인접 셀들 사이의 레벨 차이가 크면 안정된 이면각을 확보할 수 없다. 본 논문에서는 양질의 이면각을 얻기 위해 옥트리 인접 셀들의 레벨 차이를 최대 1로 제한한다. 즉 최대 두 배 크기를 유지시킨다. 이를 위해서는 깊이 우선 탐색을 통해 인접 셀보다 2 이상 작은 레벨을 가진 셀을 찾게 되면 그 셀을 분할하여 레벨을 높인다. 모든 셀들이 레벨 제약조건을 만족할 때까지 이러한 레벨 유지 깊이 우선 탐색을 반복한다. 그림 1에서는 도식화의 편의를 위해 이차원 공간상의 쿼드트리를 예시하고 있으며, 물체 외부의 셀들도 병합해서 보여주고 있다.

3. 요소망 구성

부호거리장 및 옥트리를 이용하여 다해상도로 근사한 물체는 다양한 크기의 입방체에 해당하는 셀들로 구성된다. 따라서 최종 사면체 요소망을 구성하기 위해서는 물체의 내부에 속한 셀 및 물체의 경계에 걸쳐 있는 셀의 입방체를 사면체화해야 한다. 물체의 내부에 속한 셀에 대해서는 기본적으로 셀을 이루는 입방체의 꼭지점 및 입방체의 중심점, 각 면의 중심점을 이용하여 사면체를 생성하고, 경계에 걸친 셀에 대해서는 내부 셀과 마찬가지 방법으로 생성한 사면체를 물체의 표면을 따라 절단한 후 추가적인 사면체화를 수행한다.

3.1 옥트리 셀의 사면체화

본 논문에서는 옥트리의 각 셀에 해당하는 입방체를 손쉽게 또한 대칭적으로 사면체화하기 위하여 셀 및 각 면에 중심점을 둔다. 즉, 각 셀은 기본적으로 여덟 개의 꼭지점, 한 개의 셀 중심점, 여섯 개의 면 중심점을 가진다. 하지만 그림 2(a)에서와 같이 어느 한 면을 통해 인접한 셀들의 레벨이 더 높은 경우 요소망의 무결성을 위해 인접 셀들의 면 중심점 및 꼭지점도 사면체화에 고려되어야 한다. 이때 레벨이 더 높은 인접 셀들의 꼭지점은 레벨이 더 낮은 셀의 에지 중심점으로 해석된다. 따라서 어느 한 셀의 사면체화 과정에서는 인접 셀들과의 레벨 차이에 따라 셀 꼭지점, 셀 중심점, 면 중심점, 에지 중심점과 같은 네 가지 종류의 정점들을 고려해야 한다.

옥트리를 구성할 때 셀들 사이의 레벨 차이를 제한하였기 때문에 어느 한 면 또는 에지를 통해 인접한 셀들은 레벨 차이에 따라 그림 2에서와 같은 세 가지 관계를 형성한다. 회색 셀의 분홍색 면이 현재 고려 대상이라면, (1) 먼저 그림 2(a)에서와 같이 면을 통해 인접한 셀들이 더 높은 레벨을 가진 경우, (2) 면을 통해서는 같은 레벨이더라도 그림 2(b)에서와 같이 어느 한 에지를 통해 인접한 셀들이 더 높은 레벨을 가진 경우, (3) 마지막으로 그림 2(c)에서와 같이 면뿐만 아니라 에

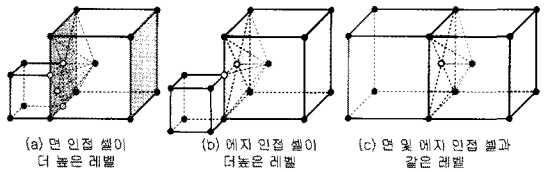


그림 2: 인접 셀과의 레벨 차이에 따른 사면체화: 빨간점은 셀 꼭지점, 보라점은 셀 중심점, 노란점은 면 중심점, 하늘색점은 셀 꼭지점인 동시에 에지 중심점을 나타낸다.

지를 통해서도 인접 셀들의 레벨이 같은 경우로 세분화할 수 있다. 면 및 에지를 통해서 인접한 셀들이 더 낮은 레벨인 경우는 그림 2(a)와 (b)의 반대이며, 이때 사면체화는 레벨이 같은 경우인 그림 2(c)에서와 똑같은 방식으로 처리할 수 있다.

내부 및 경계에 속하는 옥트리 셀들을 사면체화하기 위해서는 각 셀의 각 면의 각 에지에 대해서 그림 2에 예시된 세가지 경우 중 하나를 독립적으로 적용하면된다. 기본적으로 각 면의 각 에지는 양 끝 꼭지점 및 면 중심점, 셀 중심점으로 구성된 하나의 사면체를 만들어낸다(그림 2(c) 참조). 에지 중심점이 존재할 경우에는 양 끝 꼭지점 중 하나와 에지 중심점을 이용해 두 개의 사면체가 된다(그림 2(b) 참조). 면에 인접한 셀이 더 높은 레벨일 경우에는 인접 셀의 면 중심점을 이용하여 하나의 사면체가 더 만들어진다(그림 2(a) 참조). 따라서, 각 셀의 각 면의 각 에지는 최소 하나에서 최대 네 개까지의 사면체를 만들어낼 수 있다. 이와 같은 사면체화 과정을 신속히 수행하기 위해서는 각 셀의 각 면에서 인접 셀과의 레벨 차이 및 각 에지의 중심점을 옥트리 구성 과정 중에 미리 구해두면 된다.

3.2 경계에서의 사면체화

물체 내부뿐만 아니라 경계에 걸친 옥트리 셀도 한꺼번에 처리하기 때문에 3.1절의 사면체화 과정을 적용하여 얻은 요소망은 물체 외부의 정점들을 포함하고 있을 수 있다. 물체 내부의 정점들만으로 구성된 사면체는 택하고, 외부의 정점들만으로 구성된 사면체는 버리며, 물체 내외부의 정점들이 혼재된 사면체, 즉 경계에 걸친 사면체는 물체의 표면을 따라 절단해야 한다. 물체 표면에 의해 절단된 사면체는 더 이상 사면체가 될 수 없는 경우가 있다. 이때에는 이를 다시 사면체로 분할하는 과정이 필요하다.

경계에 걸친 사면체의 에지 중에서 한 끝점은 물체의 내부에 속하고 다른 끝점은 물체의 외부에 속한 경우 그 에지와 물체 표면이 교차하는 점이 존재한다. 이를 교차점(cut point)이라 하자. 교차점이 에지의 한 끝점에 너무 가까운 경우 재구성을 통해 양질의 이면각을 얻을 수 없는 문제가 발생한다. 이를 방지하기 위하여 Labelle와 Shewchuk의 방법[10]에서와 같이 교차점과 한 끝점까지의 거리가 에지 길이 대비 일정 값 α 이하인 경우에는 그 끝점을 교차점 쪽으로 이동시켜 물체의 표면점(zero point)이 되게 한다. 이와 같은 정점의 이동 및 표면

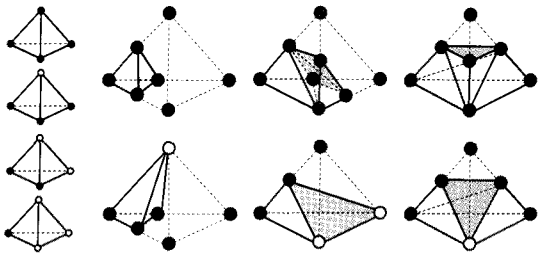


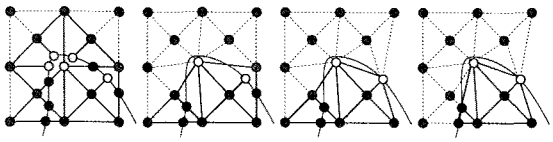
그림 3: 절단을 통해 생성될 수 있는 사면체: 빨간점은 내부점, 녹색점은 외부점, 흰점은 표면점, 파란점은 교차점임.

점으로의 전환은 그 정점의 부호거리를 0으로 만들며 동시에 그 정점에 연결된 다른 모든 에지의 교차점을 제거한다. 또한 그 정점을 공유하는 모든 사면체의 변형을 유발한다. 따라서, α는 교차점과의 거리가 에지 길이 대비 가까운 내부점 및 외부점을 표면점으로 변형시키기 위한 허용 범위로서의 의미를 가진다. 끝점을 교차점 쪽으로 이동시키는 방법은 3.3절에서 보다 자세히 설명한다.

위와 같은 교차점 제거 및 표면점으로의 변형을 수행하고 나면, 사면체를 구성하는 각 정점은 물체 내부점, 외부점, 표면점 중에 하나가 된다. 따라서 이들을 조합한 총 3^4가지 형태의 사면체들이 있을 수 있으며 회전 및 대칭을 적용하면 그림 3에서와 같이 열 가지 형태로 축약된다. 따라서 각 사면체를 그림 3에 예시된 방법에 따라 절단 및 재구성하면 주어진 물체에 대한 사면체 요소망을 얻을 수 있다. 이는 본 논문에서와 유사한 사면체화가 필요한 Labelle와 Shewchuk의 방법[10] 보다 더 쉽게 구현 가능하다.

절단된 사면체는 삼각형 및 사각형으로 이루어진 최대 다섯 면을 가지고 있으며 최대 세 개의 사면체로 분할된다. 사각형을 가진 절단된 사면체를 분할하기 위해서는 사각형을 두 개의 삼각형으로 양분해야 하며 대각선 선택에 따라 두 가지 방식으로 양분할 수 있다. 이때 다음 두 가지 요건을 만족해야 한다. (1) 절단된 다른 사면체가 그 사각형을 공유하고 있을 수 있기 때문에 절단된 다른 사면체에서도 똑같은 방식으로 양분해야 한다. (2) 절단된 사면체가 세 개의 사각형을 가지고 있을 경우 올바른 사면체화를 위해서는 어느 한 점에서 만나는 두 개의 대각선이 있어야 한다.

절단에 의해 생긴 사각형은 두 개의 내부점을 가지거나 또는 네 개의 교차점만을 가진다는 사실에 주목하자. 내부점을 가지고 있을 경우에는 내부점 중에서, 그렇지 않을 경우에는 교차점 중에서 정점 번호가 가장 작은 점을 선택한 후 그 점에서 시작하는 대각선을 선택한다. 이와 같은 방법은 위에서 언급한 두 가지 요건을 만족시킨다. 첫 번째 요건은 사각형 단위로 일관된 방식을 택하기 때문에 만족되고, 두 번째 요건은 세 개의 사각형을 만드는 세 개의 내부점 중에서 가장 작은 번호를 가진 점은 그 점이 포함된 두 사각형 모두에서 대각선의



(a) 변형 전 (b) 변형 후 (c) 추가 변형 후 (d) 사면체화 후

그림 4: 표면점의 변형 및 사면체화: 파란색 곡선은 물체의 표면 곡선, 분홍점은 변형될 내부점, 초록점은 변형될 외부점, 하늘색점은 내외부점에 가까운 교차점을 나타낸다.

끝점으로 선택되기 때문에 만족된다. 그림 3에 예시된 사면체 재구성은 여기서 논의한 방법을 따르고 있다.

3.3 표면점들의 변형

에지의 끝 정점에 충분히 가까운 교차점이 있을 경우 그 정점을 교차점 쪽으로 이동시켜 표면점으로 만듦으로써 최종적으로 만들어질 사면체 요소망의 이면각 질을 높일 수 있다. 교차점은 에지 단위로 생길 수 있기 때문에 에지를 처리하는 순서에 따라 결과가 달라질 수 있으며, 어느 한 정점에 달린 여러 에지의 교차점이 그 정점에 충분히 가까울 수 있기 때문에 교차점 쪽으로 이동시키는 방법 또한 여러 가지가 있을 수 있다.

본 논문과 유사한 접근 방식을 취한 Labelle와 Shewchuk의 연구[10]에서는 에지를 무작위 순서로 처리하였으며, 정점과 α 이하의 거리를 가진 교차점 중에서 (1) 가장 먼저 발견된 교차점으로 에지의 끝 정점을 이동시키는 방법을 적용하였다. 본 논문에서는 이외에도 (2) 가장 가까운 거리에 있는 교차점으로 에지의 끝 정점을 이동시키는 방법과 (3) α 이하의 거리를 가진 교차점들의 평균 위치로 이동시키는 방법을 적용해 보았다. 실험에 따르면 세 가지 방법 중에서 평균 위치로 이동시키는 방법이 가장 좋은 결과를 내었다. 그림 4는 평균 위치로 이동시키는 방법을 적용한 예제이다. 도식화의 편의를 위하여 이차원 상에서 예시하였다.

4. 실험 결과

본 논문의 적응적 사면체 요소망 구성 기법은 Microsoft Windows 7 환경에서 Autodesk Maya Plugin으로 구현되었으며, 모든 실험에서는 Intel Core2 Quad 2.93GHz 프로세서와 8GB 메모리를 장착한 컴퓨터가 사용되었다. 현재 모든 실험에서는 단일 쓰레드만을 사용하고 있으며, 추후 다중 쓰레드로 확장하고자 한다.

본 논문에서 제안한 기법을 그림 5와 7에 예시된 여러 형태의 물체에 적용하여 사면체 요소망을 구성하였다. 그림 5는 옥트리 높이는 5, 표면점 변형을 위한 허용 범위 α는 0.35로 고정한 후 용 및 토끼 형태의 물체 표면으로부터 사면체 요소망을 생성한 예제를 보여준다. 옥트리 셀의 셀 중심점 및 면 중심점

표 1: 입력 모델, 생성된 사면체 요소망, 이면각, 수행 시간

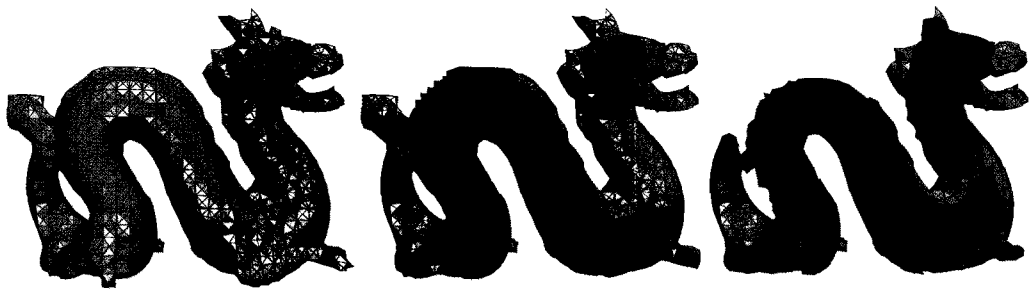
그림	입력 삼각형	요소망 사면체	이면각 (°) 최소	이면각 (°) 최대	수행시간 (sec) SDF	수행시간 (sec) Octree	수행시간 (sec) Tet
5(a)	100,000	41,926	14.11	150.75	1.35	0.03	0.12
5(b)	69,666	91,212	13.01	151.89	1.01	0.04	0.25
7(a)	56,192	88,566	12.51	150.98	0.96	0.37	0.36
7(b)	100,000	190,187	12.00	160.48	1.59	0.36	0.64
7(c)	103,784	257,077	13.29	153.42	1.97	0.38	0.81

의 부호거리를 엄밀히 얻기 위하여 부호거리장의 격자 크기를 가장 조밀한 옥트리 셀 크기의 절반으로 하였다. 그림 5(a)는 100,000개의 삼각형으로 구성된 용 형태의 표면으로부터 생성한 사면체 요소망의 여러 위치에서의 절단면을 보여주고 있다. 생성된 요소망은 41,826개의 사면체로 이루어져 있으며 최소 이면각은 14.11°, 최대 이면각은 150.75° 였다. 그림 5(b)는 69,666개의 삼각형으로 구성된 토끼 형태의 표면으로부터 생성한 91,212개의 사면체로 이루어진 요소망을 보여주고 있다. 최소 이면각은 13.01° 최대 이면각은 151.89°였다.

그림 7은 보다 복잡한 형태의 물체로부터 얻은 사면체 요소망을 보여준다. 물체의 복잡성을 감안하여 옥트리 높이를 6으로 하였다. 그림 7(a)의 공룡 형태의 요소망은 최소 이면각 12.51°와 최대 이면각 150.89°를 가진 87,967개의 사면체로 이루어져 있다. 그림 7(b)의 부처 형태의 요소망은 190,187개의 사면체를 가지고 있으며 최소 이면각 및 최대 이면각은 각각 12.00°와 160.48°이다. 마지막으로 그림 7(c)는 최소 이면각 13.29°와 최대 이면각 153.42°를 가진 257,077개의 요소로 이루어진 아마딜로 형태의 요소망을 보여준다.

표 1은 실험에 사용된 물체들의 표면을 구성하는 삼각형 개수와 이로부터 생성된 요소망의 사면체 개수 및 최소, 최대 이면각, 부호거리장 및 옥트리 구성과 옥트리 셀의 사면체화에 소요된 시간을 요약하고 있다. 물체 표면을 구성하는 삼각형으로부터 부호거리장을 만들어내는데 있어서 상대적으로 많은 시간이 소요됨을 알 수 있다. 이는 정규 격자의 크기에 비례할 뿐만 아니라 입력으로 주어지는 물체 표면의 삼각형 개수에도 비례하기 때문이다. 그럼에도 불구하고 부호거리장의 도입으로 Labelle와 Shewchuk의 방법[10]에 비해서 훨씬 빠른 성능을 보임을 알 수 있다. Labelle와 Shewchuk의 방법은 그림 5(a)와 유사한 요소망을 만드는데 24.7초가 걸리는 반면 본 논문에서 제안한 방법은 1.5초 밖에 걸리지 않았다. 또한 현재 구현에서는 옥트리 구성에 적지 않은 시간이 걸렸다. 이는 일반적인 옥트리 구성에서는 필요로 하지 않는 인접 셀을 미리 구하기 때문이며, 현재 이 부분에 대한 최적화가 이루어져있지 않은 상태이다.

그림 6은 실험에 사용된 모든 물체들로부터 표면점 변형을 위한 허용 범위 α를 달리해가며 얻은 사면체 요소망의 최소 및 최대 이면각의 그래프를 보여준다. α가 0.35 근처일 때 양질의 이면각을 얻을 수 있고 여기에서 멀어져 0이나 0.5에 가까울수록 최소 및 최대 이면각이 나빠지는 것을 알 수 있다. 이러



(a) 41,926개의 사면체로 이루어진 용 형태의 요소망. 최소 이면각은 14.1° 최대 이면각은 150.7°.

(b) 91,212개의 사면체로 이루어진 토끼 형태의 요소망. 최소 이면각은 13.0° 최대 이면각은 151.9°.

그림 5: 높이 5의 옥트리를 사용하여 생성한 사면체 요소망

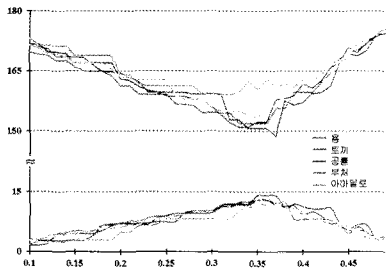


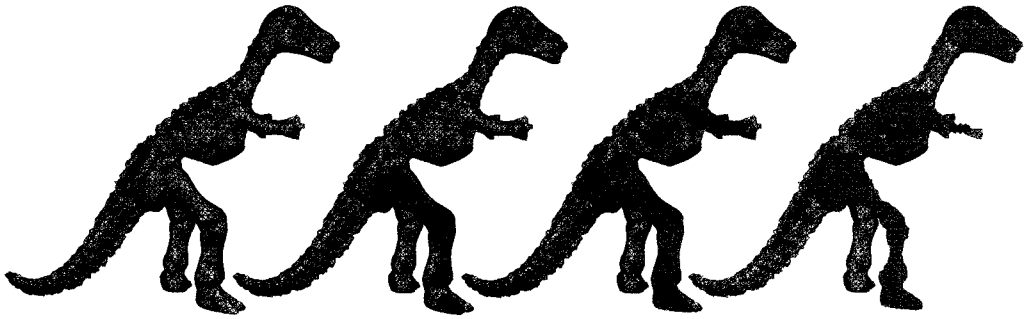
그림 6: 변형 허용 범위 α에 따른 최소 및 최대 이면각

한 이유로 본 논문의 모든 실험에서는 α를 0.35로 고정하였다. Labelle와 Shewchuk은 특정 허용 범위에서 가능한 모든 조합의 사면체에 대한 구간 연산(interval arithmetic)을 통해 최악의 이면각을 계산하는 프로그램을 작성하고, 컴퓨터의 도움을 받아 특정 허용 범위에서는 10.7°와 164.8° 또는 8.9°와 158.8°사이의 이면각을 보장할 수 있음을 증명하였다. 본 논문의 사면체 요소망 생성 방법도 기본적으로는 Labelle와 Shewchuk의 방식을 따르고 있으므로 추후 컴퓨터를 이용한 증명을 통해 이와 유사한 보장을 할 수 있을 것으로 예상된다.

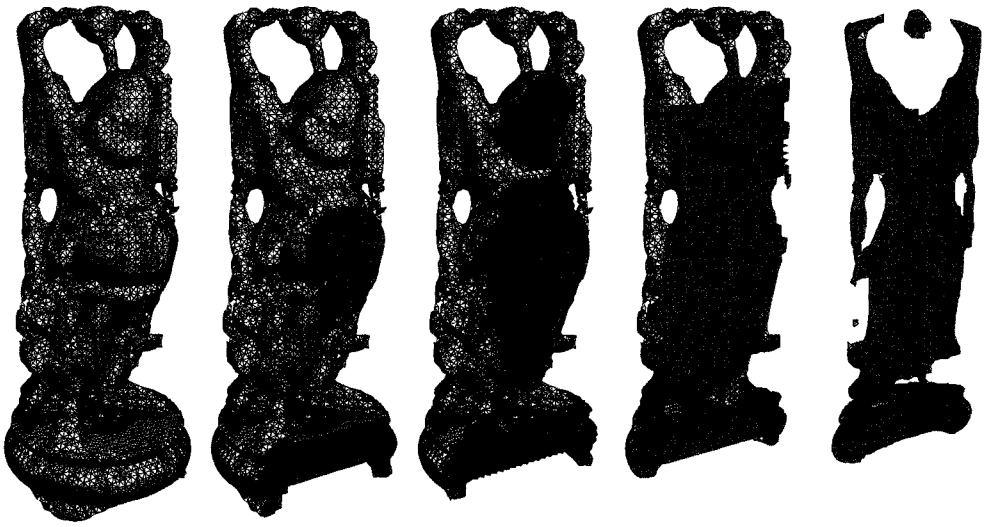
5. 결론

본 논문에서는 다각형들로 표현된 복잡한 물체를 양질의 이면각을 가진 사면체로 채우는 볼륨 요소망 구성 방법을 제안하였다. 물체 내외부의 빠른 판별을 위한 정규 격자상의 부호거리장을 안정적으로 구하기 위하여 표면 주변의 격자들에서는 각도 가중치 법선 벡터[11, 12, 13]를 이용하였으며, 모든 정규 격자에서의 부호거리를 빠르게 계산하기 위하여 파면 전파 기반의 빠른 전진 기법[14]을 사용하였다. 물체 내부에서 표면에 이르기까지 다양한 크기의 사면체로 이루어진 보다 작은 개수의 사면체를 가진 요소망을 구성하기 위하여 부호거리장의 정규 격자로부터 상향 방식으로 부호거리를 가진 옥트리를 생성하였다. 옥트리 셀의 사면체화에는 Labelle과 Shewchuk[10]의 기본 발상을 도입함으로써 양질의 이면각을 얻을 수 있게 하였다. 또한, 가장 먼저 발견된 허용 범위 이내의 표면 교차점을 표면점으로 만드는 대신 허용 범위 이내의 교차점들의 평균 위치를 사용함으로써 보다 좋은 이면각을 얻을 수 있도록 하였다. 본 논문에서 제안한 방법은 실행 시간이 빠르고 안정적이며 구현이 쉬운 장점을 가지고 있다.

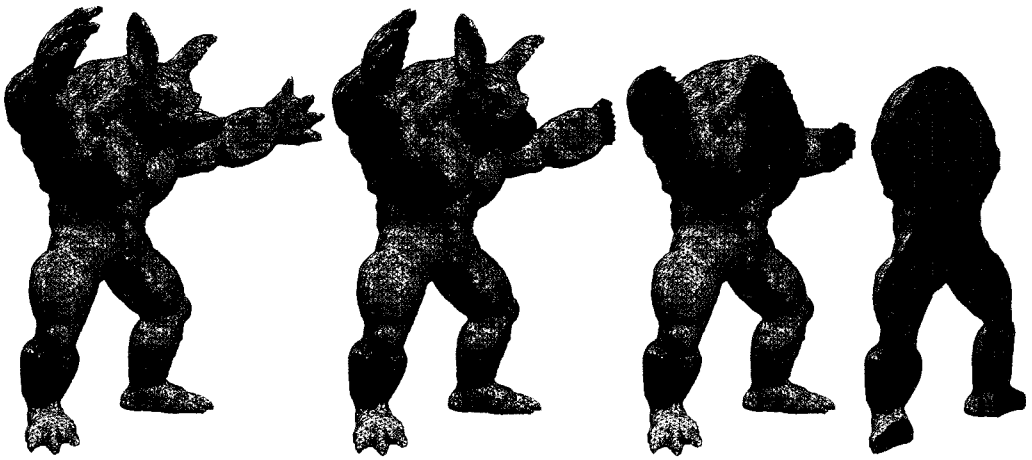
물체 표면까지의 부호거리를 가진 옥트리를 생성하기 위하여 현재는 가장 조밀한 옥트리 셀의 크기를 가진 정규 격자상에서 부호거리장을 생성한 후 상향 방식으로 옥트리 셀들을 병합하였다. 물체 표면을 이루는 다각형을 표면 주변의 가장 조밀한 옥트리 셀에만 하향 방식으로 삽입하고, 멀티코어 CPU를 이용하여 표면 주변의 각 셀에서 표면까지의 부호거리를 병렬적으로 구한 후, 상향 방식으로 부호거리를 가진 옥트리를 구성한다면, 정규 격자가 필요하지 않게 되어 보다 빠른 수행 성능을 얻을 수 있을 것으로 기대된다. Labelle와 Shewchuk은 구간 연산을 통한 컴퓨터 프로그램의 도움을 받아 이면각 보



(a) 87,967개의 사면체로 이루어진 공룡 형태의 요소망. 최소 이면각은 12.5° 최대 이면각은 150.8°.



(b) 190,187개의 사면체로 이루어진 부처 형태의 요소망. 최소 이면각은 12.0° 최대 이면각은 160.5°.



(c) 257,077개의 사면체로 이루어진 아마딜로 형태의 요소망. 최소 이면각은 13.3° 최대 이면각은 153.4°.

그림 7: 여러 복잡한 물체의 표면으로부터 높이 6의 옥트리를 사용하여 생성한 사면체 요소망

장에 대한 증명을 하였다. 하지만, 본 논문에서는 이러한 증명 없이 단지 여러 실험을 통해 양질의 이면각을 얻을 수 있다는 것만을 보였다. 추후 유사한 증명법을 통해 이면각에 대한 보장을 하고자 한다. 또한 허용 범위 이내의 교차점들의 평균 위치를 표면점으로 만드는 대신 최적화된 표면점의 위치를 구함으로써 물체 표면 주변의 사면체들에서 보다 좋은 이면각을 얻고자 한다.

감사의 글

본 연구는 지식경제부 및 문화체육관광부의 산업원천기술개발사업(2008-F-033-02, e-Enetertainment를 위한 실시간 물리 시뮬레이션 기술 개발)의 일환으로 수행되었으며, 서울시 산학연 협력사업(10581), 지식경제부 및 정보통신연구진흥원의 대학 IT 연구센터 지원사업(NIPA-2011-C1090-1111-0002), 2009년도 광운대학교 교내학술연구비 지원에 의해 연구되었음. 또한, 이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2011-0012878).

참고 문헌

[1] S.-W. Cheng and T. K. Dey, "Quality meshing with weighted delaunay refinement," in *Proc. Thirteenth Annual Symposium on Discrete Algorithms*, 2002, pp. 137–146.

[2] S. A. Mitchell and S. A. Vavasis, "Quality mesh generation in higher dimensions," *SIAM Journal on Computing*, vol. 29, no. 4, pp. 1334—1370, 2000.

[3] B. S. Baker, E. Grosse, and C. S. Rafferty, "Nonobtuse triangulation of polygons," *Discrete and Computational Geometry*, vol. 3, no. 2, pp. 147–168, 1998.

[4] L. P. Chew, "Guaranteed-quality triangular meshes," Department of Computer Science, Cornell University, Tech. Rep. TR-89-983, 1989.

[5] M. Bern, D. Eppstein, and J. R. Gilbert, "Probably good mesh generation," *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 48, no. 3, pp. 384–409, 1994.

[6] S.-W. Cheng, T. K. Dey, H. Edelsbrunner, M. A. Facello, and S.-H. Teng, "Sliver exudation," *Journal of the ACM*, vol. 47, no. 5, pp. 883–904, 2000.

[7] L. P. Chew, "Guaranteed-quality delaunay meshing in 3D," in *Proc. Thirteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, 1997, pp. 391–393.

[8] X.-Y. Li and S.-H. Teng, "Generating well-shaped delaunay meshes in 3D," in *Proc. Twelfth Annual Symposium on Discrete Algorithms*, 2001, pp. 28–37.

[9] F. Labelle, "Sliver removal by lattice refinement," in *Proc. Twenty-Second Annual Symposium on Computational Geometry*, 2006, pp. 347–356.

[10] F. Labelle and J. R. Shewchuk, "Isosurface stuffing: Fast tetrahedral meshes with good dihedral angles," *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH 2007)*, vol. 26, no. 3, p. 57, 2007.

[11] J. Bærentzen and H. Aænas, "Generating signed distance fields from triangle meshes," Information and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, Tech. Rep. IMM-TR-2002-21, 2002.

[12] C. H. Séquin, "Procedural spline interpolation in unicubix," in *Proc. Third USENIX Computer Graphics Workshop*, 1986, pp. 63–83.

[13] G. Thürmer and C. Wüthrich, "Computing vertex normals from polygonal facets," *Journal of Graphics Tools*, vol. 3, no. 1, pp. 43–46, 1998.

[14] J. A. Sethian, "A fast marching level set method for monotonically advancing fronts," in *Proc. National Academy of Sciences*, vol. 93, no. 4, 1996, pp. 1591–1595.

〈저자소개〉

김철원

- 2008년 2월 광운대학교 컴퓨터소프트웨어학과 학사
- 2011년 2월 광운대학교 컴퓨터과학과 석사
- 관심분야: 물리기반 모델링 및 시뮬레이션, 유체 시뮬레이션

박석훈

- 2010년 2월 광운대학교 컴퓨터소프트웨어학과 학사
- 2010년 3월 ~ 현재 광운대학교 컴퓨터과학과 석사과정
- 관심분야 : 물리기반 모델링 및 시뮬레이션, HCI

최민규

- 1996년 2월 KAIST 전산학과 학사
- 1998년 2월 KAIST 전산학과 석사
- 2003년 2월 KAIST 전산학과 박사
- 2003년 3월 ~ 2005년 2월 서울대학교 전기공학부 박사후연구원
- 2005년 3월 ~ 현재 광운대학교 컴퓨터소프트웨어학과 교수
- 관심분야: 물리기반 모델링 및 시뮬레이션, 캐릭터 애니메이션, 영상처리